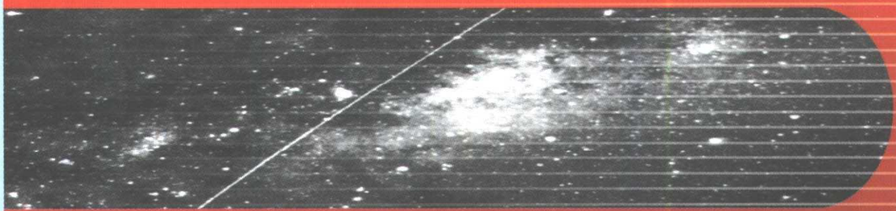
全国高等教育自学考试丛书

高等数学(二)应试辅导

GAODENGSHUXUE YINGSHI FUDAO

GAODENGSHUXUE YINGSHI FUDAO

凌明娟　钱晓明　张震峰　编著



上海科学技术文献出版社

全国高等教育自学考试丛书

高等数学(二)应试辅导

凌明娟　钱晓明　张震峰　编著

上海科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)应试辅导/凌明娟等编.—上海:上海科学技术文献出版社,2002.1
(全国高等教育自学考试丛书)
ISBN 7-5439-1719-X

Ⅰ.高...　Ⅱ.凌...　Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 19452 号

丛书策划:图书选题工作室
责任编辑:李聚华
封面设计:时　尚
技术编辑:韦　人

全国高等教育自学考试丛书
高等数学(二)应试辅导
凌明娟　钱晓明　张震峰　编
上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路 2 号　邮政编码:200031)
新华书店上海发行所发行
全国新华书店总经销
江苏昆山市亭林印刷总厂印刷
开本:787　1092　1/16　印张 18.375　字数 461 000
2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷
印数:1-5500
ISBN 7-5439-1719-X/G·444
定价:30.00 元

前　　言

《高等数学(二)》是经济管理类专业本科学历规定的一门必修课程，近年来受到了越来越多考生的重视。

为了帮助考生有效地掌握考试大纲所规定的内容，了解这些内容在深度和广度上的具体要求，并熟悉自学考试试卷中经常出现的题型，以便提高学习效率和考试成绩。我们根据"高等数学(二)自学考试大纲"，结合对历年试卷的研究及阅卷和辅导的经验，尤其是分析了近年来命题的最新动态，针对自学考试考生的特点，编写了这本学习辅导书。

本书的特点是：应试针对性强。力求紧扣大纲，深入浅出，内容简明，重点突出，解题思路清晰，资料完整。每章配有练习题和历年自学考试试题，尤其是1998年以来，试卷题型发生较大变化，我们在按章和考核点编辑历年试题时，将近年来试卷中常用的五种题型(单项选择题，简答题，计算题，证明题和综合应用题)放在前面，而将其他题型放在后面供考生复习时参考。这些试题展示了统考以来高等数学(二)考试的全貌，又蕴含着命题教师在《考试大纲》要求下的命题思想和具体要求，这是广大考生和教师了解、分析自学考试最直接、最宝贵的资料，也是学生自学和社会助学极为有效的辅导教材。

本书按大纲分为"线性代数"和"概率统计"两大部分，"线性代数"共五章，"概率统计"共九章，每章由以下四部分组成：

一、内容简述和典型例题；

二、小结；

三、练习题；

四、历年试题。

练习题与历年试题均有答案与提示。最后还附有最新的全国高等教育自学考试高等数学(二)试卷(2000年上半年、下半年和2001年上半年、下半年的试卷)。

本书由上海财经大学凌明娟、钱晓明、张震峰编写。其中凌明娟编写第二部分的第一、二、三、八、九章；钱晓明编写第一部分的第四、五章，第二部分的第四、五、六、七章；张震峰编写第一部分的第一、二、三章。

限于编者水平，缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2001年8月

目　　录

线性代数

第一章　行列式

第一部分　内容简介和典型例题……（2）

一、行列式的递推定义……（2）

二、行列式的性质……（5）

三、行列式的展开……（7）

四、克莱姆法则……（8）

第二部分　小结……（10）

第三部分　练习题……（11）

第四部分　历年试题……（13）

第二章　矩阵

第一部分　内容简介和典型例题……（18）

一、矩阵与特殊矩阵……（18）

二、矩阵的运算……（18）

三、逆矩阵……（21）

四、分块矩阵……（23）

五、矩阵的初等变换……（24）

第二部分　小结……（26）

第三部分　练习题……（27）

第四部分　历年试题……（30）

第三章　线性方程组

第一部分　内容简介和典型例题……（38）

一、n 维向量及其运算……（38）

二、向量的线性关系……（38）

三、向量组之间的线性关系……（40）

四、秩……（41）

五、线性方程组……（44）

第二部分　小结……（49）

第三部分　练习题……（49）

第四部分　历年试题……（53）

第四章　线性空间

第一部分　内容简介和典型例题 …… (64)
一、线性空间与基 …… (64)
二、向量的内积与夹角 …… (65)
三、施密特正交化方法 …… (66)
四、正交矩阵 …… (67)
第二部分　小结 …… (67)
第三部分　练习题 …… (68)
第四部分　历年试题 …… (69)

第五章　特征值问题与实二次型

第一部分　内容简介和典型例题 …… (73)
一、矩阵的特征值与特征向量 …… (73)
二、相似矩阵 …… (75)
三、实二次型 …… (80)
第二部分　小结 …… (85)
第三部分　练习题 …… (86)
第四部分　历年试题 …… (89)

概率统计

第一章　描述统计

第一部分　内容简述和典型例题 …… (106)
一、数据的分类 …… (106)
二、图形描述 …… (106)
三、数字特征描述 …… (111)
第二部分　小结 …… (115)
第三部分　练习题 …… (115)
第四部分　历年试题 …… (117)

第二章　概率的基本概念

第一部分　内容简述和典型例题 …… (119)
一、预备知识——排列与组合 …… (119)
二、随机事件及其运算 …… (122)
三、概率的定义和性质 …… (125)
四、条件概率 …… (127)
五、随机事件的相互独立性 …… (130)
六、贝努里概型与二项概率 …… (133)
第二部分　小结 …… (134)
第三部分　练习题 …… (137)
第四部分　历年试题 …… (140)

第三章　随机变量与概率分布
第一部分　内容简述和典型例题…… (151)
一、一维随机变量及其分布 …… (151)
二、二维随机向量及其分布 …… (162)
三、随机变量的数字特征 …… (167)
四、关于 n 维随机向量的一些结论 …… (175)
第二部分　小结…… (176)
第三部分　练习题…… (179)
第四部分　历年试题…… (184)
第四章　抽样和抽样分布
第一部分　内容简述和典型例题…… (198)
一、大数定律和中心极限定理 …… (198)
二、随机抽样 …… (199)
三、抽样分布 …… (201)
第二部分　小结…… (204)
第三部分　练习题…… (204)
第四部分　历年试题…… (206)
第五章　参数估计
第一部分　内容简述和典型例题…… (210)
一、点估计 …… (210)
二、参数的区间估计 …… (213)
第二部分　小结…… (217)
第三部分　练习题…… (218)
第四部分　历年试题…… (221)
第六章　假设检验
第一部分　内容简述和典型例题…… (227)
一、假设检验问题 …… (227)
二、假设检验的程序 …… (227)
三、一个正态总体的假设检验 …… (228)
四、二个正态总体的假设检验 …… (229)
五、大样本场合概率 P 的假设检验 …… (231)
六、分布函数的拟合优度检验 …… (231)
第二部分　小结…… (234)
第三部分　练习题…… (235)
第四部分　历年试题…… (236)
*第七章　工序质量控制和抽样检验
第一部分　内容简述和典型问题…… (241)
一、工序质量控制 …… (241)
二、计数抽样检验 …… (241)

第八章　回归分析与相关分析
第一部分　内容简述和典型例题 …………………………………………… (243)
一、回归与相关、样本相关系数 …………………………………………… (243)
二、一元线性回归 …………………………………………… (243)
三、预测及预测区间 …………………………………………… (248)
四、一元非线性回归 …………………………………………… (249)
* 五、多元线性回归 …………………………………………… (251)
第二部分　小结 …………………………………………… (251)
第三部分　练习题 …………………………………………… (253)
第四部分　历年试题 …………………………………………… (255)
第九章　经济预测与决策
第一部分　内容简述和典型例题 …………………………………………… (259)
一、几种常用的定量预测方法 …………………………………………… (259)
二、风险型决策 …………………………………………… (261)
第二部分　小结 …………………………………………… (262)
第三部分　练习题 …………………………………………… (262)
第四部分　历年试题 …………………………………………… (263)
2000(上)全国高等教育自学考试高等数学(二)试卷 …………………………………………… (264)
2000(下)全国高等教育自学考试高等数学(二)试卷 …………………………………………… (270)
2001(上)全国高等教育自学考试高等数学(二)试卷 …………………………………………… (275)
2001(下)全国高等教育自学考试高等数学(二)试卷 …………………………………………… (281)

线性代数

在现实世界中，变量与变量间接依赖关系是多种多样的．但是，我们可以把它们分成线性和非线性的两大类．对于许多现象来说，都是在不同程度上与线性变化的规律接近的．因此，在研究非线性关系时，一个很重要的方法就是把问题线性化，即把问题化为求解线性代数方程组之类的运算．特别是在计算机飞速发展和普及的今天，原来难以计算的高阶线性代数方程组的解可以借助计算机很快地计算出来，这就更促进了线性代数的广泛应用和发展．当今，线性代数知识已成为生产管理人员和工程技术人员必备的基础知识．

学习线性代数，应掌握一些基本知识，包括 n 阶行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、二次型等．这些知识在理论和实践中都有重要的价值，特别是矩阵，它是线性代数的重要基础，是研究线性关系的有力工具，必须予以足够的重视．

第一章　行列式

第一部分　内容简介和典型例题

一、行列式的递推定义

1. 二阶行列式和三阶行列式

二阶行列式定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$称为**二阶行列式**.

二阶行列式含有两行、两列.横的称行,竖的称列. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$称为二阶行列式的元素,$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为二阶行列式的展开式,当行列式中的元素是数时,展开式的计算结果是个数,称为**行列式的值**.二阶行列式的值按对角线法则计算,从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**(用实线表示),从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线(用虚线表示),主对角线上两个元素乘积前取正号,次对角线上两个元素乘积前取负号.

同样地,可以定义**三阶行列式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

三阶行列式含有三行、三列,其中 a_{ij}是第 i 行、第 j 列的元素, i、j 称为足标,其中 i 称为行标, j 称为列标.右边的等式称为它的展开式,当 a_{ij}都是数时,展开式的计算结果也是一个数,称为行列式的值.展开式看上去很复杂,实质上与二阶行列式一样,也满足对角线法则:

将行列式的第一、二列重复写在行列式的右边

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
(左上角到右下角的用实线连接)
(右上角到左下角的用虚线连接)

实对角线上三个元素乘积前冠以"+"号,虚线角线上三个元素乘积前冠以"-"号,把这六个乘积相加,即得行列式的展开式.

例 1　计算$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - (-2)\times(-1) = 6 - 2 = 4.$

例 2 计算$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}=1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-3\times1\times2-2\times3\times1-1\times2\times3=1+8+27-6-6-6=18.$

注意 对于更高阶的行列式的展开式不一定满足上述对角线法则.

2.n 阶行列式

定义 一阶行列式为$|A|=|a_{11}|=a_{11}$,设 $n-1$ 阶列式已经定义,则定义 **n 阶行列式**$|A|$为

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}.$$

这里 A_{ij}称为元素 a_{ij}的**代数余子式**,$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,M_{ij}是 a_{ij}的**余子式**.表示划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列所剩下的 $n-1$ 阶行列式.

例 3 设有 4 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\0&2&-5&1\\0&0&2&3\\1&3&-1&1\end{vmatrix}$$

A 的第三行第二列元素 $a_{32}=0$,它的余子式

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&-5&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=-5-1+5+1=0,$$

$$A_{32}=(-1)^{2+3}M_{32}=-M_{32}.$$

例 4 计算下三角行列式(主对角线上方元素全为零的行列式称为**下三角行列式**).

解 $\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

此例的结论可推广到上三角行列式、对角形行列式,并可作公式应用,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn},\quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 5 证明 n 阶行列

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

(此行列式称为次对角线行列式).

证 $$|A|=a_1A_{1n}=a_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots 0 & 0 & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{1+n}a_1a_2(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & \cdots & a_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$$

$$=(-1)^{\frac{(4+n)(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

比例的结论也可推广到次上(下)三角形行列式,并可作公式使用.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}.$$

例 6 试求行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & -1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{的值.}$$

解 $|A| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1) \times (-1) \cdots \times (-1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

二、行列式的性质

设$|A|$是一个 n 阶行列式,若将$|A|$的行改为列,列改为行,则得到一个新的行列式称为$|A|$的**转置**,记作$|A^{\mathrm{T}}|$或$|A'|$,用式子表示就是

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } |A^{\mathrm{T}}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与其转置行列式相等,即$|A| = |A^{\mathrm{T}}|$.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

性质 3 用数 k 乘行列式等于行列式的某一行(列)中的所有元素都乘以这个数 k.

由此可得

(1)行列式的某一行(列)中的所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

(2)若行列式的某一行(列)中的所有元素全为零,则该行列式的值为零.

性质 4 若行列式中有两行(列)对应元素成比例,则此行列式的值为零.

性质 5 若行列式的某一行(列)中的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)的元素分别是对应的两个加数中第一个数和第二个数,而其余各行(列)的元素与原行列式的相应的各行(列)的元素相同.

性质 6 把行列式的某一行(列)的所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

为了使行列式计算过程中的表达式简明,引进如下一些记号:$r_i \leftrightarrow r_j$($c_i \leftrightarrow c_j$)表示将行列式第 i 行(列)与第 j 行(列)互换.

$r_i \div k$($c_i \div k$)表示将行列式的第 i 行(列)的所有元素提去公因子 k.

$r_i + k\,r_j$($c_i + k\,c_j$)表示把行列式的第 j 行(列)的所有元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上.(第 j 行(列)元素不变).

以上这些记号在矩阵的初等变换中将继续使用.

例 7 证明

$$\begin{vmatrix} kc_1+a_1 & ma_1+b_1 & nb_1+c_1 \\ kc_2+a_2 & ma_2+b_2 & nb_2+c_2 \\ kc_3+a_3 & ma_3+b_3 & nb_3+c_3 \end{vmatrix} = (kmn+1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证 $\begin{vmatrix} kc_1+a_1 & ma_1+b_1 & nb_1+c_1 \\ kc_2+a_2 & ma_2+b_2 & nb_2+c_2 \\ kc_3+a_3 & ma_3+b_3 & nb_3+c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} kc_1 & ma_1+b_1 & nb_1+c_1 \\ kc_2 & ma_2+b_2 & nb_2+c_2 \\ kc_3 & ma_3+b_3 & nb_3+x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & ma_1+b_1 & nb_1+c_2 \\ a_2 & ma_2+b_2 & nb_2+c_2 \\ a_3 & ma_3+b_3 & nb_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} kc_1 & ma_1+b_1 & nb_1 \\ kc_2 & ma_2+b_2 & nb_2 \\ kc_3 & ma_3+b_3 & nb_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & ma_1+b_1 & c_1 \\ kc_2 & ma_2+b_2 & c_2 \\ kc_3 & ma_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & nb_1+c_1 \\ a_2 & ma_2 & nb_2+c_2 \\ a_3 & ma_3 & nb_3+c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & nb_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & nb_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & nb_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} kc_1 & ma_1 & nb_1 \\ kc_2 & ma_2 & nb_2 \\ kc_3 & ma_3 & nb_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & nb_1 \\ kc_2 & b_2 & nb_2 \\ kc_3 & b_3 & nb_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & nb_1 \\ a_2 & b_2 & nb_2 \\ a_3 & b_3 & nb_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= kmn(-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= (kmn+1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

注意 利用行列式性质将行列式一拆为二,每次只能拆一行(列).

例 8 求多项式

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ a & x-a & a & a \\ a & a & x-a & a \\ a & a & a & x-a \end{vmatrix} \text{的根.}$$

解 令 $f(x) \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 2a+x & a & a & a \\ 2a+x & x-a & a & a \\ 2a+x & a & x-a & a \\ 2a+x & a & a & x-a \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1 \\ r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1}\begin{vmatrix} 2a+x & a & a & a \\ 0 & x-2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=(2a+x)(x-2a)^3=0.$$

解得：$x_1=-2a, x_2=2a$（三重根）.

注 这个行列式各列元素之和相同，故采用把每一列都加到第1列的方法，使第1列元素相同，然后再用性质将行列式化为三角形行列式来计算.

例9 计算

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -n+1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 $|A|\xrightarrow[\cdots c'_{n-1}\leftrightarrow c_n]{c_1\leftrightarrow c_2,\, c'_2\leftrightarrow c_3}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{n-1}\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)(-2)\cdots(-n)=(-1)^{n-1}\times(-1)^n\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$$

$$=(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}}n!.$$

注意 将行列式的第一列搬到最后一列，要进行 $n-1$ 次的列与列的互换.

三、行列式的展开

n 阶行列式 $|A|$ 等于它的某一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 而 n 阶行列式 $|A|$ 的任一行（列）的各元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\begin{cases}|A| & i=j\text{时}, \\ 0 & i\neq j\text{时}.\end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}|A| & i=j\text{时}, \\ 0 & i\neq j\text{时}.\end{cases}$$

其中 A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

有了行列式的性质及行列式展开公式，在计算行列式时，就可以按某一行（列）来展开. 在展开前，尽可能将某一行（列）元素化为只剩下一个非零元素，然后再按这一行（列）展开. 这样，一个 n 阶行列式就成了一个 $n-1$ 阶行列式，这是计算数字行列式一个常用方法.

例 10 计算

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&1&4\\3&1&4&-1\\1&0&3&2\\2&2&3&0\end{vmatrix}.$$

解 第 2 列已有两个零,将第 2 列化为只剩一个非零元素,然后按第 2 列展开.

$$|A|\xlongequal{r_4+(-2)r_2}\begin{vmatrix}2&0&1&4\\3&1&4&-1\\1&0&3&2\\-4&0&-5&2\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1&4\\1&3&2\\-4&-5&2\end{vmatrix}$$

$$=12-8-20+48-2+20=50.$$

例 11 求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x-1&-2&-2\\-2&x-1&2\\2&2&x-1\end{vmatrix}$ 的根.

解 令 $f(x)=\begin{vmatrix}x-1&-2&-2\\-2&x-1&2\\2&2&x-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}x-1&-2&-2\\-2&x-1&2\\0&x+1&x+1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2+(-1)c_3}\begin{vmatrix}x-1&0&-2\\-2&x-3&2\\0&0&x+1\end{vmatrix}=(x+1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}x-1&0\\-2&x-3\end{vmatrix}$$

$$=(x+1)(x-1)(x-3)=0.$$

所以 $x_1=-1,x_2=1,x=3$.

例 12 $\begin{vmatrix}1&3&2&4\\0&-1&x&1\\1&0&1&2\\-1&1&3&4\end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式.求该式中一次项的系数.

解 该式中只有一个元素是 x,它的代数余子式即为一次项 x 的系数.

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&3&4\\1&0&2\\-1&1&4\end{vmatrix}=-(6+4-12-2)=-16.$$

四、克莱姆法则

1. 若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $|A|\neq0$,则该方程组有唯一解,其解为

$$x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|A_j|}{|A|}(j = 1,2,\cdots,n).$$

其中,$|A_j|$是将系数行列式$|A|$中的第 j 列元素换成常数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其余元素不变所得到的行列式.

2. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$|A|\neq 0$,则方程组仅有零解;若该方程组有非零解,则$|A| = 0$.

例 13 问 a,b,c 满足什么条件时,方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = a^2 + b^2 + c^2 \\ bcx_1 + acx_2 + abx_3 = 3abc \end{cases}$$

有唯一解,并求出其解.

解 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}$

$$= 1\times(-1)^2\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)(b-c)\neq 0.$$

即当 a,b,c 为互不相等的实数时,方程组有唯一解.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+b^2+c^2 & b & c \\ 3abc & ac & ab \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - bc_2 - cc_3} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a^2 & b & c \\ abc & ac & ab \end{vmatrix} = a|A|,$$

同理,

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & 1 \\ a & a^2+b^2+c^2 & c \\ bc & 3abc & ab \end{vmatrix} = b|A|,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b+c \\ a & b & a^2+b^2+c^2 \\ bc & ac & 3abc \end{vmatrix} = c|A|.$$

方程组的解为 $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = a, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = b, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}6 = c.$

例 14 当 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$