面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

数值逼近

王仁宏

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

00001871

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数值逼近

王仁宏

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112号

内容提要

本书讲述各种数值逼近的理论和方法.除介绍传统的数值逼近内容外,还介绍了多元插值、多元直交多项式、高维数值积分、多元样条,以及曲线、曲面的生成与逼近等多种新理论和新方法,其中还包括了作者的部分科学研究成果.

本书可作为大学本科计算数学专业教材,也可作为其他理工学科硕士、博士研究生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数值逼近/王仁宏. —北京:高等教育出版社,
1999
ISBN 7-04-006983-0

Ⅰ.数… Ⅱ.王… Ⅲ.数值逼近 Ⅳ.0174.41

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第07871号

数值逼近
王仁宏

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　本	787×960　1/16	版　次	1999年6月第1版
印　张	18.75	印　次	1999年6月第1次印刷
字　数	350 000	定　价	19.90元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国家教委重点教材

序　　言

逼近(近似)的思想和方法渗透于几乎所有的学科,其中包括自然科学和人文科学中的学科.从数学学科的角度来看,逼近论既属于函数论的范畴,又属于计算数学的范畴.事实上,逼近论是一门研究函数的各类逼近性质的学科方向,因而它应属函数论的范畴.另一方面,逼近论又是计算数学、科学工程计算诸多数值方法(包括函数计算,数值微分、数值积分,微分、积分方程数值解,曲线、曲面生成以及数据处理等等)的理论基础和方法的依据.正因为如此,作为一部涉及逼近论的教材,必须首先确定这样一个问题:偏向于函数论,抑或偏向于数值计算?

本书作为一部教材,偏向于后者——科学计算.从本书的书名《数值逼近》也可看出这点.当今时代是科学技术日新月异地飞速发展的时代.层出不穷的新问题,将要求人们提出相应的新理论、新方法来加以解决.所以本书除着力讲述数值方法的理论与技巧外,还有重点地介绍了一些偏重于函数论方面的基本理论和方法.以便本书的读者能从中学到扎实的基本理论与方法,为将来能够独立地提出新理论与方法提供必要的前提.这就是编写本书的基本思路.

如所知,1983 年我曾与徐利治、周蕴时两位合作出版了《函数逼近的理论与方法》一书.那本书是我们当年在吉林大学教学工作的总结基础上写成的.十多年来,随着科学技术的飞速发展,特别是计算机技术的发展,使得科学技术各个领域中原本不可能解决的许多问题,已可以借助计算机来解决.就数值逼近学科领域来讲,涉及到的新课题主要有以下三个方面:多元问题(高维,多因素),非线性问题,和几何形象化(同各科学工程学科中的计算机辅助设计与制造密切相关).因此,本书在讲述一些经典的理论方法的同时,还着重介绍了许多多元数值逼近的理论与方法,包括多元多项式插值,多元直交多项式,高维数值积分,以及多元样条等方面的基本理论和最新方法,其中有的成果还是最近十多年来才研究出来的.由于计算机的发展,计算几何已悄然兴起.如果说,解析几何是在笛卡儿引入坐标以后,人们可以用解析(代数)的方法来研究几何问题的话;那么,计算几何就是在计算机出现后,人们可以用计算机来研究几何问题,显示和修改几何实体等.曲线、曲面的生成与逼近,正是几何形体的逼近问题.本书第八章对此作了专门的介绍,特别着重介绍了 Bézier 方法,B－样条方法和非均匀有理 B－样条(NURBS)方法等.为介绍非线性逼近方法,本书除在第六章专门介绍外,还就奇异积分的计算等作了讨论.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

本书上述几方面的新内容,作者曾多次在大连理工大学为全校博士研究生开设的《数值逼近选讲》课程中讲述过.

本书的选材或内容可能会有不当、甚至错误之处,敬请专家、读者不吝指教,编者将不胜感谢.

本书的写作和出版,得到了国家教育委员会"九五"重点教材立项的资助,使本书得以顺利出版.作者在此深表感谢.作者还要感谢国家自然科学基金委员会的资助.感谢徐利治教授和周蕴时教授对编者撰写本书的大力支持.审稿人对本书原稿提出了许多宝贵的意见,高等教育出版社郭思旭先生为本书出版做了大量细致的工作.对他们的支持与帮助谨致衷心的感谢.

大连理工大学数学科学研究所

王仁宏

1998年11月于大连

责任编辑　郭思旭
封面设计　张　楠
责任绘图　汪　娉
版式设计　马静如
责任校对　王　巍
责任印制　杨　明

C0472067

检 8

目　　录

第一章 Weierstrass 定理与线性算子逼近

如所知，逼近的目的，是用较简单的函数来逼近较复杂的函数．本章讲述用多项式序列逼近有界闭区间上连续函数的可行性．

§1. Weierstrass 第一定理

在实变数函数的数学分析中，最重要的函数类是连续函数类 $C[a,b]$ 与连续的周期函数类 $C_{2\pi}$．

$C[a,b]$ 是定义在某一闭区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数所成的集合；$C_{2\pi}$ 是定义在整个实轴 $(-\infty,\infty)$ 上的以 2π 为周期的连续实函数全体所构成的集合．

现在我们来叙述逼近论中第一条基本定理．

定理 1(Weierstrass) 设 $f(x)\in[a,b]$，那么对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在这样的多项式 $P(x)$，使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

关于这个著名定理，现在已有好多个不同的证法，下面介绍 Bernstein 的构造性证法．

Bernstein 证法：不妨假定函数的定义区间是 $[a,b]\equiv[0,1]$．事实上，通过如下的线性代换：

$$t=(b-a)x+a,$$

就能将 x 的区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 变换成 t 的区间 $a\leqslant t\leqslant b$．同时，显而易见，x 的多项式将变成 t 的多项式，x 的连续函数将变成 t 的连续函数．因此只须就连续函数类 $C[0,1]$ 来证明 Weierstrass 的定理就行了．

对于给定的 $f(x)\in C[0,1]$，作如下的一串多项式 $(n=1,2,\cdots)$：

$$B_n^f(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\tag{1.1}$$

显然 $B_n^f(x)$ 是一个 n 次多项式．

下面我们要证明极限关系式

$$\lim_{n\to\infty} B_n^f(x)=f(x)$$

在区间[0,1]上是一致成立的.显然这个命题隐含着Weierstrass的第一定理.因为对于任意指定的 $\varepsilon>0$,根据所要证明的命题,总可找到一个充分大的 N,使得当 $n\geqslant N$ 时恒有

$$\max_x\left|B_n^f(x)-f(x)\right|<\varepsilon.$$

换句话说,Weierstrass定理中所提及的 $P(x)$,只要取 $B_n^f(x)$(其中 $n\geqslant N$)就可以了.

为了证明上述命题,需要用到一个初等恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x). \tag{1.2}$$

这个恒等式是容易验证的.事实上,由于

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\equiv[x+(1-x)]^n\equiv 1,$$

可知

$$\begin{aligned}
\text{左端}&=\sum_{k=0}^{n}(n^2x^2+k^2-2nkx)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=n^2x^2+\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2nx\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=n^2x^2+\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad+(1-2nx)\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=n^2x^2+n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+(1-2nx)nx\\
&=n^2x^2+n(n-1)x^2+(1-2nx)nx=\text{右端}.
\end{aligned}$$

对于[0,1]中的每一固定的 x 及任一固定正整数 n,令

$$\varepsilon_n(x)=\max\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|,$$

上式的右端代表当 k 取所有合乎条件

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4}$$

的正整数时所得的最大差数.根据 $f(x)$ 在[0,1]上的一致连续性,可见必存在一串 $\varepsilon_n>0$,使得

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\varepsilon_n(x) < \varepsilon_n \downarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

记
$$f(x) - B_n^f(x) = \sum{}' \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}(x) + \sum{}'' \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}(x),$$

其中 $\sum'$ 与 $\sum''$ 分别表示对满足如下条件的一切 k 所取的和：

$$|k - nx| \leqslant n^{3/4}, \ |k - nx| > n^{3/4};$$

而
$$\lambda_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

令 $M = \max|f(x)|$，则显然有

$$\left| f(x) - B_n^f(x) \right| < \sum{}' \varepsilon_n \lambda_{n,k}(x) + 2M \sum{}'' \lambda_{n,k}(x) < \varepsilon_n + 2M \sum{}'' \lambda_{n,k}(x),$$

而且利用已经验证过的恒等式(1.2)可知

$$n^{3/2} \sum{}'' \lambda_{n,k}(x) < \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \lambda_{n,k}(x) = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4}.$$

因此，
$$\sum{}'' \lambda_{n,k}(x) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/2},$$
$$\left| f(x) - B_n^f(x) \right| < \varepsilon_n + \frac{M}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/2}.$$

注意上列不等式的右端与 x 无关，而且随着 n 的无限增大而趋于 0. 这就证明了多项式序列 $B_n^f(x)$ 对于 $f(x)$ 的一致收敛性.

Weierstrass 的第一定理实际上正好解决了如何利用多项式作成的函数项级数来表示连续函数的问题. 因为，任意取定一个单调下降于 0 的数列 δ_n，则对每个 δ_n 都可找到一个多项式 $P_n(x)$ 使得 $|P_n(x) - f(x)| < \delta_n$. 于是令

$$Q_1(x) = P_1(x), Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x), n > 1,$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ 的前 n 项之和恰好与 $P_n(x)$ 相合，因而该级数也就一致地收敛于 $f(x)$.

在 Bernstein 的证法中，不仅证明了近似多项式序列 $P_n(x)$ 的存在性，而且还给出了构造 $P_n(x)$ 的一个具体方法. 事实上，$B_n^f(x)$($n = 1, 2, \cdots$)便构成连续函数 $f(x)$($0 \leqslant x \leqslant 1$)的一个近似多项式序列. 这样的证法通常称之为构造性的证明方法，它要比一般数学上所说的纯粹存在性的证明更有价值.

§2. Weierstrass 第二定理

周期连续函数(不妨假定其周期为 2π)的最简单逼近工具是如下三角多项式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

如果其中的系数 a_n 和 b_n 不全为 0,则称 $T(x)$ 为 n 阶三角多项式.

相应于 Weierstrass 第一定理,有如下的

定理 2(Weierstrass 第二定理) 设 $f(x)\in C_{2\pi}$,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,都有三角多项式 $T(x)$ 存在,使得

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)-T(x)|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

这个定理可以从 Weierstrass 第一定理,通过诱导函数来证明. 此处直接采用 Vallée-Poussin 算子

$$V_n[f;x]=\frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t$$

来证明,其中 $(2n)!!=(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2$, $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1$.

作平移,显然有

$$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}\mathrm{d}t.$$

再作变换 $v=\sin^2 t/2$,可算得上述积分为

$$\begin{aligned}I_n&=2\int_0^1(1-v)^n\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\mathrm{d}v=2\int_0^1 v^{-1/2}(1-v)^{n-1/2}\mathrm{d}v\\&=\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}=\frac{2\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}.\end{aligned}$$

从而

$$f(x)-V_n[f;x]=\frac{1}{I_n}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(t)]\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t.$$

因为 $f(x)\in C_{2\pi}$,所以 $f(x)$ 一致连续. 即对任意给定的 $\varepsilon>0$,有 $\delta>0$ 存在,使得当 $|x'-x''|<\delta$ 时,

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2.$$

今将 $f(x)-V_n[f;x]$分成两部分

$$
\begin{aligned}
f(x)-V_n[f;x]&=\frac{1}{I_n}\int\limits_{|t-x|<\delta}[f(x)-f(t)]\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{I_n}\int\limits_{|t-x|\geqslant\delta}[f(x)-f(t)]\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t \qquad (2.2)\\
&\xlongequal{\text{def}}C_1+C_2.
\end{aligned}
$$

以下估计 C_1 和 C_2.

$$
\begin{aligned}
|C_1|&\leqslant\frac{1}{I_n}\int\limits_{|t-x|<\delta}|f(x)-f(t)|\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t\\
&<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1=\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

记 $M=\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)|,q=\cos\frac{\delta}{2}<1$,则

$$
\begin{aligned}
|C_2|&\leqslant\frac{1}{I_n}\int\limits_{|t-x|\geqslant\delta}|f(x)-f(t)|\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t\\
&\leqslant 2M\cdot\frac{1}{I_n}\cdot\cos^{2n}\frac{\delta}{2}\cdot 2\pi\\
&=2M\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}q^{2n}\\
&<4M\cdot n\cdot q^{2n}.
\end{aligned}
$$

因此存在自然数 N,使当 $n>N$ 时

$$|C_2|<\varepsilon/2. \qquad (2.4)$$

综合(2.2)、(2.3)和(2.4),即可知 Weierstrass 第二定理成立.

§3. 线性正算子与 Korovkin 定理

设 $\varphi(x,t)$对集 E 中每一个 x,在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上关于 t 都连续,则积分

$$L(f;x)=L(f(t);x)=\int_a^b\varphi(x,t)f(t)\mathrm{d}t=g(x) \qquad (3.1)$$

对于每一在区间$[a,b]$上连续的函数 $f(t)$都确定了一个函数 $g(x)=L(f;x)$. 此处 $L(f;x)$与微积分中的函数 $f(x)$相似,所差的只是变元与值的含义不同. 函数的存在域与变化域为数集,而 $L(f;x)$的存在域与变化域均为函数集.

定义 1 设已知函数集 F,如果对于集 F 中的每一函数 $f(t)$,均有一个函数 $\varphi(x)=H(f(t);x)$与之对应,则说在函数集 F 上定义了算子 $H(f;x)=H(f(t);x)$.

定义 2　称算子 $H(f;x)$是线性的，如果随着 $f(t)$与 $\varphi(t)$属于它的存在域，$af(t)+b\varphi(t)$(其中 a 与 b 为任意的实数)也属于它的存在域且成立如下等式：

$$H(af+b\varphi;x)=aH(f;x)+bH(\varphi;x).$$

例 1　由(3.1)式定义的算子 $L(f;x)$是线性的.

事实上，由下列等式即可推出算子 $L(f;x)$的线性性质：

$$\begin{aligned}L(\alpha f_1+\beta f_2;x)&=\int_a^b\varphi(x,t)(\alpha f_1(t)+\beta f_2(t))\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_a^b\varphi(x,t)f_1(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b\varphi(x,t)f_2(t)\mathrm{d}t\\&=\alpha L(f_1;x)+\beta L(f_2;x).\end{aligned}$$

例 2　设 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$为定义于集 E 上的函数.令

$$H(f;x)=\sum_{k=1}^n f(t_k)u_k(x),$$

其中 $f(t)$为在实数集 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 上有定义的函数.可以证明算子 $H(f;x)$是线性的.

事实上

$$\begin{aligned}H(af+b\varphi;x)&=\sum_{k=1}^n(af(t_k)+b\varphi(t_k))u_k(x)\\&=a\sum_{k=1}^n f(t_k)u_k(x)+b\sum_{k=1}^n\varphi(t_k)u_k(x)\\&=aH(f;x)+bH(\varphi;x).\end{aligned}$$

定义 3　如果对于每一正函数 $f(t)$及 $x\in E$,线性算子 $L(f;x)$满足条件：$L(f;x)\geqslant 0$,则称 $L(f;x)$为集 E 上的线性正算子.

显然，对于每一固定的值 x，线性算子 $L(f;x)$成为线性泛函数.因此，如果对于集 E 中每一固定的值x，线性泛函数均是正的，则线性算子 $L(f;x)$在集 E 上是正的.例如，当 $u_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$在 E 上为正函数时，算子

$$L(f;x)=\sum_{k=1}^n f(t_k)u_k(x)$$

为集 E 上的线性正算子.又如，若 $\varphi(x,t)$对集 E 中每一固定的x 在区间$[a,b]$上关于 t 为连续的正函数，则算子

$$L(f;x)=\int_a^b\varphi(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

在集 E 上是正的.

还须指出的是,在线性算子 $L(f;x)$ 中,变元 f 的变元与 x 不同,$L(f;x)=L(f(t);x)$. 在计算算子 $L(f;x)$的值时,我们将 x 当作常数(但为集 E 中任意的),因此等式

$$L(f(x);x)=f(x)L(1;x)$$

成立,这是由于 $f(x)$为常数(与 t 无关).

现在我们来研究线性正算子序列 $L_n(f;x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于函数 $f(x)$的条件. 这里的 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,并且在整个实轴上有界. 如在泛函数情形一样,我们将证明,序列 $L_n(f_k;x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $f_k(x)=x^k(k=0,1,2)$蕴含序列 $L_n(f;x)$一致收敛于 $f(x)$(如果 $f(x)$满足上面指出的条件).

下面将引进这一论断的一种证法,它是以闭区间上的连续函数必一致连续这个事实为基础的. 先证明一个引理.

引理 1　若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,在点 b 为右连续,在点 a 为左连续,则对 $\varepsilon>0$,有 $\delta>0$,使得当$|y-x|<\delta, a\leqslant x\leqslant b$ 时,恒成立不等式

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon.$$

证明　令 $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}>0$. 根据函数 $f(x)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的一致连续性可以求出这样的$\delta_1>0$,使得当$|y-x|<\delta_1, a\leqslant x, y\leqslant b$ 时,有不等式

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon'. \tag{3.2}$$

由于函数 $f(x)$在点 a 连续(左连续是假定的,而右连续则是依函数在闭区间$[a,b]$上的连续性得知),所以对 $\varepsilon'>0$ 有 $\delta_2>0$,使得当$|y-a|<\delta_2$ 时

$$|f(y)-f(a)|<\varepsilon'. \tag{3.3}$$

同理有 $\delta_3>0$,使得当$|y-b|<\delta_3$ 时

$$|f(y)-f(b)|<\varepsilon'. \tag{3.4}$$

今取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$并证明,当$|y-x|<\delta, a\leqslant x\leqslant b$ 时,有

$$|f(y)-f(x)|<2\varepsilon'=\varepsilon.$$

事实上,若 x 与 y 均属于区间$[a,b]$,则后面的不等式由(3.2)推得. 若 $y<a$(当然 x 必须属于区间$[a,b]$),则$|y-x|=|y-a|+|x-a|$,且由于$|y-x|<\delta$,所以$|y-a|<\delta$,$|x-a|<\delta$. 现在得到

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|&=|f(y)-f(a)+f(a)-f(x)|\\&\leqslant|f(y)-f(a)|+|f(x)-f(a)|.\end{aligned}$$

依(3.3)式不等式右边第一项小于 ε';而依(3.2)式第二项也小于 ε'. 从而

$$|f(y)-f(x)|<2\varepsilon'=\varepsilon.$$

如此已证明当 $y<a$ 时引理为真，对于 $y>b$ 的情况可以同样地证明.

现在我们给出线性正算子序列的收敛性定理.

定理 3(Korovkin) 设线性正算子序列 $L_n(f;x)$满足条件：

(1) $L_n(1;x)=1+\alpha_n(x)$,

(2) $L_n(t;x)=x+\beta_n(x)$,

(3) $L_n(t^2;x)=x^2+\gamma_n(x)$,

其中 $\alpha_n(x),\beta_n(x),\gamma_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于零；又设函数 $f(t)$有界且在区间$[a,b]$上连续，于点 b 为右连续，于点 a 为左连续. 则在区间$[a,b]$上序列 $L_n(f;x)$一致收敛于函数 $f(x)$.

证明 由于函数 $f(t)$有界$(-M<f(t)<M)$，所以对一切 x 与 t 均成立不等式

$$-2M<f(t)-f(x)<2M. \tag{3.5}$$

其次，依引理 1，对于 $\varepsilon>0$ 有 $\delta>0$ 使得，当 $a\leqslant x\leqslant b$, $|t-x|<\delta$ 时，成立不等式

$$-\varepsilon<f(t)-f(x)<\varepsilon. \tag{3.6}$$

假定 $\psi(t)=(t-x)^2$(x 为区间$[a,b]$上的任意一点，且一经取好就固定了)，由(3.5)、(3.6)式不难得到

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\delta^2}\psi(t)<f(t)-f(x)<\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\psi(t). \tag{3.7}$$

由此再依算子 $L_n(f;x)$的线性性质与单调性得到(其中 x 为固定的，因而 $f(x)$ 为常数)

$$\begin{aligned}-\varepsilon L_n(1;x)-\frac{2M}{\delta^2}L_n(\psi;x)&\leqslant L_n(f;x)-L_n(f(x);x)\\&=L_n(f;x)-f(x)L_n(1;x)\leqslant\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n(\psi;x).\end{aligned} \tag{3.8}$$

现在我们可以断定，$L_n(\psi;x)$在区间$[a,b]$上一致收敛于零. 事实上，由定理的条件与算子 $L_n(f;x)$的线性性质推出

$$\begin{aligned}L_n(\psi;x)&=L_n(t^2-2tx+x^2;x)\\&=L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\\&=x^2+\gamma_n(x)-2x(x+\beta_n(x))+x^2(1+\alpha_n(x))\\&=\gamma_n(x)-2x\beta_n(x)+x^2\alpha_n(x)\\&=\delta_n(x);\end{aligned}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com