新世纪中学生读本

新版

中考数学

本书编写组编

文匯出版社

新世纪中学生读本

中　考　数　学

本书编写组

文汇出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学 /《中考数学》编写组编. 一上海:文汇出版社,2001.10
(新世纪中学生读本)
ISBN 7-80531-281-8

Ⅰ. 中... Ⅱ. 中... Ⅲ. 数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第061153号

·新世纪中学生读本·

中考数学

编　　写/本书编写组
责任编辑/车明玉
特约编辑/晓　平
封面装帧/周夏萍

出版发行/文汇出版社
上海市虎丘路50号
(邮政编码200002)
经　　销/全国新华书店
印刷装订/上海港东印刷厂
版　　次/2001年10月第1版
印　　次/2001年10月第1次印刷
开　　本/787×1092　1/16
字　　数/370000
印　　张/14.5
印　　数/1——5100

ISBN 7-80531-281-8/G·180
定　　价/18.00元

前　　言

中考，是每一个中学生必须经历的一次重要考试，事关孩子们的前途和命运。学生着急，教师着急，家长更着急。探求一套切实可行的复习方法和选择一本实用性强的复习用书，是有效提高学生考试成绩的重要保证，本书努力在这方面为广大中考学生提供优质服务。

尽管中考命题由各省、市或地区单独进行，但是命题的指导思想和基本原则，试题的特点、结构和规律，以及所涉及的主要内容基本一致。本书依据中考考纲和考试要求，紧扣考点、突出重点、剖析难点、抓住热点，帮助考生提高学习成绩和应考能力。本套复习考试用书共有五本，即语文、数学、英语、物理、化学。

建议读者采用"尝试学习"的方法阅读本书。对于书中的"典型例题解析"和"典型中考题解"，应先独立思考、尝试解答，如一时找不到思路则不妨看一下书中的"分析"，然后自己解答，解完后再与书中的解答对照阅读，检查一下是否正确。对于书中的"典型错解分析"，看完"错解"后应先自行判断：错在哪里？原因何在？然后再读书中的"剖析"和"正解"，与自己的判断进行对照检验。至于"模拟测试题"，更应该先尝试解答，做完后再看"参考答案"和"试题分析"。采用这种"尝试学习"的方法学习，可以帮助你更好地掌握书中的内容，切实提高解题能力和考试成绩。

本套中考用书的作者，都是各学科富有教学经验的、多年从事中考研究和指导的专家和资深教师。全书既对中考要求中的"基础知识"、"基本技能"、"基本方法"提供了扎实的训练，又对近年来中考中出现的新题型、新特点给予充分的关注。

本书主编为朱成杰，编者为姚志严、何若华、赵伟、谈小芳、王颖等。

愿认真学习本书的中学生能胜利地迈入理想的高中。

限于水平和编写时间的紧迫，书中不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

本书编写组

2001 年 7 月

目　　录

模拟测试及分析

中考试题分析与展望

典 题 解 析

一、数与式、统计

【典型例题解析】

例 1 填空：

(1) 一个数的相反数是正数，那么这个数一定是__________；

(2) 数轴上有一点到原点的距离为 5，那么这点表示的数是______；

(3) 绝对值等于 4 的数是________；

(4) 大于 -5 而小于 3 的整数是______________；

(5) 绝对值最小的数是______，写出绝对值小于 1 的两个负数：______________。

解 (1) 负数；

(2) 5 或 -5；

(3) 4 或 -4；

(4) -4、-3、-2、-1、0、1、2；

(5) 0；$-\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{3}$。

注 一般在数轴上到原点距离相等的点有两个，只有到原点的距离为零的点是惟一的一点，即原点；一般绝对值相等的数也有两个，它们互为相反数，只有绝对值为零的是惟一的数 0；绝对值小于 1 的负数有无数多个，任意写出两个都对，因此，(5)有无数多个答案。

例 2 比较下列各组数的大小：

(1) $-1\frac{3}{4}$ 和 $-\frac{12}{7}$； (2) $-|-\pi|$ 和 $-(-\pi)$；

(3) $\frac{\pi+1}{1-\pi}$ 和 $-\frac{\pi+1}{2}$。

解 (1) $\because \left|-1\frac{3}{4}\right| = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4} = \frac{49}{28}$，

$\left|-\frac{12}{7}\right| = \frac{12}{7} = \frac{48}{28}$，而 $\frac{49}{28} > \frac{48}{28}$，

$\therefore -1\frac{3}{4} < -\frac{12}{7}$。

(2) $\because -|-\pi| = -\pi$，$-(-\pi) = \pi$，而 $-\pi < \pi$，

$\therefore -|-\pi| < -(-\pi)$。

(3) $\because \left|\frac{\pi+1}{1-\pi}\right| = \frac{\pi+1}{\pi-1} < 2$，$\left|-\frac{\pi+1}{2}\right| = \frac{\pi+1}{2} > 2$，

$\therefore \frac{\pi+1}{1-\pi} > -\frac{\pi+1}{2}$。

注 比较两个实数的大小有以下法则：正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。两个负数比较大小，首先要算出它们的绝对值，然后通过绝对值大小比较得出两个负数的大小比较。

例 3 计算：

(1) $-3\div\left[-5+\left(\frac{1}{2}-0.2\times\frac{1}{3}\right)\times 6\right]$；

(2) $\left[\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+(\sqrt{3}-1)^{0}\right]\times 4^{-\frac{1}{2}}$。

解 (1)
$$\begin{aligned}&-3\div\left[-5+\left(\frac{1}{2}-0.2\times\frac{1}{3}\right)\times 6\right]\\=&-3\div\left[-5+\left(\frac{1}{2}\times 6-0.2\times\frac{1}{3}\times 6\right)\right]\\=&-3\div[-5+(3-0.4)]\\=&-3\div(-2.4)\\=&1.25。\end{aligned}$$

注 进行有理四则混合运算时要特别注意运算顺序，遇到可以运用运算律计算时要注意加以应用。如对于 $\left(\frac{1}{2}-0.2\times\frac{1}{3}\right)\times 6$，应用乘法对加法的分配律就可以使计算简便。

(2)
$$\begin{aligned}&\left[\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+(\sqrt{3}-1)^{0}\right]\times 4^{-\frac{1}{2}}\\=&\left[\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+1\right]\times\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}\\=&\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}+1\right]\times\frac{1}{2}\\=&\left(\frac{9}{4}+1\right)\times\frac{1}{2}\\=&\frac{13}{4}\times\frac{1}{2}\\=&\frac{13}{8}。\end{aligned}$$

注 对负指数幂和分数指数幂在运算时应注意正确的转化以及有关幂的运算性质的合理运用。如 $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$。

例 4 计算：

(1) $[(a^3)^2\cdot(a^4)^3]\div(a^2)^7$；

(2) $(x^2+x-3)(x^2+x+3)$；

(3) $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$。

解 (1)
$$\begin{aligned}&[(a^3)^2\cdot(a^4)^3]\div(a^2)^7\\=&(a^6\cdot a^{12})\div a^{14}=a^4;\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x^2+x-3)(x^2+x+3)\\=&(x^2+x)^2-3^2\\=&x^4+2x^3+x^2-9;\end{aligned}$$

(3) $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=[(x+1)(x^2-x+1)][(x-1)(x^2+x+1)]$

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=x^6-1$。

注 整式的运算是初中代数运算的基础，虽然中考中直接考查整式运算的试题不多，但其运算的熟练程度和正确率对于数学学习和提高中考成绩仍是非常重要的，特别是乘法公式的灵活运用尤为重要。

例 5 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6}$；

(2) $(3\sqrt{5}+5\sqrt{3})(3\sqrt{3}-5\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\sqrt{48}+5\sqrt{135}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$；$(a>0,\ b>0)$。

解 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}-\sqrt{6}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4-3}-\sqrt{6}$

$=2\sqrt{2}$；

(2) $(3\sqrt{5}+5\sqrt{3})(3\sqrt{3}-5\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\sqrt{48}+5\sqrt{135}$

$=9\sqrt{15}-75+45-25\sqrt{15}+\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+4\sqrt{3}+15\sqrt{15}$

$=-16\sqrt{15}-30+\dfrac{5+3+2\sqrt{15}}{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{15}$

$=4\sqrt{3}-26$；

(3) 由 $a>0,\ b>0$ 可得 $a+b>0$，于是

$\sqrt{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+2ab}{ab}}-\sqrt{\dfrac{ab}{a^2}}-\sqrt{\dfrac{ab}{b^2}}$

$=\dfrac{a+b}{ab}\sqrt{ab}-\dfrac{1}{a}\sqrt{ab}-\dfrac{1}{b}\sqrt{ab}$

$=0$。

注 二次根式的加、减、乘法完全类似于整式运算，而除法则先转化为分数的形式，然后再分母有理化。

例 6 已知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$，求 $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ 的值。

解 $\because x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=-(2+\sqrt{3})$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

$\therefore x+y=-(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$，

$xy=-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-1$，

$\therefore \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}=\dfrac{(x+y)^2-xy}{x+y}=\dfrac{(-2\sqrt{3})^2+1}{-2\sqrt{3}}=\dfrac{13}{-2\sqrt{3}}=-\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$。

注 将代数式适当变形后再计算可减少运算量，特别是对于具有对称性的代数式的求值，先求出 $x+y$、xy 等代数式的值，可以提高运算的正确率。

例7 已知 $|a|=8$，$|b|=2$，$|a-b|=b-a$，求 $a+b$ 的值。

解 $\because |a|=8 \quad \therefore a=\pm 8$；

$\because |b|=2 \quad \therefore b=\pm 2$；

又 $\because |a-b|=b-a \quad \therefore b\geqslant a$。

因此，b 取 2，a 取 -8；或者 b 取 -2，a 取 -8。

当 $b=2$，$a=-8$ 时，$a+b=2+(-8)=-6$；

当 $b=-2$，$a=-8$ 时，$a+b=-2+(-8)=-10$。

注 应特别注意 $|a-b|=b-a$ 这个条件即 $b\geqslant a$，还需注意绝对值概念，即由 $|a|=8$ 得到 $a=\pm 8$，不要漏掉 -8。

例8 若 a、b 互为相反数，c、d 互为倒数，m 的绝对值为 2，则 $\dfrac{a+b}{a+b+c}+m^2-cd=$ ______。

解 $\because a$、b 互为相反数，$\therefore a+b=0$；

$\because c$、d 互为倒数，$\therefore cd=1$；

$\because |m|=2$，$\therefore m^2=|m|^2=4$。

故 原式 $=0+4-1=3$。

注 相反数、倒数是两个重要的概念，特别是考查两个互为相反数的和与两个互为倒数的积的问题，在近几年各省市的中考试题中经常出现。

例9 (1) 0.0930 精确到____分位，有____个有效数字；

(2) 将 92.598 四舍五入精确到百分位是________；

(3) 用科学记数法表示 -0.0000125 得__________。

解 (1) 0.0930 精确到万分位，有 3 个有效数字；

(2) 将 92.598 四舍五入精确到百分位是 92.60；

(3) 用科学记数法 -0.0000125 得 -1.25×10^{-5}。

注 近似数、有效数字和科学记数法等问题，在每年各地的中考试题中常以填空题的形式进行考查。所谓科学记数法就是把一个数表示成 $a\times 10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 是整数。

例10 分解因式：

(1) $ax-ay-x+y$；

(2) a^2-b^2-2b-1；

(3) $54(a+b)(a-b)^3-16(a+b)^4$；

(4) a^4-3a^2+2（在实数范围内）。

解 (1) $\quad ax-ay-x+y$

$=(ax-ay)-(x-y)$

$=a(x-y)-(x-y)$

$=(x-y)(a-1)$。

(2) $\quad a^2-b^2-2b-1$

$=a^2-(b^2+2b+1)$

$=a^2-(b+1)^2$

$=(a+b+1)(a-b-1)$。

(3) $\quad 54(a+b)(a-b)^3-16(a+b)^4$

$=2(a+b)[27(a-b)^3-8(a+b)^3]$

$=2(a+b)\{[3(a-b)]^3-[2(a+b)]^3\}$

$=2(a+b)[3(a-b)-2(a+b)][9(a-b)^2+6(a-b)(a+b)+4(a+b)^2]$

$=2(a+b)(a-5b)(19a^2-10ab+7b^2)$。

(4) $\quad a^4-3a^2+2$

$=(a^2-1)(a^2-2)$

$=(a-1)(a+1)(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$。

注 因式分解的主要方法有:提公因式法、运用公式法和分组分解法。提公因式法的关键是公因式的确定,若某一项恰为公因式,在提取时不要将剩下的因子"1"忘记;运用公式法时,关键是认准多项式是否符合公式,要特别注意公式的变形;运用分组分解法要注意分组后能使分解继续进行,或者有公因式可提取,或者可运用公式。此外,还应注意,因式分解时应一直分解到不能继续分解为止;而因式分解的结果与题目所规定的数集范围有关。例如,a^2-2 在有理数范围内不能再分解了,但在实数范围内还可以分解为 $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$。一般不作特殊说明,则默认为是在有理数范围内分解。

例 11 计算:

(1) $x^2+x+1-\dfrac{x^3}{x-1}$;

(2) $\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{2x}{a^2+x^2}-\dfrac{4x^3}{a^4+x^4}+\dfrac{8x^7}{x^8-a^8}$。

解 (1) $\quad x^2+x+1-\dfrac{x^3}{x-1}$

$=\dfrac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}-\dfrac{x^3}{x-1}$

$=\dfrac{x^3-1-x^3}{x-1}$

$=\dfrac{1}{1-x}$;

(2) $\quad \dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{2x}{a^2+x^2}-\dfrac{4x^3}{a^4+x^4}+\dfrac{8x^7}{x^8-a^8}$

$=\dfrac{2x}{a^2-x^2}-\dfrac{2x}{a^2+x^2}-\dfrac{4x^3}{a^4+x^4}+\dfrac{8x^7}{x^8-a^8}$

$=\dfrac{4x^3}{a^4-x^4}-\dfrac{4x^3}{a^4+x^4}+\dfrac{8x^7}{x^8-a^8}$

$$=\frac{8x^7}{a^8-x^8}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$$
$$=\frac{8x^7}{a^8-x^8}-\frac{8x^7}{a^8-x^8}=0。$$

注 题(1)中将 x^2+x+1 看作一个整体,有利于通分后运用公式简化计算。某些分式的化简或计算,如采用一次性通分常常比较复杂,可根据题目特征,或者逐项通分,或者分组通分,然后再计算,如题(2)采取的是逐项通分。

例 12 当 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$ 时,求分式 $\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值。

解一 $\because \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$, $\therefore x\neq 0,\ y\neq 0$。

$$\therefore \frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{\frac{2x}{xy}+\frac{3xy}{xy}-\frac{2y}{xy}}{\frac{x}{xy}-\frac{2xy}{xy}-\frac{y}{xy}}=\frac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}=\frac{3-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{-2-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$$
$$=\frac{3-2\times 3}{-2-3}=\frac{3}{5}。$$

解二 由 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$ 得 $\frac{y-x}{xy}=3$,即 $y-x=3xy$,

$$\therefore \frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\frac{2(-3xy)+3xy}{-3xy-2xy}=\frac{-6xy+3xy}{-5xy}=\frac{3}{5}。$$

例 13 如果一元二次方程 $x^2+3x-1=0$ 的两个实根分别为 α、β,求下列代数式的值。

(1) $\alpha^2+\beta^2$; (2) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$; (3) $|\alpha-\beta|$。

解 $\because$ α、β 是方程 $x^2+3x-1=0$ 的两个实根,

$$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha\beta=-1。\end{cases}$$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\times(-1)=9+2=11$;

(2) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3\beta^3}=\frac{(-3)\times[11-(-1)]}{(-1)^3}=36$;

(3) $\because |\alpha-\beta|^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=11-2\times(-1)=13$;

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{13}$。

注 在题(2)、(3)的计算中,直接运用了题(1)的结果 $\alpha^2+\beta^2=11$,因而使计算较为简便。

例 14 已知某校初三(1)班男生 30 人的数学平均成绩是 85 分,女生 20 人的数学平均成绩是 80 分,求这个班的数学平均成绩。

分析 班级的数学平均成绩,应该是该班男女生成绩的总和除以班级总人数。于是用加权平均数计算公式可得该班数学平均成绩。

解 由加权平均数计算公式得

$$\bar{x}=\frac{85\times 30+80\times 20}{30+20}=83(分)。$$

例 15 测得甲、乙两手表在一周内的日走时误差如下表所示:

甲表日走时误差(秒)	−2	−3	−1	0	2	1	3
乙表日走时误差(秒)	−1	4	10	−3	−3	−5	−2

(1) 分别计算甲、乙两表走时误差的平均值和标准差；

(2) 判断哪一个表走时比较准确？

解 (1) $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{7}[(-2)+(-3)+(-1)+0+2+1+3]=0$；

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{7}[(-1)+4+10+(-3)+(-3)+(-5)+(-2)]=0$；

$$S_{甲}^2=\frac{1}{7}[(-2-0)^2+(-3-0)^2+(-1-0)^2+(0-0)^2+(2-0)^2+(1-0)^2+(3-0)^2]=4(秒^2)；$$

$S_{甲}=\sqrt{4}=2(秒)$；

$$S_{乙}^2=\frac{1}{7}[(-1-0)^2+(4-0)^2+(10-0)^2+(-3-0)^2+(-3-0)^2+(-5-0)^2+(-2-0)^2]=\frac{164}{7}(秒^2)；$$

$S_{乙}=\sqrt{\frac{164}{7}}\approx 4.48(秒)$。

(2) 甲表走时比乙表准确。这是因为，虽然甲、乙两表的日走时误差的平均值都为零，但是甲表日走时误差的标准差比乙表日走时误差的标准差小。标准差小反映每天走时与平均值之间的偏离程度小，即比较稳定，所以甲表比乙表走时准确。

例 16 一个生产小组共有 15 名工人，每人每天生产的产品数是

5,6,6,6,7,7,7,8,8,8,8,9,9,9,10;

每日生产定额应规定多少比较好？

分析 如果生产定额规定太高，多数工人无法超额甚至无法完成指标，这样就会大大挫伤生产积极性。如果生产定额定得太低，又会造成劳动纪律松懈影响生产效率。因此，比较合理的生产定额应确定在恰好能使多数人有产可超的水平上。

解 上述数据已按大小顺序排列好，由 $\frac{15+1}{2}=8$ 可知，这些数据的中位数是第 8 个数据 8，于是我们选取中位数前面的一个数据 7 作为每日生产定额比较合理，这样定额可使多数工人能够超产。

例 17 某资本主义国家的一个工厂全体职工的月工资数及人数如下表：

月工资数(美元)	人　数	月工资数(美元)	人　数
10000	1(总经理)	900	18
8000	2(副总经理)	800	23
5000	2(经理)	700	5
2000	5	500	2
1000	12		

(1) 求该厂月工资的平均数。工厂主用这个平均数作为月工资的代表数，这是为什么？

(2) 求该厂月工资的众数。工会领导人用众数作为月工资的代表数，这是为什么？

(3) 求该厂月工资的中位数；税务员用中位数作为月工资的代表数，这是为什么？

解 (1) 用加权平均数计算公式得

$$
\begin{aligned}
& x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_9 f_9 \\
= {} & 10000 \times 1 + 8000 \times 2 + 5000 \times 2 + 2000 \times 5 + 1000 \times 12 + 900 \times 18 + 800 \times 23 + \\
& 700 \times 5 + 500 \times 2 \\
= {} & 97100;
\end{aligned}
$$

$$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_9 = 1+2+2+5+12+18+23+5+2 = 70;$$

$$\bar{x} = \frac{97100}{70} \approx 1387(\text{美元})。$$

工厂主为了说明该厂工资水平高，以便吸引更多的人来厂工作，因此用这个数作为月工资的代表数。

(2) 月工资的众数是 800 美元。因为拿 800 美元的人最多，最有代表性，工会领导人可用这个数说明工资水平低，代表职工要求工厂主增加工资。因此，工会领导人用众数作为月工资的代表数。

(3) 工厂共有 70 人，最中间的数是第 35 个数和第 36 个数，而这两个人的工资数都是 900 美元，所以月工资的中位数是 900 美元。因为税务员认为征收所得税时应当了解当时的税率对多数职工有利还是不利，因此用中位数作为月工资的代表数。

注 从这个例子可以看到，面对同样的一组数据，不同的人出于不同的目的，可以采用不同的方法，从而得出不同的结论。数学不应是抽象的枯燥无味的东西，数学里面蕴含着丰富的内容。资本主义国家常常将大资本家的收入和普通工人的收入放在一起算平均收入，表明该国人均收入很高。其实，大多数人的收入远远低于平均收入。在资本主义国家，用平均数的缺点来掩盖不平等的现象是屡见不鲜的。

【典型错解分析】

例 1 计算：$4.56-(-3)-5\frac{1}{4}+(-2)-\left(-5\frac{1}{4}\right)-5.56$。

错解 $4.56-(-3)-5\frac{1}{4}+(-2)-\left(-5\frac{1}{4}\right)-5.56$

$$
\begin{aligned}
&= 4.56+3-5\frac{1}{4}-2-5\frac{1}{4}-5.56 \\
&= (4.56-5.56)+(3-2)+\left(-5\frac{1}{4}-5\frac{1}{4}\right) \\
&= -1+1-10\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}。
\end{aligned}
$$

剖析 有理数加减混合运算中，正负号很容易搞错。本题错就错在 $-\left(-5\frac{1}{4}\right)$ 应为 $5\frac{1}{4}$，而不是 $-5\frac{1}{4}$。

正解 $4.56-(-3)-5\frac{1}{4}+(-2)-\left(-5\frac{1}{4}\right)-5.56$

$= 4.56 + 3 - 5\frac{1}{4} - 2 + 5\frac{1}{4} - 5.56$

$= (4.56 - 5.56) + (3 - 2) + \left(5\frac{1}{4} - 5\frac{1}{4}\right)$

$= -1 + 1 + 0 = 0$。

注 一般地，有理数加减混合运算应先写成代数和形式，然后根据数字特征，灵活运用加法交换律、结合律进行简便运算，有些数可以相互抵消，有些数可以合并成整数等等。如果式子中既有分数又有小数，计算时应统一化成小数或分数。总之，计算时应根据题目特点，灵活运用法则，尽量使计算简便。

例 2 计算：$(+8) \times (-136) \times \left(+\frac{1}{48}\right) \times \left(+\frac{1}{68}\right)$。

错解 $(+8) \times (-136) \times \left(+\frac{1}{48}\right) \times \left(+\frac{1}{68}\right) = -\frac{8 \times 136}{48 \times 68} = -\frac{1088}{3364}$。

剖析 有理数乘法运算中要注意恰当运用乘法运算的结合律与交换律，能约分的必须约分，这样不但可以减少运算量，而且可以提高正确率。错解由于在运算过程中没有运用这些技巧，使得分子、分母的数字比较大，并且分母运算出错。

正解 $(+8) \times (-136) \times \left(+\frac{1}{48}\right) \times \left(+\frac{1}{68}\right)$

$= -\left(8 \times \frac{1}{48}\right) \times \left(136 \times \frac{1}{68}\right) = -\frac{1}{6} \times 2 = -\frac{1}{3}$。

例 3 分解因式：$n + n^2 - n^3 - n^4$。

错解 $n + n^2 - n^3 - n^4$

$= (n + n^2) - (n^3 + n^4) = n(1 + n) - n^3(1 + n) = (1 + n)(n - n^3)$。

剖析 上面的错解错在没有分解到底。分解因式，必须进行到不能再分解为止，而多项式因式 $n - n^3$ 还能分解。

正解 $n + n^2 - n^3 - n^4$

$= n(1 + n - n^2 - n^3) = n[(1 + n) - (n^2 + n^3)]$

$= n[(1 + n) - n^2(1 + n)] = n(1 + n)(1 - n^2)$

$= n(1 + n)^2(1 - n)$。

例 4 分解因式：$x^2 - y^2 - 4xz + 4z^2$。

错解 $x^2 - y^2 - 4xz + 4z^2$

$= (x^2 - y^2) - (4xz - 4z^2) = (x + y)(x - y) - 4z(x - z)$。

剖析 所谓因式分解，是将一个多项式化为几个整式的积的形式，上述错解不符合因式分解的要求。错解的原因在于未能正确分组。分组分解法的关键是分组后的各组之间应该有公因式、或者能直接应用公式分解。错解似乎被项的系数特征和分组后各组还能分解所误导。

正解 $x^2 - y^2 - 4xz + 4z^2$

$= (x^2 - 4xz + 4z^2) - y^2 = (x - 2z)^2 - y^2$

$= (x - 2z + y)(x - 2z - y)$。

例 5 当 x 是怎样的实数时，代数式 $\sqrt{-|x - 1|}$ 在实数范围内有意义？

错解 $\because \sqrt{-|x - 1|}$ 有意义，$\therefore -|x - 1| > 0$，

$\therefore |x-1|<0$，$\therefore x<1$。

剖析 上述解答有两处出错。首先要知道，当 $-|x-1|\geqslant 0$ 时，$\sqrt{-|x-1|}$ 在实数范围内有意义，不应漏掉被开方数为零的情况；其次，对绝对值不等式的求解也有错误。

正解 为使 $\sqrt{-|x-1|}$ 在实数范围内有意义，必须 $-|x-1|\geqslant 0$，即 $|x-1|\leqslant 0$，而 $|x-1|\geqslant 0$，因此 $|x-1|=0$，即 $x=1$ 时，$\sqrt{-|x-1|}$ 有意义。

例 6 将 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 中根号外的因式 a 移到根号内。

错解 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}=\sqrt{-\frac{1}{a}\cdot a^2}=\sqrt{-a}$。

剖析 错解错在将 a 当做非负因式移到根号内。实际上，由 $-\frac{1}{a}>0$ 得 $a<0$；因此，应先将 a 变为 $-(-a)$，再将正因式 $-a$ 移到根号内。

正解 由二次根式的意义可知 $-\frac{1}{a}>0$，所以 $a<0$，因此

$$a\sqrt{-\frac{1}{a}}=-(-a)\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{-\frac{1}{a}(-a)^2}=-\sqrt{-a}。$$

例 7 化简 $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$。

错解 $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$

$=\sqrt{(x+1)+2\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1}$

$=\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$

$=\sqrt{x+1}+1+\sqrt{x+1}-1=2\sqrt{x+1}$。

剖析 $\sqrt{(\sqrt{x+1})+1)^2}=\sqrt{x+1}+1$ 是正确的，可是 $\sqrt{(\sqrt{x+1})-1)^2}=\sqrt{x+1}-1$ 就不一定正确了，需要对 x 的取值情况进行讨论。

正解 $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$

$=\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}$

$=\sqrt{x+1}+1+|\sqrt{x+1}-1|$

$=\begin{cases}2\sqrt{x+1} & (x\geqslant 0)\\ 2 & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$。

例 8 将 $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$ 分母有理化。

错解 $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

$=\frac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}$

$=\frac{x+y-2\sqrt{x^2-y^2}+x-y}{x+y-(x-y)}$

$=\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$。

剖析 错解产生的原因在于，在使用分式的基本性质 $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ 时，忽视了前提条件：分子、分母同乘的因式 $m\neq 0$。在上述解题中，分子、分母同乘的因式$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$有可能为零。

正解 当 $y\neq 0$ 时，$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\neq 0$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}&=\frac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}\\&=\cdots=\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y};\end{aligned}$$

当 $y=0$ 时，$x\neq 0$，于是

$$\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=0。$$

例 9 已知 $a^2+3a-7=0$，$b^2+3b-7=0$，求 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ 的值。

错解 由已知条件可知 a、b 是方程 $x^2+3x-7=0$ 的两个根，于是 $a+b=-3$，$ab=-7$，因此

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}&=\frac{a^3+b^3}{ab}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab}\\&=\frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]}{ab}\\&=\frac{(-3)\times[(-3)^2-3\times(-7)]}{-7}=12\frac{6}{7}。\end{aligned}$$

剖析 上述解法只有在 $a\neq b$ 时才是正确的，而题中并无 $a\neq b$ 这个条件。当 $a=b$ 时，可直接通过解方程求出根，从而求得代数式的值。因此解本题需进行分类讨论。

正解 当 $a\neq b$ 时，由已知条件可知 a、b 是方程 $x^2+3x-7=0$ 的两个根，所以 $a+b=-3$，$ab=-7$，于是

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]}{ab}=12\frac{6}{7};$$

当 $a=b$ 时，由 $a^2+3a-7=0$ 得 $a=\frac{-3\pm\sqrt{37}}{2}$；

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=2a=-3\pm\sqrt{37}$。

例 10 x 为何值时，分式 $\frac{4}{x^2+2x+1}$ 的值是正整数。

错解 要使分式 $\frac{4}{x^2+2x+1}$ 的值是正整数，只要它的分母的值为 1、2、4 即可。

当 $x^2+2x+1=1$ 时，求得 $x=0$，-2；

当 $x^2+2x+1=2$ 时，求得 $x=-1\pm\sqrt{2}$；

当 $x^2+2x+1=4$ 时，求得 $x=1$，-3。