泡利物理学讲义

6. 场量子化选题

田中一　译

人民教育出版社

内容简介

泡利物理学讲义是理论物理学的一套十分严谨、精练的经典教材. 现根据 MIT 出版社 1973 年出版的英译本 (Charles P. Enz 主编. S. Margulies 和 H. R. Lewis 合译的.Pauli Lectures on Physics)并参考德文原版翻译出版. 以供我国大学理工科师生参考.

本套讲义分六册出版, 内容分别为: 1. 电动力学. 2. 光学和电子论. 3. 热力学和气体分子运动论. 4. 统计力学. 5. 波动力学. 6. 场量子化选题.

本书中译本责任编辑: 曹建庭

泡利物理学讲义

6. 场量子化选题

田中一 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6 字数 145,000

1982 年 4 月第 1 版 1983 年 4 月第 1 次印刷

印数 00,001—13,500

书号 13012·0760 定价 0.56 元

前　　言

人们常说:科学方面的教科书很快会过时．可是泡利讲义,尽管其中一些是早在二十年以前讲授的,为什么现在还要出版呢?理由是简单的，因为泡利介绍物理学的方式一点也不过时．他的论量子力学基础的著名论文发表在1933年德国百科全书《物理学手册》中①．二十五年后，该文几乎未作改动地重新出现在新版本②中，而投给这部百科全书的大多数文稿却必须完全重写．出现这种惊人事实的原因就在于泡利的风格，在论文的透彻性和影响力方面，他的这种风格是与论文主题的伟大相称的．科学写作的风格是一种品质，这种品质当今正濒于消失．快速出版的压力是如此之大,以致人们把草率地写成的文章和书籍匆忙付印,而很少关心概念的细心阐述．目前，数学和仪器手段的技巧变得又复杂又困难,人们写作与学习上所花费的精力,大部分是用于获得这些技巧，而不是用于深入吃透重要概念．物理学的主要概念往往消失在数学论证的茂密丛林之中．这种情况并非一定如此．泡利讲义说明怎样才能够清晰地并用优美的数学形式把物理概念表达清楚,而不致被形式化的专门技巧所掩盖．

从宣讲技能来讲，泡利不是一个有才艺的演说家．人们跟上

---

① 这部《物理学手册》(*Handbuch der Physik*)是H. Geiger和K. Scheel主编的，泡利这篇论文《*Die allgemeinen Principien der Wellemechanlk*》曾载入该手册第二版,第二十四卷,第一分册(1933)——中译者注．

② 泡利这篇论文的新版本载入S. Flügge 主编的《*Handbuch der Physik* (*Encyclopedia of Physics*)》第五卷,第一分册(1958)——中译者注．

他的课程往往是不容易的．但是，当他的思想脉络和他的逻辑结构变得明显时，注意听讲的追随者就会对主要概念留下一个新的更深刻的理解，并对精美的推理结构留下一个更透彻的领悟，这个精美的推理结构就是理论物理．这套讲课笔记不是他本人而是他的一些同事写的，这一事实，并不降低它们的价值．在其概念结构和数学严谨上，它们体现了大师的特点．只是间或在某些地方人们确实没见到大师的一些词语和说明．除了场的量子化那些讲义，人们对他的讲义并无过时之感，在场的量子化讲义中，有些概念的表达方式，今天对有些人说，也许显得陈旧．尽管如此，由于这些讲义的简洁性和直截了当地逼近中心问题，它们对现代的学生来说该是有益的．

愿本卷作为一个范例，说明创造理论物理学的伟人之一，是怎样表达和讲授理论物理学概念的．

维克托 F. 外斯科夫

于麻省　坎布里奇市

编 者 序

"场量子化"①(本讲义德文原本书名)自从发表以来，已成为场论文献中广泛使用的资料. 泡利于1950—51年间在苏黎士瑞士联邦理工学院②讲授的课程，是采取研究班讨论的方式,泡利在研究班中评论了当时人们感兴趣的问题. 在这方面，这本讲义和本丛书其他几卷不同,采取了比较常规的向研究生讲授的方式.

评论的特点也反映在M.沙夫罗(泡利当时的助教，已故)的讲稿文体中，讲稿的合编者是U.豪赫史特拉(现为瑞士政府科学问题代表). 讲义的文体,不仅具有泡利对这本讲义所取的讲授方式的特征,也反映了沙夫罗个人讨论物理学的方式. 事实上,在本丛书统计力学讲义中,也明显地显示这种要言不烦的文体,统计力学也是从沙夫罗讲稿翻译过来的.

当然,自从"场量子化"发表以来，场论已有了很大的发展,现代场论的公理化方法已经采用了很不相同的数学语言，并且达到了严格程度，没有这些就不可能得到现知的精确结果. 为了与这些新近发展取得衔接,我请K.亥普在附录中注释了不依靠微扰论的重正化问题的现状,在此我感谢他在专业方面所给予的帮助.

虽然基本粒子物理学有了许多新发现，但除了使问题变得更加复杂之外,物理问题却没有根本改变. 因此,泡利在"场量子化"中关于这个问题的评论至今仍然是有本质意义的. 此外，这本讲

① Feldquantisierung.

② ETH.

义是量子电动力学辉煌时代的一份历史资料，它的意义好比这个时代是以朝永振一郎、许温格、费因曼和戴逊等人的名字为象征一样. 为此，我补充了“场量子化”中所有提到的原著在已公开发表文献中的确切出处，在这工作中，我愉快地得到F.戴逊的鼓励，同时感谢与R.格劳伯有益的通信.

英译本的出版不是一件容易的事，应该专门提一下翻译者的工作. 在有些地方，为了提高精确性，我敢于背离原著，但在作点小改动不能做到的地方，则在附录中加以注释. 在这工作以及消除错误的工作中，B. 西蒙(当时是A. 外脱曼的研究生，现在是著名的场论学家)的注释是大有帮助的.

如果这本讲义成为现代研究场论的大学生和研究人员感兴趣的书，则谨以此纪念W. 泡利.

查理 P. 安兹

日内瓦 1971 年 10 月 27 日

目　　录

第一章　电子-正电子场的量子化

§1. 海森伯表象和相互作用表象[A－1]①

只要期待值保持正确的时间相关性：

$$\langle A\rangle=\sum_{nm}(\Psi_n^* A_{nm}\Psi_m), \qquad [1.1]$$

我们就能够完全任意地选择算符和本征函数对时间的相关性.

1. 海森伯表象

状态矢Ψ与时间无关，A满足有相互作用的场方程式. 例如，对于电磁势，$A\to\Phi_\mu$，

$$\Box\Phi_\mu=-j^\mu. \qquad [1.2]$$

2. 相互作用表象

这里Ψ与时间有关，而且使得与时间有关的A满足无相互作用的场方程式. 例如，

$$\Box\Phi_\mu=0. \qquad [1.3]$$

当无相互作用时，这两种表象是相同的. 例如，若相互作用是：

$$H=-j^\mu\Phi_\mu,\quad j^\mu\propto e,\quad e\ll 1,$$

可以展开

$$\Psi=\Psi_0+e\Psi_1+\cdots,$$

其中Ψ_0与时间无关，$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \cdots$与时间有关.

注：1. 所有这些对普通量子力学是正确的，对量子场论也是正确的.

2. 如果总能量是对角的，则在海森伯表象中

① [A－1]—[A－8]见附录

$$A_{nm}(t)=A_{nm}(0)\cdot\exp[i(E_n-E_m)t],$$

且Ψ与时间无关.

3. 薛定谔表象

这里选择A与时间无关,而相应地,

$$\Psi_n(t)=\Psi(0)\cdot\exp[iE_nt], \qquad [1.4]$$

(若总能量是对角的).

§2. 谐振子的量子化

哈密顿量是

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{p'^2}{m}+m\omega^2q'^2\right).$$

令

$$\frac{p'}{\sqrt{m}}=p, \qquad q'\cdot\sqrt{m}=q$$

(正则变换;p,q是厄密量). 则,

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2), \qquad [2.1]$$

$$i[p,q]=1. \qquad [2.2]$$

我们引入

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(p-i\omega q)\\ a^*&=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(p+i\omega q)\end{aligned}\right\}, \qquad [2.3]$$

所以

$$[a,a^*]=1. \qquad [2.4]$$

于是

$$H=\frac{\omega}{2}(aa^*+a^*a)=\omega\left(a^*a+\frac{1}{2}[a,a^*]\right). \qquad [2.5]$$

$\frac{1}{2}[a, a^*]=\frac{1}{2}$这一项是零点能．量 a^*a 有整数本征值：

$$a^*a=N \qquad (N=0, 1, 2, \cdots), \tag{2.6}$$

这是从 p、q 的厄密性要求得出的．在N为对角的矩阵表象中

$$\left.\begin{aligned}
a&=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\\
a^*&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\\
N&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}. \tag{2.7}$$

令Ψ是变数N的函数：$\Psi=\Psi(N)$，则 a 的意义如下：

a^* 是产生(发射)算符，因为

$$a^*\Psi(N)=\sqrt{N+1}\,\Psi(N+1);$$

a 是湮没(吸收)算符，因为

$$a\Psi(N)=\sqrt{N}\,\Psi(N-1). \tag{2.8}$$

最低能量状态是 $N=0$ 态，所谓“真空”．则

$$
\left.\begin{array}{ll} a^*\Psi(0)=\Psi(1), & a\Psi(0)=0 \\ \langle a^*a\rangle_0=0, & \langle aa^*\rangle_0=1 \end{array}\right\}. \qquad [2.9]
$$

这里占有数N是任意的；因此这种量子化对应玻色-爱因斯坦统计．对于费密统计存在相应的关系(满足不相容原理)．

如果我们在形式上引入

$$
\left.\begin{array}{l} \{a, a^*\}\equiv aa^*+a^*a=1, \\ a^2=0, \quad a^{*2}=0, \end{array}\right\} \qquad [2.10]
$$

则得到解：

$$
a=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad [2.11]
$$

而且，若令

$$
N\equiv a^*a=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [2.12]
$$

则

$$
1-N=aa^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
N(1-N)=0 \qquad [2.13]
$$

这正好对应不相容原理．应该指出，与玻色-爱因斯坦统计不同，在费密统计中，a与a^*之间以及N与$1-N$之间都分别完全对称．

§3. 自旋等于$\frac{1}{2}$的粒子的二次量子化

a. 自旋等于零的粒子的非相对论表述

我们用本征函数的全集展开：

$$
\psi(x, t)=\sum_r a_r \exp[i(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x}_r-k_r^0 t)], \qquad [3.1]
$$

而且要求不同模式的振幅对易，并要求每种模式的行为类似谐

振子:

$$[a_r, a_s]=[a_r^*, a_s^*]=0;\ [a_r, a_s^*]=\delta_{rs}. \qquad [3.2]$$

如果我们想象整个系统封闭在各边长为L的盒G中,则

$$k_r^i=\frac{2\pi}{L}s^i, \qquad i=1, 2, 3, \qquad \text{其中 } s^i \text{ 是整数} \qquad [3.3]$$

如果系统不封闭在上述盒中,则可以要求周期性边界条件:

$$\psi(x^1+L, x^2, x^3; t)=\gamma\cdot\psi(x^1, x^2, x^3; t); \qquad |\gamma|^2=1. \qquad [3.4]$$

而结果相同. 完全性关系要求:

$$\int_G \psi^*\psi \mathrm{d}^3x=\sum_r a_r^* a_r=\sum_r N_r. \qquad [3.5]$$

b. 相对论表述

这里出现特有的复杂化, 其原因在于所有简单场方程式都既包含负频率的解,又包含正频率的解.

让我们具体地考虑狄拉克方程:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\delta_{\mu\nu}, \qquad [3.6]$$

$$\left(\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+m\right)\psi=0. \qquad [3.7]$$

正如大家所熟知的,这方程也导致具有正频率和负频率的解.

我们用本征函数的全集将ψ展开:

$$\psi_\rho=\sum_r A_r u_\rho^{(r)}(x), \qquad [3.8]$$

其中x是四维矢量($x^0=t$, $x^4=it$),且按下式

$$\int\sum_\rho u_\rho^{*(r)} u_\rho^{(s)}\mathrm{d}^3x=\delta_{rs} \qquad [3.9]$$

对$u_\rho^{(r)}$归一化. 这是可能的, 因为从方程[3.7]得出的电流守恒定律保证方程[3.9]中的积分不随时间而变. 证明如下:考虑伴随方程(其中箭号表示微分作用在左边),

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)=0, \qquad [3.10]$$

用 $\bar{\psi}$ 乘[3.7]和[3.10]乘 ψ, 相加, 得:

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}+m\right)\psi+\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)\psi=0.$$

于是我们得到

$$\frac{\partial j^{\nu}}{\partial x^{\nu}}=0, \qquad [3.11]$$

其中(有任意常数 C)

$$j^{\nu}=C\cdot\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi. \qquad [3.12]$$

由此得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\int j^{0}\mathrm{d}^{3}x=0. \qquad \text{证毕.}$$

关于伴随方程应注意的是: γ^{ν} 必须是厄密量; 即,

$$\gamma^{\nu *}=\gamma^{\nu T}, \quad (\gamma^{\nu T})_{\alpha\beta}\equiv(\gamma^{\nu})_{\beta\alpha}. \qquad [3.13]$$

这里, γ^{ν} 的厄密性在具有虚时坐标的 x^1, x^2, x^3, x^4 中将是正确的. 因为四个坐标不全是实数, 当建立方程[3.7]的复数共轭时, 具有 x^4 的项的符号必须改变:

$$-\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{4}}\gamma^{4}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{k}}\gamma^{k}+m\psi^{*}=0. \qquad [3.14]$$

如果用 γ^4 从右边乘方程[3.14], 则因 $\gamma^4\gamma^k=-\gamma^k\gamma^4$, 且

$$\psi^{*}\gamma^{4}\equiv\bar{\psi}, \qquad [3.15]$$

于是由[3.14]得:

$$\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\nu}}-m\right)=0.$$

而且

$$j^4 = C(\overline{\psi}\gamma^4\psi) = C(\psi^*\psi) = ij^0.$$

因为 j^0 必定是电荷密度，所以取 $C = ie$，这样，

$$j^\nu = ie(\overline{\psi}\gamma^\nu\psi). \qquad [3.16]$$

现在我们对振幅进行量子化，凭实验确知电子满足不相容原理（这也有理论根据①），所以我们将按照 § 2 末所给出的图式进行量子化．这个方案（由约旦和维格纳提出②）是非常有用的，虽然它的物理意义看来似乎是模糊的：振幅表达式的符号取决于简正模的计数．

为此按下列展开：

$$\left.\begin{aligned} \psi_\rho &= \sum_r A_r u_\rho^{(r)}(x) \\ \psi_\rho^* &= \sum_r A_r^+ u_\rho^{(r)*}(x) \\ \overline{\psi}_\rho &= \sum_r A_r^+ \overline{u}_\rho^{(r)}(x) \end{aligned}\right\}, \qquad [3.17]$$

而且为了量子化，要求

$$\left.\begin{aligned} &\{A_r, A_s^+\} \equiv A_r A_s^+ + A_s^+ A_r = \delta_{rs} \\ &\{A_r, A_s\} = \{A_r^+, A_s^+\} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [3.18]$$

因为体系的完全性，

$$\int j^0 \mathrm{d}^3x = e\sum_r A_r^+ A_r. \qquad [3.19]$$

如果我们把 $A_r^+A_r$ 解释为在状态 $u^{(r)}$ 中的粒子数 N_r，则 $\int j^0\mathrm{d}^3x/e$ 始终是正的，因此我们得到一个只有正粒子数的理论．将状态分为具有正频率的状态和具有负频率的状态，我们也能建立

① W. PAULI, *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203(1941).

② P. JORDAN and E. P. WIGNER, *Z. Physik* **45**, 751(1928).

一个描述电子和正电子的理论(见 § 4).

首先我们推广完全性关系式. 在非相对论形式中, 此关系式是:

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) u_\beta^{(r)*}(\boldsymbol{x}', t) = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \qquad [3.20]$$

但是我们能够不作等时假设, 若令$(\boldsymbol{x}, t)\equiv x$, 且以 γ^4 乘[3.20], 则得:

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(x)\bar{u}_\beta^{(r)}(x') = -iS_{\alpha\beta}(x-x'). \qquad [3.21]$$

这里S由下列性质确定:

$$S_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', 0) = i(\gamma^4)_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \qquad [3.22]$$

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)S=0, \qquad S\left(\gamma\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x'}-m\right)=0. \qquad [3.23]$$

就是说, S 是狄拉克方程的解, 当 $t=0$ 时, S 成为 $i\gamma^4\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, 因为狄拉克方程是一阶的, 所以这足够唯一确定 S. 确定S可简化为解二阶微分方程. 因为

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+m\right)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\equiv\Box-m^2,$$

如果 $\Delta(x)$定义为

$$\left.\begin{array}{l}(\Box-m^2)\Delta(x)=0 \\ \Delta(\boldsymbol{x}, 0)=0 \\ \left(\dfrac{\partial\Delta}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{x}, 0}=-\delta^3(\boldsymbol{x})\end{array}\right\}, \qquad [3.24]$$

则

$$S(x)=\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}-m\right)\Delta(x). \qquad [3.25]$$

从方程[3.21]定义的 $S(x)$, 并根据方程[3.17]和[3.18], 立即得到:

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')\}=-iS_{\alpha\beta}(x-x').\qquad[3.26]$$

§4. 能量的正负；空穴理论

$$E_{rr}=i\int u^{(r)*}\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\mathrm{d}^3x\qquad[4.1]$$

是时间上的常量，其原因恰好和电荷的原因相同，这就是说，

$$E_{rs}=-\int\bar{u}^{(r)}\gamma^4\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x^4}\mathrm{d}^3x=\int\bar{u}^{(r)}\left(\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}+m\right)u^{(s)}\mathrm{d}^3x,$$

它的对角元素是常量．我们选择 $u^{(r)}$使 E_{rs} 是对角的：

$$E_{rs}=\delta_{rs}\cdot\omega_r\cdot\varepsilon_r;\quad \omega_r>0,\quad \varepsilon_r=\pm1\qquad[4.2]$$

对于每一个 $\varepsilon_r>0$ 的解，都存在一个 $\varepsilon_r<0$ 的解，ε_r 将状态按正、负能量分类．例如，对于平面波，

$$\varepsilon_r=+1:\qquad u^{(r)}=C^{(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\exp[i(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x}-\omega_r t)],$$

$$\varepsilon_r=-1:\qquad u^{(r)}=C^{(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\exp[i(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x}+\omega_r t)].$$

一般地说，任何依赖于时间的正规函数 $\psi(t)$（在无限远处充分快地变为零），都能用傅里叶分解分成一正频率部分和一负频率部分．这也可以不用傅里叶分解，而用下述方法完成．我们定义：

$$\left.\begin{aligned}\psi^+(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}\psi(t-\varepsilon\tau)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\\ \psi^-(t)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}\psi(t-\varepsilon\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\end{aligned}\ (\varepsilon>0)\right\}.\qquad[4.3]$$

其根据如下：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}\exp[-i\omega(t-\varepsilon\tau)]\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$$

$$=\frac{\exp[-i\omega t]}{2\pi i}\int_{C_+}\exp[i\omega\varepsilon\tau]\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}.$$

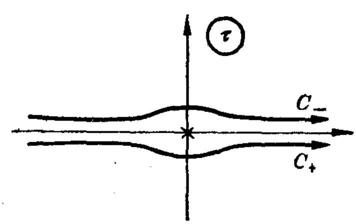

图 4.1