

有限单元法 在地热研究中的应用

张菊明 熊亮萍 著

科学出版社

有限单元法 在地热研究中的应用

张菊明 熊亮萍 著

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书主要包括：有限单元法的基本原理、有限单元法在地热研究中的应用以及有限单元法的 FORTRAN 程序(包括自动绘图程序)，并附有部分研究成果的实例，详细说明了地热 FORTRAN 程序的使用方法。该书为地热的应用基础研究、地热能的开发利用和油田地热研究方面的数值计算和电子计算机技术的推广提供理论知识和具体方法。

本书可供地球物理、地质和水文地质科技工作者以及高等院校有关专业师生参考。

有限单元法在地热研究中的应用

张菊明 熊亮萍 著

责任编辑 周文辅

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 11 月 第 一 版 开本：787×1092 1/16

1986 年 11 月 第一次印刷 印张：9

印数：0001—1,400 字数：205,000

统一书号：13031·3338

本社书号：5131·13—14

定价：2.15 元

序 言

地热研究在现代地球科学中占有重要位置。在地表所观测到的大地热流量不单是地球内热在地球表面最为直接的显示,而且能给出许多发生于地球内部各种作用过程间能量平衡的深部信息。大地热流和地温场的数学模拟在地热研究工作中是一项不可忽视的研究手段。这是因为截至目前为止,陆地上大地热流值的测定和区域地温场的研究的主要方法仍是在钻孔中进行地温测量。但在地壳浅部钻孔中所测量的温度往往受地表气温变化、地形起伏和岩层构造形态等各种因素的影响,必须进行各项校正之后,方能取得具代表性的可信热流值以正确评价区域地温场。过去采用热传导方程的解析方法提出了许多有关的计算公式,它们只适用于简单的条件,大部分情况下都假设地层是均质各向同性,因而限制了它们的应用范围。对于地形和地质条件复杂的地区,用解析法求解就十分困难,即使得到了解析表达式,要进行计算也是比较麻烦的。

目前数值法的广泛应用,为研究较为复杂的地热问题开辟了新的途径,它可以定量评价上述各种因素对区域地温场的影响程度,并进行热流校正。数值法和电子计算机结合起来可以解决很多难以解决的复杂问题。尽管数值法本身是一种求近似解的方法,但是由于能够模拟实际的地形、地质条件,所以相对于精确解来说,它更能满足实际工作的需要。

求解热传导方程常用的数值法有有限差分法和有限单元法。有限差分法和有限单元法各有优缺点,都可以用来研究地热工作中的许多问题。A. H. Lachenbruch, R. D. Hyndman, E. Mundry 和 Seliy 等曾用数值法计算了基底构造形态、高温岩浆侵入体等因素对区域地温场的影响,以及对热流进行地形校正。1980年美国加州大学河边分校李典常博士利用自动形成网格的有限单元计算程序计算了区域构造形态、高温岩浆侵入和地形变化对区域地温场影响的简单几何模型。

几年来,我们结合华北和西藏地区地热研究工作,参考李典常博士所编写的有限单元法计算程序,编制了供地热研究的有限元程序,该程序与李氏程序比较有以下优越性:

1. 研究区域的上下边界都可以是任意曲线,即用 x 的函数来描述;
2. 按第二类边界条件计算时,下边界的热流值可以是 x 的函数,只需在下边界的 $n + 1$ 个节点上给出相应的热流值;
3. 异常区的判断准则是根据通过重心的垂线与异常区边界的交点数,因此每个异常区不限于用凸多边形近似它,而可以采用任意多边形,从而大大节省了计算时间和准备工作量;
4. 可以模拟水平和垂直方向的强迫对流,及任意几何形状的高温(或低温)和高热流(或低热流)异常区;
5. 配有自动绘图程序,可以用连续曲线绘制研究区的温度等值线图 and 不同深度上的热流、地温梯度分布图,并能显示主要断裂和地层的界面。
6. 对同类模型(传导、对流)可同时计算多组模型。

大地热流在地壳内的传递过程是一个复杂的物理过程,它与地壳的结构和物质成分有着密切关系。因此要定量描述这种热传递过程,必须了解地壳中不同岩层的热物理性质,也就是岩石的热导率、比热、热容量、热扩散系数以及放射性元素的生热率。由于构造运动及岩浆活动,使地壳产生形变,发生褶皱和断裂,形成隆起和拗陷、地垒或地堑、背斜或向斜等各种正向构造和负向构造,从而使地壳中的各种热物理参数随坐标位置而变化。根据具体地质条件所建立的模型,采用有限单元法计算程序,可以模拟计算构造形态对区域地温场影响的程度。

在地壳浅部地下水分布甚广,它易于流动,而且有很大的热容量,是影响区域地温场的一个重要因素。由于地下水的存在,在地壳浅部热传递的主要形式除热传导外,同时还通过地下水进行热对流传导,其影响程度直接受流体在介质中运动速度的控制。在地下水活动强烈的地段,如补给区和热水通道附近,对流将成为热传递的主要形式。通过数学模拟可以定量评价地下水对流对区域地温场的影响程度。

在地壳内部有高温岩浆侵入时,岩浆体本身所具有的大量热能逐渐传递给周围的岩层,它对现代地温场影响的程度决定于岩浆体侵入的年代、岩浆侵入体的几何形态、规模及产状。近期的岩浆侵入活动是形成地壳浅部局部高温热异常的主要原因,它与周围岩体的热传递过程是非稳定传导过程,随着时间过程的推移,侵入体与周围岩体温度达到平衡,使非稳定温度场逐渐趋于稳定温度场。有限单元法可以模拟这种高温侵入体对地壳浅部温度场影响的程度以及非稳定的过程。

在地表受到沉积或侵蚀作用而形成各种正向地形和负向地形时,地表形态直接影响地壳浅部的地温场。大地热流在地壳内部传递过程中由地形高处向低处集中,因此对所测热流值必须进行地形校正;当一个地区沉积或侵蚀作用正在进行时,地温场更显示其复杂的非稳定特征。有限单元法不仅可以对热流值进行地形校正,而且还可以定量预测其整个发展过程中地温场的变化。

从上面简短的叙述可以看出,数学模拟在地热研究中不单是一个十分有用的工具,而且也是一项具有重要意义的工作。它可以帮助地热工作者分析各种因素对区域地温场的影响,从而对地壳浅部的局部热异常区的成因进行深入的探讨,为地热资源的开发利用提供依据。

本书的目的在于介绍有限单元法的基本原理和方法,并详细说明了用有限单元法研究区域构造形态、地下水强迫对流、地层中放射性元素生热量、地形起伏、岩浆余热、沉积与侵蚀作用、地表温度变化等各种因素对区域热流和地温场影响的方法和步骤,并附有我所近几年来在这方面的主要研究成果。书中还包括适用于地热研究的自动形成网格的有限单元法的 FORTRAN 程序,以及自动整理计算结果的绘图程序。

由于本研究课题及程序编制工作在 1983 年已基本完成。其中程序使用的参数是按旧计量单位输入的。现根据中华人民共和国法定计量单位,我们将旧计量单位与法定计量单位的换算关系列于表 1.1 中,以便读者在应用此程序时将输入参数换算成法定计量单位。

武汉地质学院北京研究生部许涓铭副教授对本书作了详细审阅,并提出了许多宝贵的意见,在此我们表示衷心地感谢。

作者 1985.7.

目 录

序言

第一章 地壳中的热传递过程	1
一、纯传导的热传递方程	1
二、传导和对流共存时的热传递方程	3
第二章 热传递过程的有限元分析	8
第三章 有限元方法计算步骤	15
一、有限单元网格的划分	15
二、异常区的实现	17
三、边界条件的确定	19
四、非稳定温度场和稳定温度场的计算	19
五、大地热流及地温梯度的计算	22
六、总体联立方程的组装和求解	23
七、计算结果的图形输出	31
八、原始数据的给定	36
第四章 用有限单元法研究区域地温场和进行热流值校正的方法	40
一、用有限单元法研究地壳浅部热流的折射与再分配	40
二、用有限单元法模拟计算区域构造形态对地温场的影响	46
三、用有限单元法模拟计算地下水对流对地温场的影响	56
四、用有限单元法模拟计算地层中放射性元素生热量对区域地温场的影响	61
五、用有限单元法对区域地表热流值进行地形校正	63
六、用有限单元法计算岩浆活动对区域地温场的影响	66
七、用有限单元法计算地表侵蚀(剥蚀)和沉积对区域热流值的影响	71
八、用有限单元法计算地表温度变化对区域地温场的影响	75
九、用有限单元法研究多种因素综合作用对地壳浅部温度场和热流值的影响	76
第五章 地温场有限元计算程序	89
一、主程序 DIRE PROGRAM	89
二、子程序 COORD (ICOL, JROW, NSORT)	95
三、子程序 HDF (II, JJ, KK, NA, NB, NC, NEGA)	99
四、子程序 BC1	102
五、子程序 BC2	104
六、子程序 BC12	105
七、子程序 SOLU	109
八、子程序 LISTP (F, M, B, N)	112
九、子程序 FLUX	113
十、子程序 BOUND	115
十一、子程序 DATA	118
十二、子程序 CONT	123

十三、子程序 WF (I9, J9, IS0, I0, J0, IJ, W, NLINE, H1, N)	127
十四、子程序 FY	130
十五、子程序 FZ (I0, J0, IS1).....	132
十六、子程序 TK (Y1, Y2, Y3, X1, X2, E, F, G)	133
十七、子程序 SMO (N, X, Y, M, IT0).....	133
十八、子程序 WL (IT, H, X1, Y0)	135
十九、子程序 NUM(Z, H, X0, Y0, N, K1).....	136
结束语.....	136
参考文献.....	137

第一章 地壳中的热传递过程

热传递是一种复杂的热物理过程。在具体研究地壳中的热传递时，我们以地壳的结构体作为温度传递介质。因而地壳结构体的热物理性质将是控制地壳中温度场分布的一个主要因素。

一般情况下温度 T 在温度介质中的分布可以看作空间坐标位置 x, y, z 和时间过程 t 的函数，即

$$T = T(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

在地壳内部这种温度场的空间分布称为地热温度场。在特定情况下，当温度 T 只与空间坐标 x, y, z 有关而与时间过程 t 无关时，即 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ 时，把这种不随时间变化的温度场称为稳定温度场。随时间变化的温度场则称为非稳定温度场。从空间分布来说，温度场又可以分为一维温度场、二维温度场和三维温度场；一维温度场在空间上仅与其中一个坐标方向有关，二维温度场和三维温度场在空间上分别与其中二个坐标方向和三个坐标方向有关。无论是一维温度场、二维温度场或三维温度场，它们都分别有稳定温度场和非稳定温度场之分。一维温度场和二维温度场只是三维温度场的特例，而稳定温度场又是非稳定温度场的特殊情况。

在一个温度连续分布的介质体内部，介质空间某点 (x, y, z) 上在时间 t 时的温度梯度可以表示为

$$\text{grad} T(x, y, z, t) = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.2)$$

根据傅里叶定律，相应点上通过单位截面积的热流量（热流强度） $\vec{q}$ 为

$$\begin{aligned} \vec{q}(x, y, z, t) &= -k \cdot \text{grad} T \\ &= -k \left(\vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中， k 为介质的热导率。

由于温度梯度式 (1.2) 是一个矢量函数，所以温度介质体内的热流量 $\vec{q}$ 也是一个矢量函数。式 (1.3) 表明，介质体内的热流量将沿着温度降低的方向运移。热流量 $\vec{q}$ 表示介质体内部在 (x, y, z) 处单位时间内通过单位面积所传递的热量（截面积垂直于热流传递的方向）。

一、纯传导的热传递方程

为揭示由纯传导引起的热传递过程，在温度连续分布的介质体内截取出一个单元体来进行分析。假定该单元体位于介质空间 $x, x + dx; y, y + dy; z, z + dz$ 之间，如图 1.1 所示。

先考虑位于 $x, x + dx$ 上两个垂直于 x 坐标轴的截面积与其邻域之间由传导引起的热量交换。在该两个截面上沿 x 坐标轴方向的热流量分别为 q_x 和 q_{x+dx} 。假定截取的单

元体在 x, y 和 z 方向上的边长 dx, dy 和 dz 足够小, 则 q_x 和 q_{x+dx} 就可以用下述公式来近似表示:

$$\begin{aligned} q_x &= \vec{q}(x, y, z, t) \cdot \vec{i} \\ &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\ &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (1.5)$$

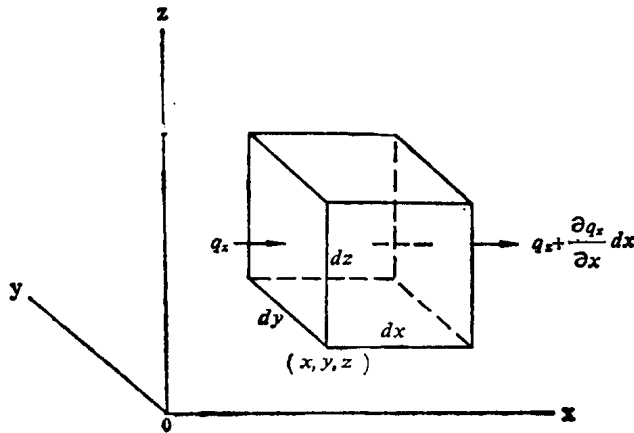


图 1.1 单元介质中热传导示意图

单元体内由于沿 x 坐标轴方向热流量的变化而引起在 dt 时间内流入

单元体的热量与流出单元体的热量不相等。其流入的热量为

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz dt$$

流出的热量为

$$\left(-k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right) dy dz dt$$

由流入量减去流出量所得的差值为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz dt$$

它表示在 dt 时间内通过 x 和 $x + dx$ 上两个垂直于 x 坐标轴的单元体截面积的不同热流量引起该单元体内部热量的变化。同理, 可以求出在 dt 时间内通过 y 和 $y + dy$ 及 z 和 $z + dz$, 分别垂直于 y 坐标轴和 z 坐标轴的两组单元体截面积的不同热流量引起该单元体热量的变化。它们分别为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz dt \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz dt \end{aligned}$$

这些热量变化的总和将使得所考虑的单元体在 dt 时间内温度变化 dT 。假定单元体内介质的热容量为 μ , 则由于单元体的体积为 $dx dy dz$, 使单元体温度变化 dT 需要的热量为 $\mu \cdot dx dy dz dT$ 。根据热平衡原理, 它应当等于上述热量变化的总和, 由此即可得到纯热传导的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.6)$$

上式是在温度介质体内部并无热源(或汇)存在的情况下推导得到的。当介质体内部有热量生成时, 例如存在放射性物质时由于放射性元素蜕变所获得的热能, 假定其强度为 $Q(x, y, z, t)$, 则式 (1.6) 左端项还应加上此一项以保持单元体内部热量平衡。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \mu \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.7)$$

式(1.7)统称为热传导方程。它反映温度介质体由于传导和热源作用引起介质体温度的变化。

二、传导和对流共存时的热传递方程

地壳内部的热传递过程往往不能单用热传导来描述。例如由于地下水的存在,它们在地壳内部通过透水层、裂隙和断层等在这些透水介质体内部不断地运动着,以及从地壳深部侵入的熔岩流,它们都在运动过程中不断地与周围岩体产生热量交换,并且这些流体本身各部位又在不断发生位移而引起热量的传递,因而热对流传递是由地下水等运动着的介质体所引起的热量传递过程。它是流体所特有的一种热传递现象。弄清热对流的传递过程对研究区域大地热流及地温场具有重要意义,近年来已引起许多地热研究工作者的重视。尤其对于那些受对流因素所控制的地热区域,在热传递研究中若忽略了对流作用,将会引起严重误差。

从对流的成因来分析,热对流又可以分为自由对流(自由运动)和强迫对流(强迫运动)两类。流体由于热胀冷缩造成的自身密度差异而引起沉浮所产生的对流称为自由对流;流体受外力作用而造成压力差异所产生的定向运动称为强迫对流。当考虑自由对流时,造成热传递过程求解困难的因素是流体的速度 $\vec{v}$ 。因为自由对流引起流速 $\vec{v}$ 的流动力是不同部位受热流体的密度和粘滞度差异所造成的,而流体的密度和粘滞度又是介质温度的函数。因而必须同时联立求解介质体内部的流体速度 $\vec{v}$ 和介质体温度场 T 。强迫对流引起流体速度 $\vec{v}$ 的流动力则是作用在流体上的外界压力差异,因而流体速度 $\vec{v}$ 不依赖于介质体的温度场 T 。从运动学的观点看可以在热传递方程中把流体速度场 $\vec{v}$ 当作已知函数给出。在地壳浅部,地下水的运动主要存在于断层带和地下含水层发育地区。那里的地下水流动主要是以受补给区和排泄区水头压差控制的强迫对流形式存在,而流体受温度变化而引起的自由对流因素相对所起作用较小,一般忽略不计,从而热传递方程和液流方程可以各自独立求解。在以下讨论的对流过程中,我们仅考虑其强迫对流因素。即从运动学观点假定流体事先具有一定的已知速度,而我们仅考虑其速度所造成的热效应而并不追究其造成流体流动的直接原因。

让我们先从简单的一维温度场着手来考察热对流因素在热传递过程中的作用。假定介质体内部沿 y 坐标轴方向的温度梯度为 $\frac{\partial T}{\partial y}$,则由于传导作用介质体内部沿 y 方向单位面积上的热流量 q_1 为

$$q_1 = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

当介质体内部存在流动液体时,由于流体所含的热量将随着流体流动而流动,因而产生热对流传递。假定流体的比热为 C_s ,其密度为 ρ_s ,当流体沿着 y 坐标轴方向的运动速度为 V_y 时,则由于流体运动而引起通过 y 方向单位面积上的热对流量 q_2 (如图1.2)为

$$q_2 = C_s \cdot \rho_s \cdot V_y \cdot T$$

当热传导和热对流同时存在时,沿 y 坐标轴方向上的热传递总流量 q ,应是 q_1 与 q_2 之和

$$q_y = q_1 + q_2 = -k \frac{\partial T}{\partial y} + C_w \cdot \rho_w \cdot V_y \cdot T \quad (1.8)$$

式(1.8)中的 q_2 一项即为热传递过程中的对流因素。由于式(1.8)中存在 q_2 ,使温度沿 y 坐标轴方向的变化与纯传导结果有显著差别。下面以最简单的均质介质体中的一维稳定温度场为例,对纯传导和传导、对流共存两种情况作出其解析解进行分析比较。

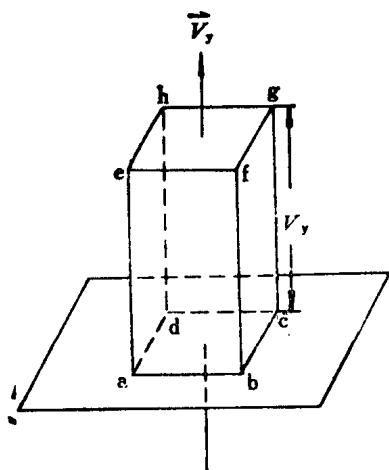


图 1.2 由热对流引起的热传递示意图
 $\vec{V}_y$ 为流体沿 y 方向的流速; $abcd$ 为单位面积;
大面体 $abcde fgh$ 为单位时间内通过单位截面积的流体体积。

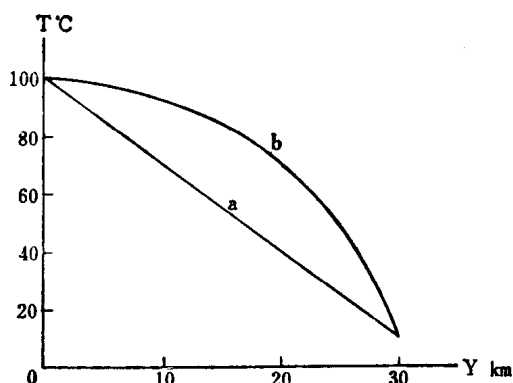


图 1.3 均质一维稳定温度场

a. 纯传导作用时温度沿 y 轴的变化;
b. 传导和对流作用共存时温度沿 y 轴的变化。

假定均质介质体中一维温度场的计算范围为 y 从 0 km 到 30 km。在 $y = 0$ km 处的边界温度为 $T_0 = 100^\circ\text{C}$;在 $y = L = 30$ km 处的边界温度为 $T_L = 10^\circ\text{C}$ 。由纯传导作用得到温度分布的微分方程为

$$\frac{dq_y}{dy} = \frac{dq_1}{dy} = -\frac{d^2T}{dy^2} = 0$$

由上述边界条件解得计算范围内温度 T 的分布为

$$T(y) = \frac{T_L - T_0}{L} y + T_0 \quad (1.9)$$

代入具体边界温度值后得到

$$T(y) = -3.0y + 100$$

其温度 T 与距离 y 呈线性关系(图 1.3 a)。但是当传导与对流共存时,其微分方程为

$$\frac{dq_y}{dy} = \frac{dq_1}{dy} + \frac{dq_2}{dy} = -k \frac{d^2T}{dy^2} + C_w \cdot \rho_w \cdot \frac{d}{dy} (V_y \cdot T) = 0$$

假定 V_y 不随距离 y 变化,则代入边界条件后解得温度 T 为

$$T(y) = T_0 - (T_0 - T_L) \frac{e^{\frac{C_w \cdot \rho_w \cdot V_y y}{k}} - 1}{e^{\frac{C_w \cdot \rho_w \cdot V_y L}{k}} - 1} \quad (1.10)$$

比较式(1.9)和式(1.10)可以看出,在均匀介质中由纯传导微分方程解得的稳定温度场与介质的热导率无关,而只决定于边界温度。但是当伴随有热对流作用时,情况就变

得复杂了,它不但决定于边界温度,而且同时还依赖于介质的热导率 k 、流体的比热 C_ω 、密度 ρ_ω 以及流体的流速 V_y , 多种因素。只有在特殊情况下当 $V_y = 0$ 时式 (1.10) 的极限才与式 (1.9) 的相同。现假定式 (1.10) 中 $k = 0.01 \text{ cal}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C})$, $C_\omega = 1.0 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$, $\rho_\omega = 1.0 \text{ g}/\text{cm}^3$, $V_y = 1.0 \times 10^{-8} \text{ cm}/\text{s}$, 则式 (1.10) 中 T 的具体计算式为

$$T = 100 - 90 \frac{e^{\frac{1 \times 1 \times 10^{-8}}{0.01} \times 10^5 y} - 1}{e^{\frac{1 \times 1 \times 10^{-8}}{0.01} \times 10^5 \times 30} - 1}$$

$$= 100 - 90 \frac{e^{0.1y} - 1}{e^3 - 1}.$$

温度 T 与距离 y 的关系如图 1.3 b 所示。

上面已指出,纯传导情况下一维稳定温度场在均匀介质体中是距离的线性函数关系,因而其温度梯度不随距离变化。但是当传导与对流共存时的温度场是距离的指数函数关系,因而温度梯度的量值随距离增加而迅速增大。这是由于流体从高温区向低温区流动时通过温度下降而不断地释放热量的结果。

传导和对流共存时均匀介质中一维稳定温度场的温度梯度可由式 (1.10) 对 y 求导数得到

$$\frac{dT}{dy} = -(T_0 - T_L) \frac{C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_y}{k} \cdot e^{\frac{C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_y}{k} \cdot y} / \left(e^{\frac{C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_y}{k} \cdot L} - 1 \right) \quad (1.11)$$

由式 (1.11) 看出,传导和对流共存时均匀介质体中一维稳定温度场的温度梯度也是距离 y 的指数函数关系。而地温场和地温梯度的指数项中都含有 C_ω , ρ_ω 和 V_y 。对同一种流体, C_ω 和 ρ_ω 可以近似看作常量,因此速度值 V_y 对地温场和地温梯度的变化起着十分重要的作用。

根据式 (1.10) 和式 (1.11) 可以求出均匀介质体中一维稳定温度场 T 与其温度梯度 $\frac{dT}{dy}$ 之间的关系

$$\frac{dT}{dy} = (T_L - T_0) \frac{C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_y}{k} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_y}{k} \cdot L} - 1}$$

$$+ \frac{C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_y}{k} (T - T_0) \quad (1.12)$$

式 (1.12) 是 T 的直线方程。其斜率为 $\frac{C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_y}{k}$ 。因此当符合上述条件时,可根据观测资料绘制出地温梯度 $\frac{dT}{dy}$ 和地温场 T 的关系直线,由所得直线求出其斜率值,然后由已知的 C_ω , ρ_ω 和 k 值估算出流体的速度 V_y 值。

上述一维情况下的方程推导过程很容易地推广到三维介质空间问题。类似式 (1.6) 中的推导过程,在三维介质空间中可得到传导和对流共存时的热传递方程如下

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$= C_\omega \cdot \rho_\omega \left[\frac{\partial}{\partial x} (V_x \cdot T) + \frac{\partial}{\partial y} (V_y \cdot T) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (V_z \cdot T) \Big] + Q = C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.13)$$

式中 k 为介质的热导率

C 、 ρ 为介质的比热和密度

C_w 、 ρ_w 为流体的比热和密度

V_x 、 V_y 、 V_z 为流体在 x 、 y 、 z 方向的速度分量

Q 为热源(或汇)

T 为温度

t 为时间

式(1.13)中左端的 $\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ 项为单元体(图1.1)中单位体积在单位时间内由传导引起热量的变化;

$$-C_w \cdot \rho_w \left[\frac{\partial}{\partial x} (V_x \cdot T) + \frac{\partial}{\partial y} (V_y \cdot T) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \cdot T) \right]$$

项为单元体中单位体积在单位时间内由对流引起热量的变化; Q 项为单元体中单位体积在单位时间内产生(源)或吸收(汇)的热量。式(1.3)中的右端 $C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t}$ 一项为单元体中由传导、对流及热源(或汇)共同作用结果在单位体积、单位时间内的热量总变化所转换成的温度变化。在对流区内部,由于岩体中饱含流体,岩石的热导率、比热和密度都会产生变化。它们应采用实际含该流体情况下的相应值。在饱水情况下介质的热导率 k 可由下式近似计算

$$k = k_r (k_w / k_r)^{\phi} \quad (1.14)$$

式中 k_r 为岩石热导率

k_w 为水热导率

表1.1 岩石和水的物理参数

符 号	参 数 名	单 位		备 注
		程序中采用的单位	法定计量单位	
k	介质热导率	cal/(cm·s·°C)	W/(m·K)	$k \approx (k_w / k_r)^{\phi}$
ρ	介质密度	g/cm³	kg/m³	
C	介质比热	cal/(g·°C)	J/(kg·K)	
d	介质热扩散率	cm²/s	cm²/s	$d = k / \mu$
μ	岩石热容量	cal/(cm³·°C)		$\mu = \rho \cdot C$
k_r	岩石热导率	cal/(s·cm·°C)	W/(m·K)	
k_w	水热导率	cal/(s·cm·°C)	W/(m·K)	
ϕ	岩石孔隙度			
ρ_w	水密度	g/cm³	kg/m³	
C_w	水比热	cal/(g·°C)	J/(kg·K)	
μ_w	水热容量	cal/(cm³·°C)		$\mu_w = \rho_w \cdot C_w$
Q	岩石热生成	cal/(s·cm³)	μW/m³	
V_x	水流 x 方向分速	cm/s		
V_y	水流 y 方向分速	cm/s		

注: 1W/(m·K) = 2.388 × 10⁻³ cal/(cm·s·°C); 1μW/m³ = 2.388 × 10⁻¹³ cal/(cm³·s); J = 0.2388 cal; K = °C + 273.15.

ϕ 为岩石孔隙度

式 (1.13) 中当 $V_x = V, -V_x = 0$ 时, 即为纯传导情况下的热传递方程式 (1.7); 当 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ 时, 转化为相应的稳定温度场热传递方程。因此, 我们一般采用式 (1.13) 来模拟各种情况下的地温场特征。

求解式 (1.13) 需要给定具体的边界条件, 在非稳定温度场情况下还需要给出初始条件。但由于地壳内部地质条件复杂, 各种岩石的热物理参数又都互不相同, 以及各种地貌形态造成计算区域的不规则的边界几何形状, 上述因素使解析求解式 (1.13) 遇到困难。因而只有在一些特定的简单情况下才能得到它的解析解, 而一般情况下只能采用数值法来求式 (1.13) 的解。

为了便于读者查阅, 上述热传递方程中涉及到的各种热物理参数列于表 1.1 中。

第二章 热传递过程的有限元分析

本章在式(1.13)的数学模型基础上具体讨论二维温度场情况下的有限元计算方法。

地温场数学模拟的有限元方法本质上是将计算区域内的连续温度场离散成有限数量的温度点,然后求出给定条件下这些温度点上的温度值来近似代表需要求解的温度场。由此可知,离散的温度点间距越小、个数越多时,所得的结果越接近真实温度场。但由于受到计算机的内存容量及机时等因素的限制,在具体计算中只能根据实际情况处理。因为离散的温度点个数越多,所需的机时越长,所以在满足精度的情况下尽量减少离散温度点个数,以节省机时费用。在将连续温度场离散成温度点时,首先需要将连续介质体离散成有限可数多个多边形单元,各个单元之间由共属的温度点相连接,这些温度点我们称它们为节点。在每个单元内部假定各种热物理参数均为已知的常数,然后对各个单元根据单元内部的热物理参数求其节点温度关系式。假定整个计算区域分成的单元总共有 N 个节点,则需要建立一个有 N 个未知数的联立方程,才能求得 N 个节点的温度值。

根据式(1.13),二维空间介质中的热传递方程可以表示为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \\ & = C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} + C_w \cdot \rho_w \frac{\partial}{\partial x} (V_x \cdot T) + C_w \cdot \rho_w \frac{\partial}{\partial y} (V_y \cdot T) \end{aligned} \quad (2.1)$$

在假定单元体内部所有热物理参数均为常量的情况下,式(2.1)可以改写为

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} + C_w \cdot \rho_w \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

根据变分法原理,微分方程式(2.2)可以通过下述变分求其近似解

$$\begin{aligned} & k \iint_A \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \delta T dx dy + Q \iint_A \delta T dx dy \\ & = C \cdot \rho \iint_A \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dx dy + C_w \cdot \rho_w \iint_A \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta T dx dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

式中积分域 A 为由计算区域离散成的多边形单元。

为具体计算出式(2.3),我们假定单元内部的温度分布是坐标 x, y 的线性函数,并以三角形单元作为基本的单元形状。这样即可建立起单元内部温度分布与三角形单元的三个节点温度之间的关系。

设三角形单元的三个节点以逆时针方向给出,它们的节点编号分别为 i, j, k , 其相应的节点温度和节点坐标分别为 T_i, T_j, T_k 和 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$, 如图 2.1 所示。则由下式

$$\left. \begin{aligned} a + bx_i + cy_i &= T_i \\ a + bx_j + cy_j &= T_j \\ a + bx_k + cy_k &= T_k \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

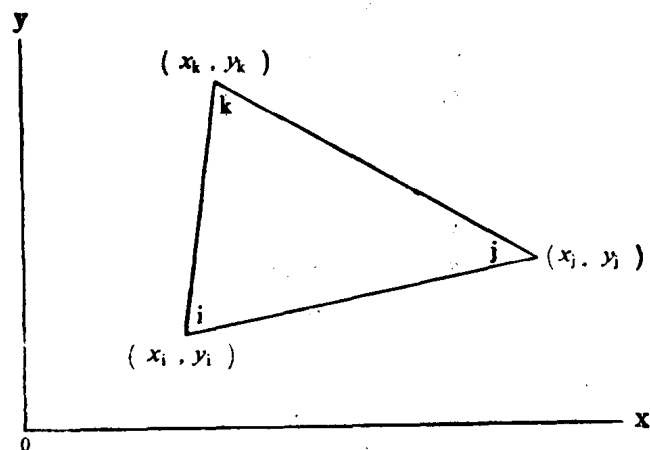


图 2.1 二维有限元三角形基本单元

i, j, k 为三角形基本单元的节点编号; $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ 为节点 i, j, k 的坐标值;
XOY 为总体坐标。

可以求出系数 a, b, c 的值

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2\Delta} [(x_j y_k - x_k y_j) T_i + (x_k y_i - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k] \\ b &= \frac{1}{2\Delta} [(y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k] \\ c &= \frac{1}{2\Delta} [(x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

在三角形单元内部任何一点 (x, y) 上的温度 $T(x, y)$ 可以表示为

$$T = [N] \{T\} \quad (2.6)$$

式中 $[N]$ 为三角形单元的形状函数:

$$\begin{aligned} [N] &= [N_i, N_j, N_k] \\ N_i &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k &= \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned}$$

上述式中的 Δ 为三角形单元的面积:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

$\{T\}$ 为三角形单元的节点温度列向量

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$$

形状函数 $[N]$ 中的系数 $a_i, b_i, c_i, a_j, b_j, c_j$ 和 a_k, b_k, c_k 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k \\ b_j &= y_k - y_i \\ c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_k &= y_i - y_j \\ c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

由式(2.6)可以求出下述关系式

$$\delta T = [N] \{\delta T\} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = [N] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \{T\} \quad (2.11)$$

$$\delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\delta T\} \quad (2.12)$$

$$\delta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \{\delta T\} \quad (2.13)$$

利用上述式(2.8)–(2.13), 我们可以具体计算出式(2.3)中各项的值:

$$\begin{aligned} C \cdot \rho \iint_A \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \, dx \, dy &= C \cdot \rho \iint_A [N] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} [N] \{\delta T\} \, dx \, dy \\ &= C \cdot \rho \iint_A \{\delta T\}^T [N]^T [N] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \, dx \, dy \\ &= \{\delta T\}^T [G] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

式中 $[G]$ 由下述积分确定

$$[G] = C \cdot \rho \iint_A [N]^T [N] \, dx \, dy \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} C_\omega \cdot \rho_\omega \iint_A V_x \frac{\partial T}{\partial x} \delta T \, dx \, dy &= C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_x \iint_A \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\} [N] \{\delta T\} \, dx \, dy \\ &= C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_x \iint_A \{\delta T\}^T [N]^T \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\} \, dx \, dy \\ &= \{\delta T\}^T [H_x] \{T\} \end{aligned}$$

式中 $[H_x]$ 由下述积分确定

$$[H_x] = C_\omega \cdot \rho_\omega \cdot V_x \iint_A [N]^T \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \, dx \, dy \quad (2.15)$$