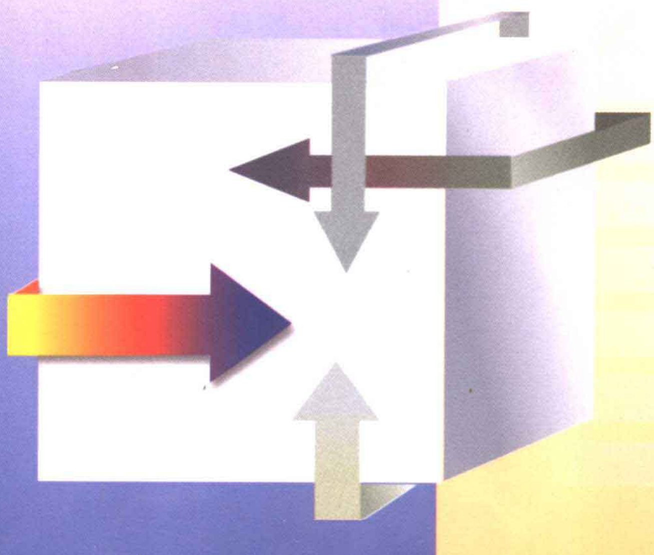
大学数学教程

第1卷 第1册

一元函数微积分

龚冬保 武忠祥



西安交通大学出版社

大学数学教程 第1卷 第1册 一元函数微积分 龚冬保 武忠祥 大学出版社

大学数学教程

第1卷　第1册

一元函数微积分

龚冬保　武忠祥

西安交通大学出版社
·西安·

内 容 提 要

本书是在作者经过多年教学改革基础上编写而成的。作者以系统论的观点为指导，对原来的高等数学、线性代数、复变函数、数理方程及积分变换五门课的内容进行了优化组合，并为了适应不同专业对数学的教学要求，实行模块式的结构。

本册书的主要内容是一元函数微积分和微分方程初步，将微分方程的基本内容安排在本册书只是为了与普通物理课的配合，同时尽可能早的介绍微积分的广泛应用，以加强分析问题和解决实际问题能力的培养。本套书可作为理工科院校各专业的教材。本册书也可单独作为对数学要求比较低的专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程：一元函数微积分 / 龚冬保编著 .—西安：西安交通大学出版社，2000
ISBN 7-5605-1296-8

Ⅰ.大… Ⅱ.龚… Ⅲ.①高等数学-高等教育-教材 ②微积分-高等教育-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 68257 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路 28 号 邮政编码：710049 电话：(029)2668316)
长安县第二印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本：787 mm×1 092mm 1/16 印张：12.25 字数：289 千字
2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷
印数：0 001～3 000 定价：14.00 元

序

《大学数学教程》共分两卷，每卷两册．其中第1卷第1册主要内容是一元函数微积分和常微分方程初步；第1卷第2册是级数，含参量积分，积分变换，解偏微分方程的分离变量法，特殊函数及保角变换．第2卷第1册是线性代数与空间解析几何；第2卷第2册是多元函数微积分及场论、复变函数和数理方程的部分内容．

这套教程是以微积分、线性代数为主要子系统，将其他如复变函数、数理方程、积分变换与之紧密结合，形成一个新的教材体系．这种安排的目的是减少重复，节省教学时数，更重要的是让学生接受数学的综合知识，了解上述各内容间的有机联系，培养综合应用数学知识的能力．这种教学改革是1984年由龚冬保开始试验的．1990年起，由龚冬保与武忠祥合作，在西安交通大学教改试点班用两条线进行试验：每学年的上学期由武忠祥用72学时讲述第1卷第1册的内容，龚冬保用54学时讲述第2卷第1册的内容；下学期武忠祥用48学时完成第1卷第2册的内容，龚冬保用64学时完成第2卷第2册的内容；一般要余下约30学时的内容在第三学期由一人完成．此项试验一直延续到1997年，以后又有几位教师分别在普通班试用至今，取得了预期的效果．

这套教程的另一个特点是将复变函数、数理方程、积分变换的内容分散，以“模块式”结合在全部内容中．即，若要讲它们，便与其他内容紧密结合，不讲则可以去掉它，而不影响其他内容的教学．

这部教材主要用于工学类各专业的数学课程，也适用于非数学专业的其他各专业，尤其是其中的两个第1册，适用的专业更广泛．因此，我们取名为《大学数学教程》．

本书的讲义虽然试用多年，但作为正式出版还是第一次．因此，还要不断试用，不断修改，才能逐步完善．由于著者的水平有限，书中的错误和疏漏一定不少，恳请读者批评指正．

编者

2000年3月

前　　言

作为大学数学教程的这一册，可以独立成为一本包含一元函数微积分学和微分方程初步的教材。自 1985 年起，我们在西安交通大学的一些班级试验，至今已 15 年了，每次用 64 课时授完本教材所含内容，效果较好。不少同行专家很关注我们这项改革试验，有的几次向我们索取教材，这一切鼓舞着我们将原稿进一步修改，正式出版。

本教材的主要特点之一是教材体系与一般教材不同：作为整个大学数学教程的基础，在讲函数定义时，同时给出了复变函数的定义；将导数、微分、不定积分及微分方程初步联成一章，而将微分中值定理、定积分和旁义积分联成另一章。在突出基本概念的同时，前一章较注意讲解运算技巧和微分方程方面的应用，后一章则侧重于基本理论和定积分的应用；在多数概念和定理的讲述中，注意了几何与分析的联系及微积分各内容间的联系。

本教材突出了无穷小分析的方法，强化了微积分基本技巧的训练，加强了微分中值定理及牛顿-莱卜尼兹公式的讲述，目的是为本教程后面几册及后续课程的学习打下坚实的基础。提前讲述微分方程的目的之一，是让学生早一点知道微积分学的实际应用，加强应用能力的培养。

本教材适用于大学的非数学各专业，大专各专业亦可参考使用。为了增强实用性，教材中配置了大量例题供教师选讲；为了培养学生的能力，加强基本功训练，本教材的练习分思考题、习题(A)、习题(B)和独立作业四种。思考题供学生课后研究讨论，习题(B)是有一定难度的提高性练习题，这两类习题可由学生自由选择练习。习题(A)是基本练习题，学生要反复练习；独立作业则是每单元后为总结本单元学习效果而出的，学生要在规定时间内独立地、像做测验题一样去做。教师要全收、全改并评分(100 分为满分)，但这种分数只作为了解教学情况用，不计入学生考试成绩，以免加重学生负担。

根据我们的试验，第 1 章用 16 课时，第 2 章用 22 课时，第 3 章用 26 课时，在导数、微分和不定积分部分讲清了基本概念后，对于基本运算技巧，教师只要通过少数典型例题指点一下，主要靠学生自己练习，一般我们安排这部分讲课和练习课之比为 2∶3(对基础好的学生甚至可达到 1∶2)。

本教材虽然试用过十多年，正式出版前又作了不少修改，但交稿之时仍觉时间紧迫，写来匆忙，加之编者水平所限，因此疏漏和错误在所难免，恳请读者多提宝贵意见，以便日后进一步修改、完善。

作　者
2000 年 5 月

目　　录

第 1 章　函数的极限与连续

这一章是微积分的基础，其中的大部分内容已在中学讲述过。这里为了保持内容的完整，尽量避免重复中学讲过的内容，将在扼要地介绍本章内容的同时，侧重介绍中学没讲到或尚未深入研究的有关内容。

1.1　集合及其运算

微积分学主要是用极限来研究函数的性质。我们在中学已经知道，函数是定义在集合上的，因此本节主要介绍集合的概念及其基本运算。

在日常生活当中，集合的概念是不难理解的。例如，某个班级同学的全体，某图书馆图书的全体，某车间机床的全体等都分别构成一个集合。但是，集合不能给予严格的定义。尽管如此，但我们都理解集合是什么意思。一般来说，把具有某种共同特性的事物的全体叫作集合，属于集合的每个个体叫作集合的元素。

集合通常用大写字母 A、B、C、X、Y、Z、…表示，集合的元素用小写字母 a、b、c、x、y、z、…表示。用 $a\in A$ 表示 a 是集合 A 的元素（读作"a 属于 A"），用 $a\notin A$ 表示 a 不是集合 A 的元素（读作"a 不属于 A"）。含有有限个元素的集合称为有限集；不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$；既不是有限集又不是空集的集合称为无限集。

集合有两种表示法。一种是列举法，如集合

$$A = \{1,3,5,7\}$$

这种表示法是将集合的元素在花括弧内一一列举出来。

另一种是描述法，如集合

$$A = \{x \mid x^2 - 6x + 5 \geqslant 0\}$$

这种表示法将花括弧分为两部分，用记号"|"隔开，前面为元素的代表符号，后面为元素所具有的性质。

我们通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集。

设 A，B 是两个集合，若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A$$

若两个集合 A，B 满足 $A\subset B$，$B\supset A$，则称 A 与 B 相等，记作

$$A = B$$

集合除包含关系外，我们经常要考虑集合的运算。集合的基本运算有三种：并、交、差。

设 A，B 是两个集合。由含于 A 或含于 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$$

由同时含于 A 与 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由含于 A 而不含于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A \setminus B$，即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

两个集合的并、交、差可以用图形直观表示（图 1.1 中的阴影部分）

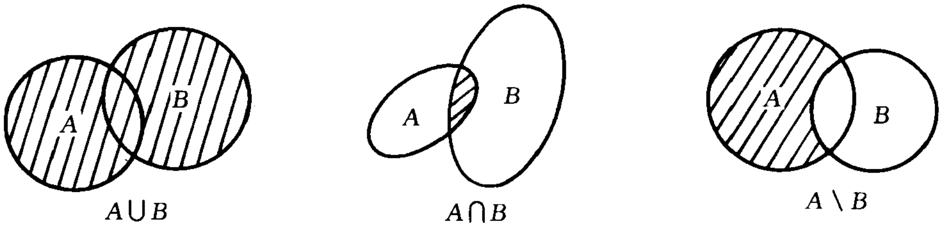


图 1.1　两个集合的并、交、差

假设我们所考虑的集合都是更大集合 X 的子集，这时我们把 A 对 X 的差集称为 A 的补集，记为 A^c

$$A^c = X \setminus A$$

我们可以证明集合的运算满足下面的基本法则。

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1.2　实数与复数集合

由于本课程主要研究定义在实数集或复数集上的函数，所以，本节主要介绍实数集和复数集的基本性质。

1.2.1　实数的基本性质

以下用 $\mathbf{R}$ 表示实数集合。符号“$\forall$”表示任意；“$\exists$”表示存在。

1.2.1.1　实数的四则运算性质

任意两个实数的和、差、积或商（除数不为 0）仍是实数，且有下列性质：

(1) 加法性质　对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$，均有 $x + y \in \mathbf{R}$，且有

1°　加法交换律：$x + y = y + x$

2°　加法结合律：对 $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$，有 $(x + y) + z = x + (y + z)$

3°　$0 \in \mathbf{R}$ 是特殊实数，对 $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $x + 0 = x$

4°　对 $\forall x \in \mathbf{R}$，存在唯一的 $(-x) \in \mathbf{R}$，使 $x + (-x) = 0$

减法是加法的逆运算，可用性质 4°来定义：$x - y = x + (-y)$。这样，减法可归结为加法。

(2) 乘法的性质　对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$，有 $xy \in \mathbf{R}$，且有

1°　乘法交换律：$xy = yx$

2° 乘法结合律：$(xy)z=x(yz)$

3° $1\in\mathbf{R}$ 是特殊实数，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $1\cdot x=x$

4° 对 $\forall x\neq 0$，存在唯一的 $x^{-1}\in\mathbf{R}$，使 $xx^{-1}=1$

除法是乘法的逆运算，可用性质 4°来定义：$\frac{x}{y}=xy^{-1}(y\neq 0)$，除法便归结为乘法。乘法对加法运算还有如下性质。

5° 乘法对加法的分配律：

对 $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$，有 $x(y+z)=xy+xz$

在一个集合上，如能定义类似于实数的加法和乘法的两种运算及其逆运算，且具有上述的所有运算性质时，就称这个集合为"域"，因此实数集合也称为实数域。此外，有理数和复数也都是数域。

1.2.1.2 实数的有序性

对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，以下三种情况：$x>y$，$x=y$ 或 $x<y$ 必有一个且只有一个成立。其中不等式有如下性质：

1° 自反性：即 $x>y$ 与 $y<x$ 等价

2° 传递性：若 $x>y$，$y>z$，则 $x>z$

3° 对 $\forall x\in\mathbf{R}$，若 $x>y$，则 $x+z>y+z$

4° 对任意正实数 z，若 $x>y$，有 $xz>yz$

5° 实数的稠密性：即若 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，则 $\exists c\in\mathbf{R}$ 使 $a<c<b$

上述性质对有理数也都成立，而复数没有有序性。

1.2.1.3 实数的完备性及实数绝对值的性质

(1) 实数的完备性

以上我们讲到的实数的性质，对有理数集合都适用。实数和有理数的本质区别在于实数具有完备性，而有理数不具备完备性。实数的完备性是指它有连续的结构，即实数与数轴上的点可以建立一一对应的关系。而有理数则不然，像$\sqrt{2}$就不是有理数，而数轴上总有与$\sqrt{2}$对应的点，这个点不能与任何有理数相对应，如用有理数和数轴上的点作对应关系，数轴上将有许多不能和有理数相对应的"空隙点"。如果将有理数扩充为实数，则可以证明，实数与数轴上的点有一一对应的关系。这就说明实数结构就如数轴一样，由它的点连续布满，这就是完备性。关于实数完备性的严格讲述，要从无理数的定义讲起，超出了高等数学所要求的范围。由于实数与数轴上的点是一一对应的，所以就称实数为点，因而还有关于区间的概念，概述如下：

1° 有限区间：开区间(a,b)，由满足不等式 $a<x<b$ 的所有点 x 组成；闭区间$[a,b]$，由满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有点 x 组成；半开半闭的区间，$(a,b]$和$[a,b)$。上述各种区间在数轴上表示以点 a 和点 b 为端点的线段，开或闭是以端点是否属于此区间而定。上述区间长为 $b-a$，是有限的正数，故称它们为有限区间。

2° 无限区间：$(-\infty,+\infty)$表示全体实数；$(a,+\infty)$表示适合不等式 $x>a$ 的所有点 x，同样地还有$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$和$(-\infty,b]$等。这些区间长是无限的，故称之为无限区间。

3° 邻域：以某实数 x_0 为中心，正数 2δ 为区间长的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域。

(2) 实数的绝对值及其性质

1° 绝对值的定义。对 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$. x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 与原点间的距离。

2° 绝对值的主要性质:

$|x|\geqslant 0$,等号当且仅当 $x=0$ 时成立;对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $|x|=|-x|$;

$|xy|=|x||y|$。

以下不等式常被用到:

$|x|-|y|\leqslant||x|-|y||\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$。

3° 距离公理:对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,$|x-y|$ 表示 x 与 y 两点间的距离,具有三个最基本的性质:

(a) 对称性　$|x-y|=|y-x|$;

(b) 非负性　$|x-y|\geqslant 0$,且等号当且仅当 $x=y$ 成立;

(c) 三角不等式　对 $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$,成立不等式

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$$

以上三个性质是描述距离的本质的性质,叫距离公理。如果在某个集合之中,对于其中任意的两个元素 x、y,可以定义一个非负的实数 $d(x,y)$与之对应,且 $d(x,y)$具有距离公理的三个性质,那么这个集合的元素便可称作为点,$d(x,y)$就表示点 x 与 y 间的距离,而这个集合也就被称作距离空间。实数集就是一个距离空间。

以上从四则运算的性质说明实数是数域;从有序性概括了实数不等式的重要性质;从实数与数轴上的点有一一对应的关系介绍了实数的完备性;从度量的角度归纳了绝对值的性质和距离公理。以上这些在讲到函数和极限时都要经常用到。

思考题(一)

1. 设 a,b 是任意的两个有理数,问形如 $a+b\sqrt{2}$的数的集合,对实数的四则运算能否构成数域?

2. 试证明不等式:$|x|-|y|\leqslant||x|-|y||\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$。

3. 设(x,y)表示 xoy 平面上的一个点P。若点 P_1 为(x_1,y_1),P_2 为(x_2,y_2)是这个平面上任意的两个点,我们定义它们的距离为$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=d(P_1,P_2)$。验证这样定义的距离满足距离公理的条件。

1.2.2　复数的基本性质

1.2.2.1　复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数,则 z_1 和 z_2 的加法、减法、乘法及除法分别定义如下:

(1) 加法　$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$;

(2) 减法　$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$;

(3) 乘法　$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$;

(4) 除法　满足 $z_2z=z_1$,$(z_2\neq 0)$的 z 称为z_1 与 z_2 的商,记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$。从这个定义立即可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

不难证明,复数的运算和实数一样也满足交换律、结合律和分配律。但复数不具有有序性,两个复数不可比较大小。

我们把实部相同而虚部正负号相反的两个复数称为共轭复数,与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$,如果 $z=x+\mathrm{i}y$,那么 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$。共轭复数有如下性质:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

(2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$;

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(4) $\bar{\bar{z}}=z$。

以上几个性质请读者自己证明。

1.2.2.2　复数的几何表示

(1) 复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上是由一对有序实数(x,y)唯一确定的,所以对于平面上给定的直角坐标系,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为(x,y)的点来表示。此时 x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴,两轴所在的平面称为复平面或 z 平面。这样,复数与复平面上的点构成一一对应。

复数 z 还能用从原点指向(x,y)的平面向量来表示(图 1.2),向量的长度称为 z 的模或绝对值,记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

显然,下列各式成立:

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|$$

$$|z|\leqslant|x|+|y|,\quad |z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

当 $z\neq0$ 时,z 向量与 x 轴正向的夹角 θ 称为 z 的辐角,记作

$$\mathrm{Arg}z=\theta$$

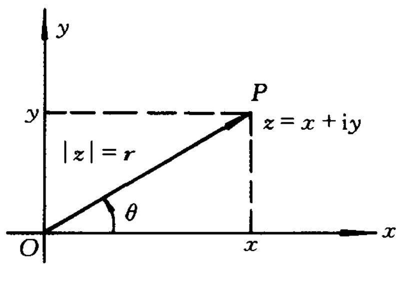


图 1.2　复数 z 的向量表示

显然,任何一个不为零的复数有无穷多个辐角,如果 θ_1 是其中之一,那么

$$\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi\quad(k\text{ 为任意整数})$$

就给出了 z 的全部辐角,在 $z(\neq0)$的辐角中,我们把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\theta_0=\arg z$。

当 $z=0$ 时,$|z|=0$,而辐角不确定。

利用直角坐标与极坐标的关系:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$$

可以把 z 表示成下面的形式:

$$z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

称为复数的三角表示法。进一步,我们利用 Euler 公式:

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,我们又可以得到

$$z=\rho e^{i\theta}$$

这种形式称为复数的指数表示法。

复数的各种表示法可以互相转换,以适应讨论不同问题时的需要。

1.2.2.3 复数的乘幂与方根

作为特例,我们考虑非零复数 z 的正整数次幂 z^n,设 $z=\rho e^{i\varphi}$,则

$$z^n=\rho^n e^{in\varphi}=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

当 $\rho=1$,得 De Moiver 公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

求非零复数 z 的 n 次方根,相当于解二项方程

$$W^n=z\qquad(n\geqslant 2,\text{整数})$$

我们用$\sqrt[n]{z}$表示 z 的 n 次方根,下面来求它们。

设 $z=re^{i\theta}$, $W=\rho e^{i\varphi}$,则

$$\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}$$

从而得 $\rho^n=r$, $n\varphi=\theta+2k\pi$

解得 $\rho=\sqrt[n]{r}$(取算术根), $\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$

因此 z 的 n 次方根为

$$\omega_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}\cdot\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$$

这里表面上 k 可以取 $0,\pm1,\pm2,\cdots$,但实际上只要取 $k=0,1,\cdots,n-1$ 就可得出 n 个不同的根,所以记号$\sqrt[n]{z}$与记号$(\sqrt[n]{z})_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$是一致的。从而也有

$$W=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

例 1.1 计算$\sqrt[3]{-8}$

解 由于 $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$,故

$$(\sqrt[3]{-8})_k=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),\quad(k=0,1,2)$$

当 $k=0$ 时, $(\sqrt[3]{-8})_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1+\sqrt{3}i$

当 $k=1$ 时, $(\sqrt[3]{-8})_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$

当 $k=2$ 时, $(\sqrt[3]{-8})_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}i$

1.3 映射与函数

映射是现代数学中的一个基本概念,本节将在介绍映射概念的基础上,介绍函数的基本概念及其运算。

1.3.1 函数的定义和例

定义 1.1 设 A,B 是两个非空集合,若对每一个 $x\in A$,按照某种确定的法则 f,有唯一

确定的 $y\in B$ 与它对应，则称 f 为从 A 到 B 的映射，记作

$$f:A\to B\text{ 或 }\quad f:x\to y=f(x),\quad x\in A$$

其中，y 称为 x 在映射 f 下的像，x 称为在映射 f 下 y 的原像(或逆像)，A 称为映射 f 的定义域，记为 $D(f)=A$。A 中所有元素的像的全体构成的集合称为 f 的值域，记作 $R(f)$ 或 $f(A)$，即

$$R(f)=f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}$$

特别地，我们通常用 I_A 表示集合 A 上的恒等映射，即 I_A 是把 A 中每个元素都映为自己的映射。

下面我们介绍复合映射和逆映射的概念。

设有映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$，由

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),x\in A$$

所确定的映射 $g\circ f:A\to C$ 称为 f 与 g 的复合映射(图 1.3)。

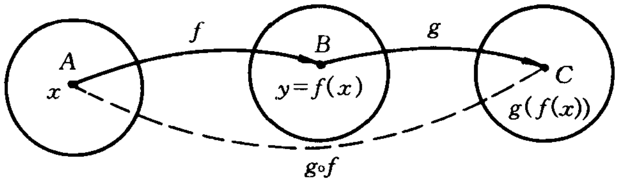


图 1.3　f 与 g 的复合映射

设有映射 $f:A\to B$，若存在一个映射 $g:B\to A$，使 $g\circ f=I_A$，$f\circ g=I_B$，则称 f 是可逆映射，并且称 g 是 f 的逆映射，记作 $g=f^{-1}$。

现在我们利用映射的有关概念来研究函数。

定义 1.2　设 A,B 是两个实数集，称映射 $f:A\to B$ 为定义在 A 上的函数，记作

$$f:x\to y=f(x),x\in A$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，$f(x)$ 表示 f 在 x 处的值，A 称为 f 的定义域，记作 $D(f)$；$f(A)=\{y,|y=f(x),x\in A\}$ 称为 f 的值域，记作 $R(f)$。

若 A,B 是两个复数集，称 $f:A\to B$ 为定义在 A 上的复变函数。

对函数的定义，还有必要作以下说明：

(1) 按这个定义，函数就是因变量 y。但在近代数学中，一元函数被看成是从一个实数集合 X(定义域)至另一个实数集合 Y(值域)的映射，即强调对应关系 f 为函数关系，从而有“函数 y”和“函数 f”的不同称呼方法。在不会引起混淆的情况下，本书在后面对这两种称呼法都将采用，请读者留意。

(2) 函数的定义域是函数关系赖以存在的集合。即若 $y=f(x)$ 的定义域是 A，则当 $x\in A$ 时，函数有定义；$x\notin A$ 时，关系 $y=f(x)$ 无意义。所以定义域对函数至关重要，见到函数，首先应注意它的定义域。

一般用直角坐标系下的曲线表示函数的图像(图 1.4)，曲线 $y=f(x)$ 上每一点 $(x,f(x))$ 表示由 ox 轴上一点 x 经曲线上的点 $(x,f(x))$ 到 oy 轴上一点 y 的对应关系。用曲线表示函数关系的好处是形象直观。然而也有些函数，如即将介绍的 Dirichlet 函数则无法用曲线表示。

当研究函数的一些特殊性质时，比如复合函数、函数的极限，我们还可以采用如图 1.5 所示的图示法：将 ox 轴与 oy 轴分开，用 ox 轴上一点为起点、oy 轴上相应点为终点的带“箭头”的线段表示函数的对应关系。函数的两种图示法，各有各的用处，大家都应掌握，而用直角坐标系下的曲线表示函数用得更普遍。

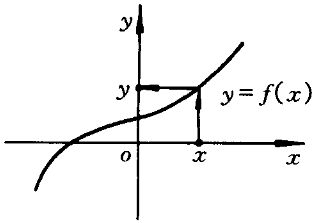


图 1.4　曲线表示函数的图像

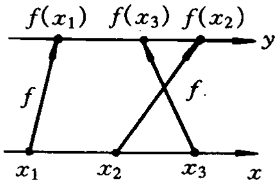


图 1.5　表示函数对应关系的图示法

例 1.2　符号函数是这样定义的：

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

这个函数的定义域是全体实数$(-\infty, +\infty)$，它的图像如图 1.6 所示。因为对 $\forall x \in \mathbf{R}$，我们有：$x = (\operatorname{sgn} x) \cdot |x|$，故称其为符号函数。

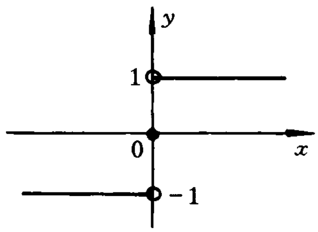


图 1.6　符号函数的图像

例 1.3　我们再来举两个函数的例子。我们知道，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，而$(x) = x - [x]$表示实数 x 的小数部分。这样，我们便得到两个函数：

①取整函数 $y = [x]$；②$y = (x) = x - [x]$。它们的定义域都是$(-\infty, +\infty)$。①的值域是全体整数；②的值域为$[0,1)$，它们的图像分别如图 1.7 和图 1.8 所示。

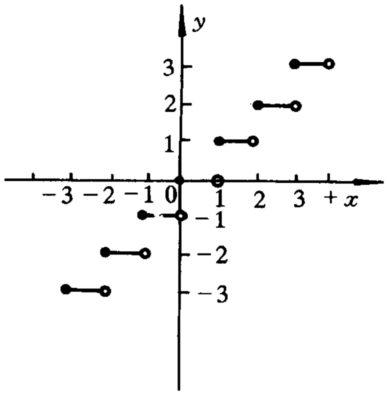


图 1.7　$y = [x]$

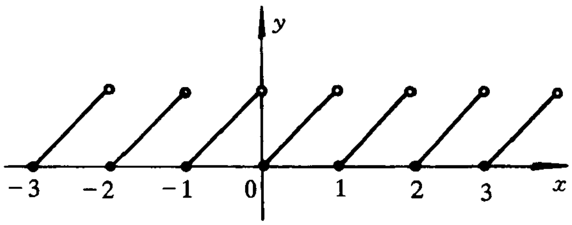


图 1.8　$y = (x)$

函数曲线上空心的点表示这一点不是函数图像上的点。

例 1.4 作图比较下面三个函数。

①$f(x)=x^2$;②$g(x)=\sin x$;③$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$。

解 ①$f(x)=x^2$ 是幂函数,图像是大家熟知的抛物线(图 1.9)。②$g(x)=\sin x$ 是正弦函数,图像是熟知的正弦曲线(图 1.10)。③$\varphi(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,将定义域分段,在$(-\infty,0)$是正弦函数,而在$[0,+\infty)$则是半条抛物线(图 1.11)。

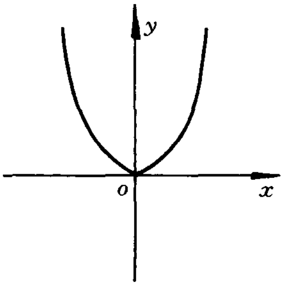


图 1.9 $y=x^2$

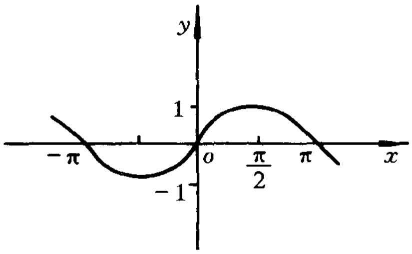


图 1.10 $y=\sin x$

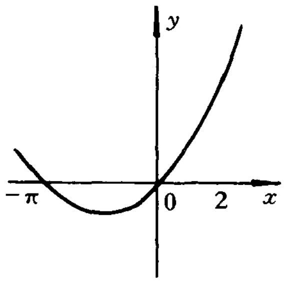


图 1.11 $y=\varphi(x)$

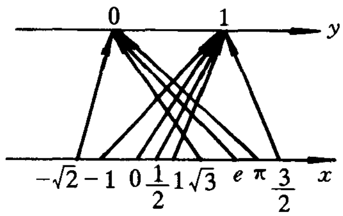


图 1.12 $y=D(x)$

例 1.5 Dirichlet 函数,这是个富有启发意义的函数。它是这样定义的:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

解 这个函数的定义域是一切实数。然而,由于有理数和无理数均是稠密分布的,所以在直角坐标系下,无法作出其图像,这时用第二种图示法表示这一函数关系比较清楚(图 1.12)。

思考题(二)

1. 作函数 $y=\frac{x}{|x|}$ 的图像,它与符号函数相同吗?

2. 我们说 $y=x^2+1$ 和 $x=t^2+1$ 是相同的函数,这种说法的根据是什么?而对函数 $y=e^x$ 和 $x=\ln y$ 则既可以说是两个不同的函数,又可以说它们是同一个函数,这种说法矛盾吗,应如何解释?

3. 比较并作出下列三个函数图像: