

电路与系统理论

● 毕厚馥 编著

● 华东师范大学出版社

DIANLU YU XITONG LILUN

电 路 与 系 统 理 论

毕厚馥 编著

华东师范大学出版社出版发行

(上海中山北路3663号)

新华书店上海发行所经销 张家港市 印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 27 字数: 640千字

1988年4月第一版

1988年4月第一次印刷

印数: 1—4,200本

ISBN7-5617-0100-4/O.004 定价: 5.20元

前 言

本书是作者在近年来为无线电电子学专业学生讲授“电路与系统理论”课程所编写讲义的基础上整理补充而成的。

“电路与系统理论”是无线电电子学专业的基础课程之一。它的任务是阐述电路与系统的数学模型、基本概念、基本分析方法和综合设计方法。由于近代电路与系统的分析和综合与计算机技术密切相关,因此本书的叙述方式尽量便于使用计算机,并且给出了一些重要分析与综合方法的计算机程序框图和运行程序。书中提供的程序采用 BASIC 或 FORTRAN 语言,在 PDP-11/23 或 APPLE II 机上通过,并经过学生上机实习计算有关题目。

本书的内容分为两大部分。第一部分包括第一章到第四章,是阐述电路与系统的分析。其中第一章和第二章分别讨论电路元件和网络图论。第三章和第四章在前两章的基础上讨论电路与系统的各种分析方法。第二部分包括第五章到第九章,是阐述电路与系统的综合,其中第九章是根据文献[15]编译的。由于滤波器是网络综合的重要应用,而且它已被广泛地应用于无线电电子学的各个领域之中,所以我们在综合中主要是讨论滤波器,阐述滤波器的基础知识。通过第五章到第九章的学习,使学生具有设计简单的模拟和数字滤波器的能力,并为进一步熟悉数字滤波器打下良好的基础。

阅读本书的读者需要具备线性代数、复变函数理论和电子线路的基础,若具有一些电路分析的基础,则更有助于阅读。此外,为了顺利地阅读本书中的程序,读者需要有 BASIC 和 FORTRAN 语言的基础。

本书叙述力求简单明瞭、深入浅出。除了第九章以外,可以作为一学期的课程。如有必要,可以略去第六章及标有“*”号的小节;也可以只讲述第一章到第四章网络分析部分,或第五章到第九章网络综合部分,这对教材的连贯性没有影响。除第九章外,每章末附有习题,供读者练习之用。

本书在编写过程中,承蒙复旦大学电子工程系凌燮亭教授的指导和帮助,提出了许多宝贵的意见,在此表示衷心的感谢。

李白帆同志为本书编制了部分程序,绘制了大量插图,为本书做了许多有益的工作。潘音同志和我的部分学生也为本书绘制了部分插图。作者仅在此表示谢意。

由于作者水平有限,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者批评指正。

作者 1986.12.

目 录

绪 言	1
-----	---

第一章 电路元件和系统模型的分类

§1.1 引言	4	§1.5 R 、 L 、 C 互换器	28
§1.2 二端电路元件	5	§1.6 系统模型分类	31
§1.3 多端电路元件	18	习题一	33
§1.4 综合非线性电阻器的三种基本变换器	23		

第二章 网络图论

§2.1 引言	35	集矩阵	40
§2.2 网络图的一些基本定义	36	§2.6 基尔霍夫电压定律(KVL)方程的列写与基本回路矩阵	42
§2.3 独立的 KCL 和 KVL 方程个数	37	§2.7 特兰根(Tellegen)定理	44
§2.4 基尔霍夫电流定律(KCL)方程的列写与关联矩阵	39	习题二	46
§2.5 一般形式 KCL 方程的列写和基本割			

第三章 线性时不变电路与系统的分析

§3.1 引言	48	§3.6 奇异信号	86
§3.2 经典法	49	§3.7 拉普拉斯变换分析法	91
§3.3 节点电压分析法	54	§3.8 卷积分析法	109
§3.4 直流网络的计算机求解	67	习题三	127
§3.5 正弦稳态响应的计算机求解	83		

第四章 状态变量法与简单非线性电路分析

§4.1 引言	133	*§4.5 瞬态伴随模型法	158
§4.2 状态变量与状态方程	134	§4.6 非线性电阻网络的分析	161
§4.3 简单网络的状态方程	140	习题四	168
§4.4 状态方程的解	145		

第五章 网络综合基础

§5.1 网络综合与滤波器	170	§5.4 零、极点与频率特性的关系	188
§5.2 网络函数	175	§5.5 归一化	195
§5.3 零极点法与霍尔维茨多项式	179	习题五	197

第六章 无源网络的特性和实现

§6.1 正实函数与无源性.....	203	§6.3 二端口网络参数及其无源性.....	219
§6.2 无耗函数(电抗函数)的策动点特性及其实现	209	§6.4 二端口电抗函数的特性和实现.....	223
		习题六.....	235

第七章 滤波器的近似传递函数

§7.1 引言.....	237	§7.5 贝塞尔(Bessel)近似.....	274
§7.2 布特沃思近似函数.....	243	§7.6 时延均衡器.....	279
§7.3 切比雪夫近似函数.....	258	§7.7 频率变换和网络变换.....	280
§7.4 椭圆滤波器.....	272	习题七.....	296

第八章 有源滤波器

§8.1 引言.....	298	§8.4 开关电容滤波器.....	321
§8.2 直接实现法.....	299	习题八.....	326
§8.3 级联实现法.....	304		

第九章 数字滤波器

§9.1 数字滤波器导论.....	327	§9.3 数字滤波器的实现.....	377
§9.2 数字滤波器的设计.....	351		

附 录.....	395
参考文献.....	424

绪 言

电路、网络 and 系统^① 是指由四种基本类型的电路元件(电阻、电容、电感、忆阻)及可能的独立源和受控源的互连。我们怎样来区分电路、网络 and 系统呢?一般讲,从形式上看,电路是元件较简单的互连,网络是复杂的电路,系统则是比电路和网络规模更大的相互联系、相互作用的电路的结合;从研究问题的着眼点看,电路和网络主要关心局部问题,而系统则主要关心全局问题。例如电路、网络常常着重考虑求其各部分的电压和电流,而系统却往往着重考虑其外部的输入、输出关系。

近年来,由于大规模集成化技术的迅猛发展,及各种复杂部件、系统的直接采用,使“电路”、“网络”、“系统”的划分发生了困难,任何电路或网络可以认为是一个系统,任何系统也可以认为是一个复杂的电路或网络。它们中间的许多基本概念互相渗透,需要统一的分析和研究,它们已成为不可分割的整体,通常不再严格区分这三种名词的差异。因此,本书在一般情况下这三种名词是通用的,仅在必要时才加以区分。

电路中有四个基本电量:电压 $v(t)$ 、电流 $i(t)$ 、电荷 $q(t)$ 和磁通 $\phi(t)$ 。这四个基本量之间的关系可以分为两类。一类是,它们之间的关系和电路元件的特性无关,各变量之间的关系如下:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (0-1)$$

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (0-2)$$

$$P(t) = v(t) \cdot i(t), \quad (0-3)$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau. \quad (0-4)$$

其中,功率 $P(t)$ 和能量 $E(t)$ 称为复合变量。这些关系对于任何电路元件都是成立的,不管它们是集中参数的还是分布参数的^②,线性的还是非线性的,时不变的还是时变的,无源的还是有源的,等等。上述方程也可以写成如下形式:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau, \quad (0-5)$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau, \quad (0-6)$$

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt}, \quad (0-7)$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^t P(\tau) d\tau. \quad (0-8)$$

① 本书讨论的都是电网络和电系统。

② 本书只讨论集中参数电路与系统。

在这些方程中,已假定在时间 t 为 $-\infty$ 时,其相应的各变量的值为零。另一类是,这些变量之间的关系和电路元件的特性有关,各变量之间的关系如下:

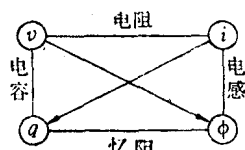


图 0-1

$v(t) \sim i(t)$ 的关系,为电阻。

$q(t) \sim v(t)$ 的关系,为电容。

$\phi(t) \sim i(t)$ 的关系,为电感。

$q(t) \sim \phi(t)$ 的关系,为忆阻。

由于这些关系与元件有关,故称它们为元件定律。

以上各基本电量之间的两类关系,可参看图 0-1。

当一些元件互连而构成电路时,还有一些为电路中所有元件都必须服从的制约性定律。这些定律称为互连定律。在集中电路理论中,互连定律由如下定律构成:

(1) 基尔霍夫电流定律(KCL):在任一时刻,流入(或流出)集中电路中任一节点电流的代数和等于零。

(2) 基尔霍夫电压定律(KVL):在任一时刻,环绕集中电路中任一闭合回路电压的代数和等于零。

元件定律和互连定律是各不相同、相互独立的定律。元件定律确定某条支路上的电压和电流等基本电量之间的约束关系,互连定律则确定各支路之间电压和电流的约束关系。

“电路与系统理论”研究电路与系统所遵循的规律。它用抽象的、统一的方法来研究电路与系统的问题,它对各种实际电路和系统建立一定的模型,然后再对模型探讨各种分析和综合的方法。“电路与系统理论”是无线电电子学专业的共同专业基础课,因此是十分重要的。尤其是在当代新器件层出不穷地出现、大规模集成电路迅猛发展的情况下,让学生学会一种总能奏效的普遍方法是值得重视的。这不仅能适应现代技术的要求,也能满足势必出现的新技术的要求。

“电路与系统理论”主要研究两方面的问题。

(1) 已知加给电路(系统)的激励信号,及电路(系统)的拓扑结构、元件参数,求各电路元件的端电压和通过各电路元件的电流。或者说,已知电路(系统)的拓扑结构、元件参数,求电路(系统)对输入激励信号所产生的输出响应。这个问题称为电路(系统)的分析问题,见图 0-2。

(2) 已知激励和电路元件的端电压及通过电路元件的电流,或者说,已知激励和电路(系统)的响应,要求设计电路(系统)的拓扑结构和参数。这个问题称为电路(系统)的综合问题,见图 0-3。综合问题的解答不一定存在,即使存在,其解也不一定是唯一的,即可能会有很多种网络结构形式和相应的元件参数来实现预期的响应。

系统的分析和系统的综合互为逆问题,二者关系密切,但它们有各自的体系和处理方法。一般来讲,分析较综合简单,分析是综合的基础。

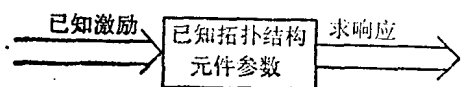


图 0-2

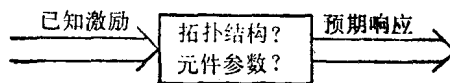


图 0-3

近代网络理论的迅速发展与计算机技术密切相关。以前,复杂的网络常用一些特殊的、经典的方法来处理,对不同的网络,没有统一的方法。现在,由于计算机的使用,可以研究如何用系统的步骤来分析和确定任意复杂网络的特性。本书主要讨论近代电路与系统理论,所以本书与计算机技术密切相关。

本书着重阐述基本概念与基本的分析和设计方法,也给出一些基本的计算机程序、框图和计算机的运算结果。程序均已上机通过,这些程序不仅考虑了教学的需要,也具有实用价值,这是为了使学能较好地掌握近代电路与系统理论,并为将计算机用于这一领域奠定一定的基础。

第一章 电路元件和系统模型的分类

§1.1 引言

电路元件是指对实际器件经过抽象化处理而得到的可以运用数学工具来进行研究的理想化的模型。一个实际的物理器件常可以用一个或几个电路元件来造型。对于同一个器件,可以用不同的模型来表示。例如,一个实际的电阻器,在只考虑其电磁能与热能的转换特性时,可以简单地用一个电阻元件来作为电阻器的模型,但在频率较高时,还要考虑引线电感和分布电容的影响,这时需要用一个电阻和电感相串联、和电容相并联的模型来作为电阻器的模型(对于不同的器件,当然也有可能得到形式上完全相同的模型)。

一般来讲,电路理论工作者根据实践和理论研究的结果,先定义几类理想化元件,然后对实际器件,根据一定的要求,用一类或几类元件的组合来对它建立模型(简称建模)。对实际器件建模时模型选择的标准是:一方面希望模型在一定的要求范围内尽可能精确地近似实际器件,另一方面又希望它尽可能简单。这种用理想化元件构成的电路的模型和系统的模型,简称为电路模型和系统模型。

必须强调指出,电路与系统理论是建立在模型概念的基础上的,它并不直接研究一个具体的实际电路和系统,而是将电路与系统中共同的本质的东西抽象出来,用统一的、普遍的方法来进行处理和研究。只要模型建立得足够精确,则所得到的结论就能够精确地反映实际电路的情况。而且还可以预测电路和系统可能具有的特性,为设计实际电路与系统提供一定的理论依据。让学生学一些这种普遍的方法是值得提倡的,因为近年来由于工艺和材料科学的巨大发展,创造和发展了许多新的器件,在这种情况下,不可能在有限的学时中,对学生讲授所有新出现的实际电路,更不可能预测学生毕业后在工作中将会遇到什么新的器件和实际电路。

本书第一章先讨论“电路元件”,这是因为电路元件是“电路与系统理论”中最基本的部分。电路元件可分为基本元件和派生元件,派生元件又由若干个基本元件组合而成,因此本章的重点是讨论基本元件。

基本元件是按元件端口所测得的四个基本电量 v 、 i 、 ϕ 、 q ^① 之间的不同关系来分类的。测量电路见图 1.1-1。图 1.1-1 中被测元件的端电压 v 和通过它的电流 i 采用通常的关联方向,即电流 i 的正方向由电压 v 的“+”端流入。将所测得的数据在 $v \sim i$ 、 $v \sim q$ 、 $i \sim \phi$ 、 $q \sim \phi$ 平面上描绘出数据点,看这些点能否在这四个平面中的任一平面上连成一条或几条曲线,若能,则该元件为四类基本元件中的某一类元件。根据元件引出端数目的不同,可将元件分为二端元件和多端元件。今以二端元件为例来说明基本元件的分类。

若有一个二端元件。能将测得的 v 和 i 数据在 $v \sim i$ 平面上连成一条通过所有数据点的曲线,则此二端元件称为电阻。若不能连成一条曲线,这时可将测得的 v 和 i 数据用

^① v 、 i 、 ϕ 、 q 均为时间的函数,这里没有用变量 t 是为了书写方便,以后若这样写就不再注明。

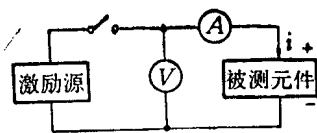


图 1.1-1

$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ 积分关系得到 v 和 q 的数据, 或用 $\phi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ 积分关系得到 ϕ 和 i 的数据(若 $t = -\infty$ 时, $q(t) = 0, \phi(t) = 0$), 看它们能否在 $v \sim q$ 或 $\phi \sim i$ 平面上连成一条通过所有数据点的曲线。若可以连成 $v \sim q$ 曲线, 则称此二端元件为电容; 若可以连成 $\phi \sim i$ 曲线, 则称此二端元件为电感。下面我们来看一下, 假如一只被测元件是一个二端黑箱(所谓黑箱, 是指电路或系统内部情况是不知道的或看不清的、只能看到其端口的一种装置), 它实际上是一个 $1F$ 的电容器, 但若预先并不知道它, 而却企图要在 $v \sim i$ 平面上描出所有的数据点将它连成一条曲线, 可以发现这是徒劳的。因为当测量足够多的 v, i 数据后, 最后所有的数据点将会充满 $v \sim i$ 平面。作为一个例子, 若在此黑箱二端加上一电压源 $v(t) = A \sin t$, 因为 $i = 1 \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right) = A \cos t$, 因此对任一时刻 t_0 , $v = A \sin t_0$, $i = A \cos t_0$, $v^2 + i^2 = A^2$, 即对于每一个 A 值构成一个半径为 A 的圆。而 A 值可以取 $0 \rightarrow \infty$, 所以数据点充满了 $v \sim i$ 平面, 不可能在任何情况下均在 $v \sim i$ 平面上连成一条曲线。但若选 $v \sim q$ 平面, 则数据点将连成一条曲线, 因为 $q = v$, 故它是一条通过 $v \sim q$ 平面坐标原点的直线。

下面我们先讨论基本电路元件, 包括二端元件和多端元件, 再讨论派生元件, 最后介绍系统的分类。

§1.2 二端电路元件

一、二端电阻

一个能为 $v \sim i$ 平面上的一条曲线所表征的二端黑箱, 称为二端电阻。它的 v, i 之间存在代数关系

$$f(v(t), i(t), t) \equiv 0, \quad (1.2-1)$$

一般二端电阻的符号如图 1.2-1 所示。为了在实际设计中有效地使用电阻器, 我们先根据电阻的 $v \sim i$ 特性, 将电阻进行分类, 然后再讨论电阻的一些特性和应用。

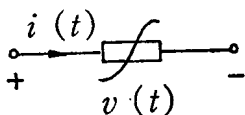


图 1.2-1

1. 分类:

(1) 流控电阻: 若二端电阻的端电压为通过此元件电流的单值函数, 即

$$v(t) = f(i(t), t), \quad (1.2-2)$$

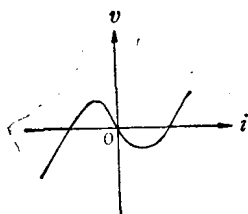


图 1.2-2

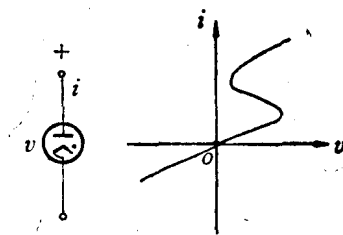


图 1.2-3

则这种电阻称为二端流控电阻,其典型的特性曲线见图 1.2-2。要求每个 i 最多对应一个 v , 但一个 v 可以对应几个 i 。充气管可以用流控电阻来建模, 图 1.2-3 为充气管的符号和 $v \sim i$ 平面上的特性曲线。

(2) 压控电阻: 若通过二端电阻的电流为此元件端电压的单值函数, 即

$$i(t) = g(v(t), t), \quad (1.2-3)$$

则这种电阻称为二端压控电阻, 要求每个 v 最多对应一个 i , 但一个 i 可以对应几个 v 。隧道二极管为压控电阻器。图 1.2-4 为隧道二极管的符号和 $v \sim i$ 平面上的特性曲线。

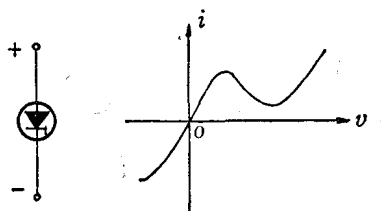


图 1.2-4

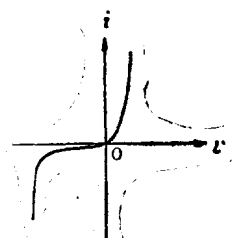


图 1.2-5

(3) 单调电阻: 若二端电阻既是流控的, 又是压控的, 则称此电阻为二端单调电阻, 可以用以下任一式来表征:

$$v(t) = f(i(t), t), \quad (1.2-4a)$$

$$\text{或} \quad i(t) = g(v(t), t), \quad (1.2-4b)$$

g 是 f 唯一存在的反函数, $g(v(t), t) = f^{-1}(i(t), t)$ 。这种电阻的 $v \sim i$ 特性曲线是单调升或单调降的。晶体二极管可以用单调电阻来建模。图 1.2-5 为晶体二极管的特性曲线, 它的 $v \sim i$ 关系式为

$$i = i_s (e^{\frac{q}{kT}v} - 1) \quad (1.2-5a)$$

$$\text{或} \quad v = \frac{kT}{q} \ln \frac{i + i_s}{i_s}. \quad (1.2-5b)$$

2. 关于分类的几点说明:

(1) 时不变与时变电阻: 在以上三种电阻的表示式(1.2-2)、(1.2-3)和(1.2-4)中, t 是独立变量, 这种电阻叫做时变电阻, 见图 1.2-6。若

$$v(t) = f(i(t)), \quad (1.2-6a)$$

$$i(t) = g(v(t)), \quad (1.2-6b)$$

即函数 f 或 g 与 t 无关, 这种电阻叫做时不变电阻。充气辉光管、隧道二极管、P-N 结

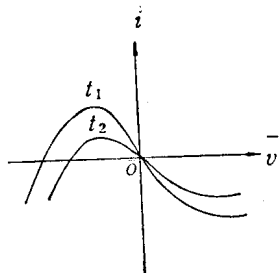


图 1.2-6

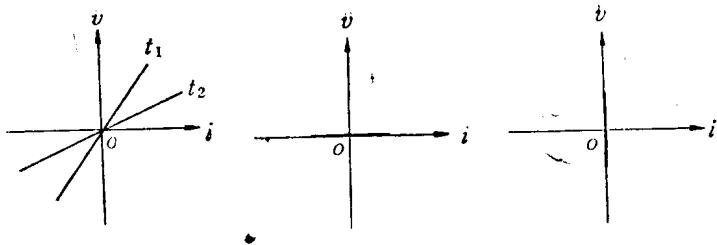


图 1.2-7

二极管都可以用不变电阻来建模。若将锗二极管浸在油槽中，而油槽温度却是随时间变化的，则锗二极管应当用时变电阻来建模。

(2) 线性和非线性电阻：若电阻元件的特性曲线在所有的时间内都是经过原点的直线，则这种电阻称为线性电阻，如图 1.2-7 所示。线性电阻的一般方程为

$$v(t) = R(t) \cdot i(t), \quad (1.2-7)$$

$R(t)$ 为电阻在时刻 t 的电阻值，它是 $v \sim i$ 曲线的斜率。在特殊情况下， $R(t)$ 与 t 无关，即 $R(t) = R$ 。这时线性电阻的方程为

$$v(t) = R \cdot i(t), \quad (1.2-8)$$

R 叫做线性时不变电阻。这种电阻是电路中最常用的，最重要的。

不满足线性电阻条件的电阻，为非线性电阻。流控电阻和压控电阻都是非线性电阻。这些非线性电阻有一个独特的性质，即在电流或电压的某些数值范围内，其特性曲线的斜率为负值，因而通常称它们为负阻元件。负阻器件在电子线路中是很重要的，可以做放大和振荡电路。

实际上，没有一个电阻器是线性的或时不变的。可是，根据使用的情况，很多电阻器可以认为是线性的和(或)时不变的。例如炭膜电阻器，在温度恒定，且 $v \sim i$ 限制在适当范围的条件下，可以用常数 R 来表示它，即认为它是线性时不变的电阻。但严格地讲，它的阻值总是随时间变化的， $v \sim i$ 关系不是在任何情况下均是线性的。

(3) 无源和有源电阻：我们先来定义一般的二端无源和二端有源元件。

若 $E(t_0)$ 表示在初始时刻 t_0 储存于某二端元件中的初始能量， $E(t_0, t)$ 表示从 t_0 到 t 时间内从电源传送到该元件的能量，即

$$E(t_0, t) = \int_{t_0}^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau, \quad (1.2-9)$$

则对所有的初始时刻 t_0 ，对所有 $t \geq t_0$ 的时刻，对所有的容许信号偶^① (v, i) ，当且仅当

$$E(t_0) + E(t_0, t) \geq 0 \quad (1.2-10)$$

时，该元件为无源元件，否则就是有源元件。也就是说，对于某些初始时刻 t_0 ，某些 $t > t_0$ 时刻，某些容许信号偶 (v, i) ，(1.2-10) 不满足时，这种二端元件称为有源二端元件。

下面讨论二端电阻的无源性和有源性。

对于电阻元件，由于它不储存能量，所以对所有的初始时刻 t_0 ，其 $E(t_0) = 0$ 。因而电

① 容许信号偶 (v, i) 表示 v, i 可能的组合。

阻无源性的定义是:在所有时刻内,对所有可能的 $v(t)$ 、 $i(t)$ 容许信号偶,若

$$E(t_0, t) = \int_{t_0}^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau \geq 0,$$

则此电阻为无源的。无源电阻的基本特性是:它永远不对外放出功率。若在某些时刻 t , 某些可能的 $v(t)$ 、 $i(t)$ 偶, $E(t_0, t) = \int_{t_0}^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau < 0$, 则此电阻为有源的。

由上所述可以推论:当且仅当电阻的 $v \sim i$ 特性曲线在所有时刻 t 都位于第一和第三象限(包括 i 轴和 v 轴本身)时,该电阻为无源的。PN 结二极管、隧道二极管、开路、短路和 $R(t) \geq 0$ 的线性时不变电阻器都是无源电阻器。独立电压源和独立电流源都是有源器件,因为在所有时刻,其 $v \sim i$ 特性曲线不是平行于 i 轴就是平行于 v 轴。 $R(t) < 0$ 的线性电阻也是有源电阻,因为 $R(t) < 0$ 时,线性电阻的特性曲线通过原点位于第二、四象限。

3. 非线性时不变电阻的小信号特性:

“小信号”是对信号与偏置相比较而言的。若 $|\text{信号幅度}| \ll |\text{偏置电源幅度}|$, 这时的信号称为小信号。所谓非线性时不变电阻的小信号特性,是指非线性时不变电阻在小信号作用或小信号工作时的特性。

图 1.2-8a 中的电阻为非线性时不变流控电阻 $v = f(i(t))$, 偏置电流为 $I(t)$, 信号为 $\delta i(t)$, $|\delta i(t)| \ll |I(t)|$ 。这就是非线性时不变电阻 $v = f(i(t))$ 在小信号 $\delta i(t)$ 作用时的例子。

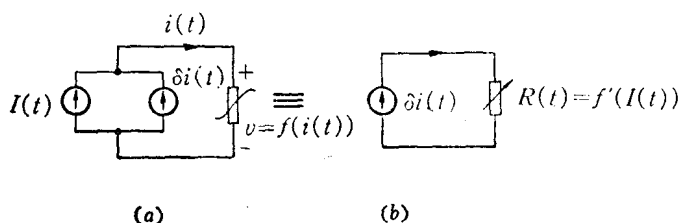


图 1.2-8

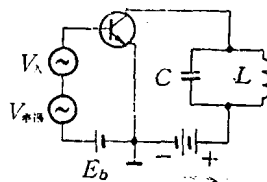


图 1.2-9

为什么要讨论这个问题呢?这是因为在电子线路中,经常要遇到非线性时不变电阻在小信号工作时的情况。例如,混频、调制常属于这类情况,图 1.2-9 是一个三极管混频的等效电路,其中 $V_{\text{本振}} + E_b$ 相当于一个时变的偏置电压, V_λ 为小信号电压,三极管为非线性时不变电阻。

下面来讨论图 1.2-8 的情况。

非线性电阻的 $v \sim i$ 关系为

$$v(t) = f(i(t)), \quad (1.2-11)$$

且 $f(\cdot)$ 对其宗量 i 的导数是连续的。图 1.2-8(a) 中的电流为 $I(t) + \delta i(t)$, 相应的电压为 $v(t) + \delta v(t)$,

$$\therefore V(t) + \delta v(t) = f(I(t) + \delta i(t)), \quad (1.2-12)$$

由于 $\delta i(t)$ 很小,可以用台劳级数将上式在 $I(t)$ 处展开,即

$$V(t) + \delta v(t) = f(I(t)) + f'(I(t)) \cdot \delta i(t) + \frac{1}{2!} f''(I(t)) \cdot \delta^2 i(t) + \dots \quad (1.2-13)$$

又由于 $\delta i(t) = 0$ 时, $\delta v(t) = 0$. $\therefore V(t) = f(I(t))$ 。另外, 由于 $\delta i(t)$ 很小且 $f(\cdot)$ 是平滑的, $\delta^2 i(t)$ 项及更高次项可以略去, $\therefore (1.2-13)$ 变为

$$\delta v(t) = f'(I(t)) \cdot \delta i(t)。(1.2-14)$$

在 (1.2-14) 中, 由于 $f'(I(t))$ 仅与 t 有关, 与 $\delta i(t)$ 无关, 所以它表征了线性时变电阻的 $v \sim i$ 关系。可见, 非线性时不变电阻在小信号作用时, 它相当于一个线性的时变电阻 (见图 1.2-8b), 其电阻值为 $f'(I(t))$, 它是 $f(\cdot)$ 曲线在工作点 $(V(t), I(t))$ 处的斜率。

例 1.2-1: 一个非线性电阻 $v = i^3 + 2i$, 其偏置电流 $I(t) = \sin \omega t$, 求与它等效的线性时变电阻。

解: $R(t) = f'(I(t)) = 3i^2 + 2 \big|_{I(t) = \sin \omega t} = 3\sin^2 \omega t + 2,$

此时 $v \sim i$ 关系为: $\delta v(t) = (3\sin^2 \omega t + 2) \delta i(t)$ 。

由以上讨论的结果, 可以得到一个重要而又有实用意义的结论: 将一个非线性时不变电阻工作在有时变偏置的小信号情况时, 可以得到一个线性时变电阻。当然时变电阻也可以用机械方法得到, 例如可以用一个动臂由电动机带着转动的电位器得到, 但用机械方法体积大, 还会引入噪声。

若非线性电阻的偏置为一直流电源或电池, 则其小信号等效电阻为一个线性时不变电阻, 其阻值等于该非线性电阻的特性曲线在工作点 (V, I) 处的斜率。例如, 非线性电阻 $v = f(i) = i^3 (i \geq 0)$, 其电流偏置为 1 安培, 这时它的等效电阻 $R = f'(1) = 3\Omega$, 它是一个线性时不变电阻。

4. 非线性电阻的应用:

非线性电阻在电子线路中有着广泛的应用。上面介绍的非线性电阻的小信号特性可以用来设计时变网络, 下面再举几个常用的例子。

(1) 整流器: 图 1.2-10(a)、(b) 为整流器电路图及其波形的变换过程。

(2) 倍频器: 在图 1.2-10(c) 中, 若非线性电阻 $v \sim i$ 关系为

$$v = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_n i^n,$$

$$i = A \sin \omega t,$$

则

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 + a_1 (A \sin \omega t) + a_2 (A \sin \omega t)^2 + \cdots + a_n (A \sin \omega t)^n \\ &= b_0 + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots + b_n \sin n\omega t \\ &\quad + c_1 \cos \omega t + c_2 \cos 2\omega t + c_3 \cos 3\omega t + \cdots + c_n \cos n\omega t. \end{aligned}$$

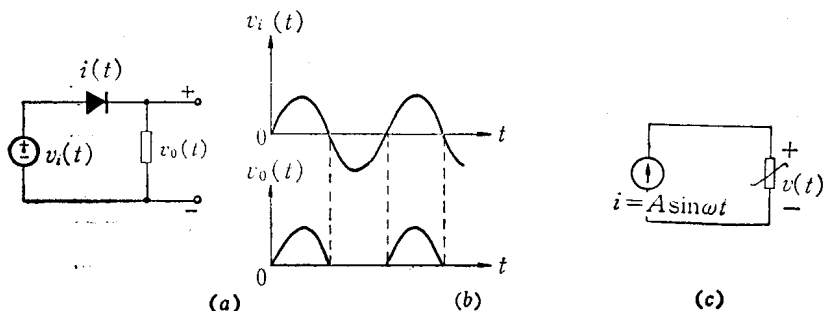


图 1.2-10

可见, 由于 $v \sim i$ 的非线性关系, 虽然电流只是角频率为 ω 的正弦信号, 但在所得到的电压中, 却包含了一个常数项 b_0 , 一个相同角频率为 ω 的项, 及一系列高次谐波项 $2\omega, 3\omega, \dots, n\omega$ 。通过一个滤波器可以取出任一所需要的谐波, 滤除其余的谐波, 这样, 就可实现倍频, 相应的实际电路为倍频器。

若能获得适当的 $v \sim i$ 关系的非线性电阻器, 则利用三角关系, 也可以得到所需要的倍频器。例如由三角关系

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

若有一非线性电阻

$$i = 4v^3 - 3v, \quad v = \cos \omega t,$$

则可以得到

$$i = 4\cos^3 \omega t - 3\cos \omega t = \cos 3\omega t,$$

即得到了三次谐波。

(3) 脉冲发生器: 图 1.2-11 表示利用非线性电阻隧道二极管的情况。图 1.2-11(a) 可以产生脉冲波形(见图 1.2-11(c))。图 1.2-11(b) 为隧道二极管的 $v \sim i$ 曲线,

$$i(t) = I[1 + 0.5\sin(2\pi/T)t].$$

图 1.2-11(c) 可以用逐点法得到, 如下表所示。

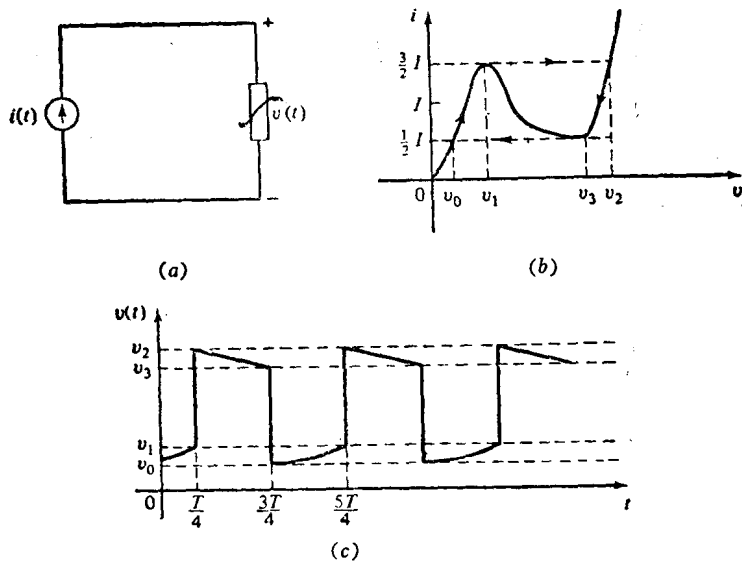


图 1.2-11

$t = T/4$	$3/4T$	$5/4T$	
$i(t) = 1.5I$	$0.5I$	$1.5I$	
$v = v_1$	v_0	v_1	
$v = v_2$	v_3	v_2	

二、二端电容

一个能为 $v \sim q$ 平面上的一条曲线所表征的二端黑箱,称为二端电容。它的 v 、 q 之间存在代数关系为

$$f(v(t), q(t), t) \equiv 0. \quad (1.2-15)$$

一般二端电容的符号如图 1.2-12 所示。

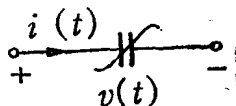


图 1.2-12

1. 分类:

根据 $v \sim q$ 的特性,可以将电容分为荷控电容、压控电容和单调电容。

(1) 荷控电容:若二端电容的端电压为电荷的单值函数,即

$$v(t) = f(q(t), t), \quad (1.2-16)$$

则这种电容称为二端荷控电容。其典型的特性曲线如图 1.2-13(a) 所示。

(2) 压控电容:若二端电容上的电荷为其端电压的单值函数,即

$$q(t) = g(v(t), t), \quad (1.2-17)$$

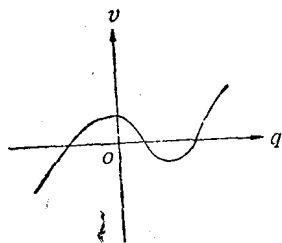
则这种电容称为二端压控电容。图 1.2-13(b) 为它的一种特性曲线。

(3) 单调电容:若二端电容既是荷控的,又是压控的,则这种电容称为单调电容。单调电容同时为荷控的和压控的,因此用(1.2-16)或(1.2-17)来描述都是可以的,此时 $q(\cdot, t)$ 和 $f(\cdot, t)$ 互为反函数,且是唯一的。这种电容的 $v \sim q$ 特性曲线是单调升或单调降的,见图 1.2-14。图 1.2-14 是 MOS 电容器的 $v \sim q$ 曲线,这种非线性单调电容器在集成电路中用得十分普遍。几乎所有实际电容器的特性曲线都是单调增长的。

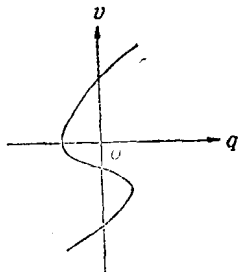
由晶体管势垒电容器组成的变容二极管,也是单调电容,它在实用上很有价值。变容二极管的符号如图 1.2-15(a) 所示,它也是由 PN 结组成(见图 1.2-15(b)),其伏安特性和一般晶体二极管没有什么区别,不同的是变容二极管 PN 结势垒电容的电容量能灵敏地随着变容二极管反向偏置电压的变化而变化,见图 1.2-15(c)。

2. 二端电容的 $v \sim i$ 关系:

由于 v, i 测量比 q, ϕ 方便,且由 v, i 容易求得能量关系,所以在电路理论中,元件的基本特性常用 $v \sim i$ 表示。



(a)



(b)

图 1.2-13

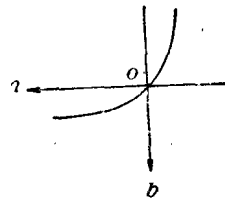


图 1.2-14

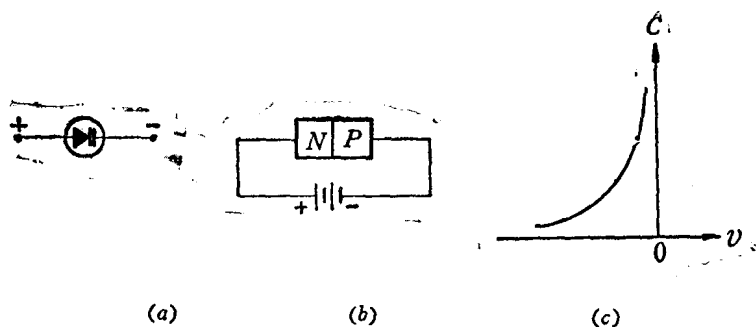


图 1.2-15

在荷控电容中,

$$v(t) = f(q(t), t), \quad (1.2-18)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}; \quad (1.2-19)$$

在压控电容中,

$$q(t) = g(v(t), t), \quad (1.2-20)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\partial g(v, t)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial g(v, t)}{\partial t}. \quad (1.2-21)$$

例 1.2-2: 已知压控电容 $q = (1 + 0.5 \sin t)v^3$, $v = \sin \omega t$, 求其电流。

解: 利用(1.2-21), 对上述 $q \sim v$ 关系式求导, 并用 $v = \sin \omega t$ 代入, 可求得

$$i(t) = 3\omega(1 + 0.5 \sin t) \sin^2 \omega t \cos \omega t + 0.5 \sin^3 \omega t \cos t.$$

(1.2-20)是一般情况的非线性压控时变电容的 $v \sim i$ 关系, 下面讨论其特殊情况, 即讨论非线性时不变、线性时变和线性时不变电容的 $v \sim i$ 关系。

非线性时不变压控电容:

$$\because q(t) = g(v(t)), \quad \therefore i(t) = \frac{dg(v(t))}{dv(t)} \cdot \frac{dv(t)}{dt}. \quad (1.2-22)$$

线性时变电容:

$$\because q(t) = c(t) \cdot v(t), \quad \therefore i(t) = c(t) \frac{dv(t)}{dt} + v(t) \frac{dc(t)}{dt}. \quad (1.2-23)$$

线性时不变电容:

$$\because q(t) = c \cdot v(t), \quad \therefore i(t) = c \frac{dv(t)}{dt}. \quad (1.2-24)$$

3. 无源和有源:

(1) 时不变电容元件: 在时刻 t , 二端电容所存贮的能量为

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^t v(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau + \int_{t_0}^t v(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau \\ &= E(t_0) + E(t_0, t). \end{aligned} \quad (1.2-25)$$

$E(t_0)$ 为在 t_0 以前存贮在电容器中的能量(假定该元件在初始时刻处于松弛状态, 即当