# 大气中的适应过程



科学出版社

# 大气中的[illegible]过程

# 大气中的适应过程

A. M. 奥布霍夫等著
罗四維　巢紀平譯

科　学　出　版　社
1956

## 內 容 提 要

大气中的适应过程是大气中的一种根本的动力过程。本書是由三篇論文集成的，敍述了当流場与压强場不平衡时，即流場有加速度存在时，压强場如何調整而适应流場的問題。

本書可供大学气象系、气象專业在教学上及气象研究工作者在工作上的参考材料。


**大气中的适应过程**

原著者　A. M. 奥布霍夫等

翻譯者　罗四維　巢紀平

出版者　科学出版社

北京朝陽門大街117号

北京市書刊出版业营业許可証出字第061号

印刷者　上海啓智印刷廠

总經售　新華書店

1956年11月第一版　書号：0601　印張：2 1/2

1956年11月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

(沪) 0001—3140　字數：63,000

定价：(11)0.55元

# 目　　錄

# 前 言

大气中的适应过程是大气中的一种根本的动力过程. 它說明当流場与压强場不平衡时,卽流場有加速度存在时,压强場如何調整而适应流場的問題.

这种过程是有着很大的原則意义的. 大家知道, 很久以来气象学者在解释风的成因时就总是說风是由大气压强各地不同所形成的, 而把压强差别的形成則归之于各地冷暖的不同. 他們丢开了十分重要的大气动力过程, 而把大气运动这样复杂的动力問題变成原則上远为簡單的平衡問題和静力問題了. 然而事实上, 在实际大气中气流場和大气压强場是通过动力过程而互相作用和互相制約的. 压强場按实际流場而調整的适应过程是很重要的一面. 由此可見, 上述这种历来相傳的"解释",給气象研究帶来多大的混乱.

A. M. 奥布霍夫通訊院士等通过詳細的研究, 把这个根本問題給了一个非常明确的理論解决,澄清了这些混乱*. 在奥布霍夫通訊院士的指导下, 雅格罗姆(Яглом)、莫宁(Монин)曾作了一系列气压动力变化問題的研究. 这些作者特地用正压大气模式作为研究的对象,以便了解純粹动力作用的影响,替进一步的斜压大气研究作了必要的准备.

应該指出,像这种根本性的研究,是有巨大的实际意义的. 大家知道, 非地轉风对气压变化有着原則性的作用, 它与非地轉风相联系. 大气中不断发生着适应过程, 因此对适应过程的了解是預报大气压强变化所不可缺少的. 适应过程中所考虑的輻散 (速度位势的拉普拉斯式)方程〔雅格罗姆文(37),奥布霍夫文(37)式〕是一个基本

---

*在大气环流理論中,"热力作用"和"动力作用"的关系上所存在着的类似的分歧还沒有彻底解决. 至今仍然有許多人企圖越过复杂的动力过程取消或不恰当地簡單化而單純从輻射場甚至温度場直接"解釋"大气环流的構造和变化(包括"季风").

的动力方程．对于时間較短范圍較小的天气变化的預报尤其是一个重要的基础．事实上，近年来一些流体力学預报(数值方法)的研究就已經开始这样考虑了．而奥布霍夫通訊院士所給的計算例子更說明了这一点．

从这問題研究的历史来看，資本主义国家的学者在这方面也是有着一些研究的，特别是洛斯倍 (Rossby, 1939, *J.Mar. Res.*) 首先指出大气压强場按气流場来調整 (adjustment) 的重要性，并且强調流場和压强場相互調整的作用是大气中的基本动力过程．在这一点上洛斯倍始終和皮叶克尼斯站在完全相反的地位．然而洛斯倍对这問題的处理还不是很完全的、說服力也不很够．在洛斯倍以后堪 (A. Cahn, 1945, *Jour. Meteor.*)、萊脫行 (P. Raethjeu, 1950, 1954, *Archiv für Met. Geop. u Bioklim. Ser. A*)、部林 (B. Bolin, 1953, *Tellus*) 等人的研究沒有多少原則上新的結果．薛尔曼 (L. Sherman, 1952, *Jour. Meteor.*)、彼得孙 (S. Petterssen, 1953, *Tellus*) 以及在数值預报研究中部林 (1955, *Tellus*)、霍尔曼 (Hollmaun, 1955, *Met. Runds.*) 所提出的輻散方程与奥布霍夫、雅格罗姆的輻散方程基本上是一样的．但是从問題提法的原則性、处理方法的一般性、系統性来說，則本書所譯出的奥布霍夫通訊院士等的工作无疑是最好的．

顧震潮

# 論地轉风問題*

A. M. 奥布霍夫

## 提 要

本文包括了在科里奥利力場中流体运动方程的探討. 对在自然界中所观測到的风場和压强場間的联系提供出合理的解釋. 本文指出: 地轉偏差引起在大气中以極大速度傳播的波的形成,这是由于在这一段时間过程內压强場"适应作用"(адаптируется)——变为与速度場相适应——的結果. 研究了关于"所适应了的"流体动力場随时間改变的問題.

"风的气压定律"——一个极为重要的理論气象学的成果, 已經紧密地与大气工作的实践相結合. 在大气中, 在气压分布数据的基础上計算出来的梯度风是与观測到的风的分布非常配合的. 压强場和风場間的联系問題,已經有了半世紀多的历史,由此可見这是屬于动力气象学的一个經典問題. 但是一系列有关压强場和风場間的联系的原则性問題,直到現在还沒有充分完善的理論上的研究.

众所周知,梯度风的表达式是在常定运动中,軌跡線和等压線重合的假定下, 由大气动力学方程得出的. 在探討大規模的大气运动时,在很多情况下,能够在运动方程式中, 省略那些与軌跡線弯曲有关的, 描写空气質点加速度的非線性項次. 对于气流的速度分量而言, 适合以上假定以及場的常定性假定的极簡單的理論表达式称地轉风. 在計算实际风时,对于实用的目的而言,常常利用地轉风来作为一种精确的近似[1].

---

*本文譯自 Известия Академии Наук СССР, серия географическая и геофизическая, том 13, №4, 1949.

当进行理論分析时，用地轉风来代替实际风的可能性，自然会发生問題：如果在某些时刻(規定当作起始时刻)在某些有限区域中(水平方向)具有偏差的地方(实际风偏离地轉值)，則过程將如何发展起来呢？

自然可以預料：这样的偏差应該引起流体动力場的(一般說来无論压强場和速度場)巨大改变，而归根結底致使在大气新的狀态中压强場和风場彼此相适应．我們称这种假定的場的改变过程为場的“适应”(адаптация)过程．

在大气中*对于流体动力学的适应机構的闡明，按照我們的意見，应当改进对压强場和风場間的联系的合理了解．大家知道，地轉风概念不加批判的使用曾在气压变化理論中引起一系列的誤解**．在現在工作中的大气中流体动力适应理論应該指出：在解决这些或者別的問題时，怎样来使用对实用气象学极为重要的地轉风概念，才不会得到与大气动力学的基本定律相違反的矛盾．这首先就是屬于压强場在时間上变化的理論．

## 1．基本方程組

在动力气象学的問題中，我們的对象是介質的相对运动，这种运动是在与自轉地球表面相联系的坐标系統中所研究的．由于計入了科里奧利加速度的附加項和引力位勢用重力(地球的引力和地球自轉引起的离心力的合力)位勢代替的結果，这些描写大气运动的方程組与对于慣性坐标系統正确的一般流体力学方程不同．由于在动力气象学的大多数問題中所研究現象的水平范圍較一般大气的高度(这个高度是自然的垂直范圍)大得多，所得到的一些方程在这种情况下可以簡化，詳尽的結論可以在动力气象学教程[2]中找到．

在現在的工作中，我們采用簡化了的大气动力学基本方程組．这些方程可以用下面的形式表示：

---

*注意：大气运动最主要的特性是地球自轉偏向力——科里奧利力的存在．

**这里所指出的是所謂“傑菲利斯定律”，按照这个定律如果在所探討的区域中，实际风絲毫不差地与地轉风相脗合，則气压場对时間的微商同样等于零．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-2\omega_z v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+2\omega_z u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$o=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0, \qquad (4)$$

式中 $u$ 和 $v$ ——速度向量的水平分量; $w$ ——速度向量的垂直分量; $p$ ——气压; $\rho$ ——密度; $g$ ——重力加速度; $\omega_z$ ——地球的自轉垂直角速度. 在緯度 $\phi$ 处 $\omega_z=\omega_0\sin\phi$, 此处 $\omega_0=7.29\times10^{-5}$秒$^{-1}$. $Z$ 軸方向垂直(沿重力位勢面的法線), 坐标 $Z$ 自某一起始位勢面——海平面——算起. 所写成的方程組屬于右手坐标系統, 如轉換到左手系統我們应該改变 $\omega_z$ 的符号.

連續性方程 (4) 是在微分形式中表达物質不滅定律的精确的方程. 在方程(3)中省略了包含質点加速度的垂直分量和科里奥利力的垂直分量的那些項次, 以及在方程(1)和(2)中省略了假定形式为 $2\omega_x w$ 及 $2\omega_y w$ 的項次*, 所以方程組(1), (2), (3)与"原来"的方程組不同. 在动力气象学的問題中, 这些簡化的規律已經完全清楚的闡明在柯欽院士的工作[2] 中. 在現时, 上面写出的大气动力学方程組, 对于在这个范疇中的大气的理論研究而言是基本的方程組; 作为例子, 如在 И. A. 基別尔的著名的工作中[3] 所表明的那样. 应当指出, 如果只研究对于与地球的大小比較起来很小的那些地表面区域, 人們才可以不管重力位勢面的弯曲而采用笛卡儿坐标 $(X, Y)$. 方程組(1)—(4)能够簡化自轉地球上的大气运动問題到某些"平面的"問題. 同样的簡化提供出不少方法論上的兴趣, 使能够研究与科里奥利力的作用有联系的大气运动的特性, 而不因为有了地球曲率的計算以及引进了曲線坐标而使問題复杂化. 按照动力气象[3,4] 这样的研究方

*后面这假定的理由是: 在大气的情况中, 对于几百千米(水平方向)范圍的运动, 气流速度的垂直分量与风速的水平投影比較起來很小(不超过后者量級的 1%), 加速度的垂直分量与重力加速度 $g$ 比較起來极小.

法,在工作中以及在潮汐理論中曾屡次地使用. 与上面指出的作者一起,我們認为重力加速度 $g$ 是絕对常数,同时忽視了 $\omega_z$ 的空間变化*.

对于方程組(1)—(4)我們写出边界条件,在地球表面垂直速度应当变为零:

$$\text{当 } z=0 \text{ 时}, \quad w=0. \tag{5}$$

除此以外,当 $z\to\infty$ 时,显然 $p\to 0$ 和 $\rho\to 0$.

从方程(3)我們得到积分的結果:

$$\int_0^\infty \rho dz=\frac{1}{g}p(x,\ y,\ 0,\ t). \tag{6}$$

我們認为当高度 $z$ 增大时,密度 $\rho$ 將迅速減小,因此其形式为

$$\int_0^\infty \rho z dz, \quad \int_0^\infty \rho u dz, \quad \int_0^\infty \rho u^2 dz$$

的积分收斂.同样应当指出,物理上非常明显的叙述質量通量在无窮高处变为零的条件:

$$\text{当 } z\to\infty \text{ 时} \quad \rho w\to 0. \tag{7}$$

連續性方程(4)乘以重力加速度 $g$,并在零到无窮高的范圍內对 $z$ 积分. 考虑到方程(3)以及条件(5)和(7),得到

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial p(x,y,0,t)}{\partial t}=-\int_0^\infty\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dz, \tag{8}$$

方程(8)表示垂直大气柱的質量平衡.

基本方程組(1)—(4)并不是閉合的,因为对于五个未知函数($u$, $v$, $w$, $p$, $\rho$) 我們只有四个方程. 增添的第五个方程是众所周知的热流入量方程[6]. 应注意的是在純粹动力学性質的問題中,可以不引进在显式中的这个方程,而規定認为热力学特性中的一个(溫度,熵)是坐标和时間的已知函数; 或者利用“正压模式”——假定密度只是气压的函数. 因为以后采用了正压大气的模式,所以在現在的工作中,我們打算只涉及压强場和风場間联系的动力学方面的問題.

*在所簡化的“平面的”問題中,后面的假定是必然的;但是应当注意,在研究行星尺度的运动时,$\omega_z$ 的緯度变化可以証明是極重要的.

对于整个以后的研究,我們將采用線性化起始方程(1),(2)的方法,即在这些方程的左方省略关于气流的速度分量为二次的对流項.線性化后的运动方程具有以下形式*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2\omega_z v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2\omega_z u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{10}$$

当研究与地轉风有联系的問題时,引进被線性化的运动方程(9)和(10)完全合乎規律,因为当附加有常定性的假定时(当$\frac{\partial u}{\partial t}=0$.$\frac{\partial v}{\partial t}=0$的情形),正是从这些方程里得到大家所熟悉的地轉风分量的表达式:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ v&=\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

在(9)和(10)的左方保留对时間的微商使我們能够在流体力学場中研究非常定性的过程(适应現象).这种研究能够在帶有足够完备性的線性数学理論的范疇內进行.在大規模过程中应用線性化后的运动方程是无誤的,証明这一点的某些物理上的見解將在后面一节中引証.

## 2. 运动方程对高度的平均

在对垂直平均的速度場的研究中引进:

$$\boldsymbol{u}(x,y,t)=\frac{\int_0^\infty \rho u dz}{\int_0^\infty \rho dz}=\frac{g}{p(x,y,0,t)}\int_0^\infty \rho u dz \tag{12}$$

---

*我們省略了速度和速度空間微商的二次項.不需要預先假定关于速度对时間的微商以及相关的气压梯度的微小性.这个原則今后將經常采用.

以及类似的

$$\boldsymbol{v}(x,y,t)=\frac{g}{p(x,y,0,t)}\int_0^\infty \rho v dz. \tag{13}$$

令 $P_0$——在海平面上$(z=0)$的标准气压，即按极大的面积平均的地面气压值．对于地面气压的距平引进專門的符号：

$$\pi(x,y,t)=p(x,y,0,t)-P_0, \tag{14}$$

以及观测到的气压对标准气压的比值：

$$\mu(x,y,t)=\frac{p(x,y,0,t)}{P_0}. \tag{15}$$

实际上 $\mu$ 极接近于 1．因为 $P_0\approx1000$ 毫巴，地面气压变化的振幅的平均值不会超过 40 毫巴，所以

$$|\mu-1|\leqslant 0.04.$$

今后我們將方便地研究近似值：

$$U(x,y,t)=\mu\boldsymbol{u}(x,y,t)=\frac{g}{P_0}\int_0^\infty \rho u dz, \tag{16}$$

和

$$V(x,y,t)=\mu\boldsymbol{v}(x,y,t)=\frac{g}{P_0}\int_0^\infty \rho v dz \tag{17}$$

以代替 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$*.

將方程 (9) 和(10)乘以密度 $\rho$．由于我們已經規定把关于速度的二次項省掉，所以密度就可以放入对时間的微商符号內，因为

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\rho u}{\partial t}-u\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho u}{\partial t}+u\frac{\partial\rho u}{\partial x}+u\frac{\partial\rho v}{\partial y}+u\frac{\partial\rho w}{\partial z}\approx\frac{\partial\rho u}{\partial t},$$

所以方程(9)和(10)可以写成以下形式：

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}-2\omega_z\rho v=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\rho v}{\partial t}+2\omega_z\rho u=-\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{19}$$

*应当指出：实际上 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 与 600 毫巴等压面上的风速分量相当．

把方程(18)和(19)对整个大气的高度 $z$ 积分，并除以常量 $P_0$，又利用(16)和(17)所得到的結果可以写成下面的形式*:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-2\omega_z V=-\frac{1}{P_0}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+2\omega_z U=-\frac{1}{P_0}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}, \tag{21}$$

式中

$$\mathrm{P}(x,y,t)=\int_0^\infty p d_z=\int_0^{p(x,y,0,t)} z dp=\int_0^\infty gz\rho dz \tag{22}$$

是單位截面垂直空气柱的位能．对于方程(20)和(21)应当加上写成新的形式的連續性方程(8)，則得

$$\frac{1}{P_0}\frac{\partial \pi}{\partial t}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right). \tag{23}$$

只要位能 P 是地面气压的已知函数，那末方程 (20)，(21) 和 (23)就構成了閉合的方程組．因为在現在的工作中，只限于探討正压模式**，所以这个条件可以滿足．同时 $P(\tilde{p})$（此处 $\tilde{p}$ ——地面气压）可以在气压公式(3)的基础上得到．作为例子，我們考察用多性(политропа) 方程来联系气压和密度的情况．

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha}, \tag{24}$$

此式当 $\alpha=K=\frac{C_p}{C_v}$ 时变为絕热方程．利用方程 (3) 并决定位能P (22)，在这种情况下我們得到:

$$\frac{1}{P_0}\mathrm{P}=\frac{\alpha}{(2\alpha-1)}H_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}, \tag{25}$$

*(20)及(21)右端应該还有因子 $g$ ——譯者．

**如果我們不用正压模式，并且引進垂直空气柱的热力学性質(較适当的是熵，因为在絕热过程中它是不变的)，那末，我們得到与問題完全相似的方程組来代替在現在論文中所研究的上面的方程組，其右方是已知的．例如，这样的方程組可以在傑菲利斯的工作中[7]找到．

式中 $P$——地面气压；$H_0=\frac{P_0}{g\rho_0}$——适合标准气压和密度值 $(P_0\rho_0)$ 的均質大气的高度．这个高度可以取 8 千米高；

$$H_0\approx 8\cdot 10^3\text{米}.$$

由于 $\mu=\frac{P}{P_0}$ 与 1 的差非常小，在方程(25)的右方，可以按照无因次量次

$$\chi=\mu-1=\frac{\pi}{P_0}\tag{26}$$

展成級数，在这种情况下并只取 $\chi$ 的線性項：

$$\frac{P}{P_0}=\frac{\alpha}{2\alpha-1}H_0+H_0\chi.\tag{27}$$

將(27)和(26)代入方程(20)，(21)和(23)中，我們得到描写对高度平均了的大气运动場的閉合方程組：

$$\frac{\partial U}{\partial t}-2\omega_z V=-gH_0\frac{\partial\chi}{\partial x},\tag{28}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+2\omega_z U=-gH_0\frac{\partial\chi}{\partial y},\tag{29}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right),\tag{30}$$

式中

$$\chi(x,y,t)=\frac{p(x,y,0,t)-P_0}{P_0}.$$

在較一般的情况下(和上面比較起来)，若用垂直大气柱的任意的"狀态方程式"：

$$P=F(\tilde{P})$$

$(\tilde{P}$——地面气压) 来代替方程(24)，則在方程(28)和(29)中采用由公式

$$H_1=\left(\frac{dP}{d\tilde{P}}\right)_{\tilde{P}=P_0} \tag{31}$$

决定的"有效"(эффективная)高度 $H_1$ 来代换均質大气的高度 $H_0$.

按照傑菲利斯(他首先采用运动方程式对高度的平均方法,此法已在本文中加以利用)在經驗資料的基础上,所計算出来的大气有效高度是 7.3 千米.

方程組 (28)—(30) 与大家熟知的在潮汐理論中[5] 所得到的方程組完全相似, 幷且高度 $H_1$ 与水的深度相当. 傑菲利斯[7] 首先指出这种关系, 但是他只考虑了所有的量作周期变化的那种預先規定的情况. 如果問題这样提法对于潮汐理論是完全自然的話,那末(对于气象学的应用而言)帶有起始条件問題(关于場的狀态的"預报"問題)的方程組(28)—(30)的解答, 兴趣幷不更小. 后者的解答,如我們在下面看到的, 能够在关于大气中流体动力場的"适应"机構的問題上給出确定的解答.

对平均高度的大气动力学方程組, 同样能够解釋做处在科里奥利力場中或者类似的旋轉力場* 中的二維可压縮流体薄层的流体动力学方程組. 相当于这种解釋的声音傳播速度,由

$$c=\sqrt{gH_1} \tag{32}$$

决定. 在这种情况下,量 $\chi$ 解釋成薄层的密度的相对变化. 在 $H_1=H_0$ 的情况下, 速度 $c$ 与大气中的等溫音速相符合 (在正常的条件下約 280 米/秒).

如果以当时傑菲利斯对速度 $c$ 的計算为基础 ($H_1=7300$ 米), 那末,我們得到极接近的值:

$$c=270\text{ 米/秒}.$$

上面指出的对線性理論正确的相似性, 在大气运动对高度平均的非線性理論中同样有效(在一定的附帶条件下).

*旋轉力(正比于速度幷且和运动方向垂直)例如当电荷在磁場中运动时就会发生, 幷且在运动方程中的描写完全和科里奥利力相似.

今后，为了叙述简單，我們規定称規定値 $U, V$ 的二維矢量場为气流的速度場．但是，不应該忘記标量乘数

$$\mu(x,y,t)=1+\chi(x,y,t)$$

实际上极近于 1*，所以这个場不同于眞正的对高度平均的速度場．

## 3．运动方程的研究．位势渦度

如果在研究中引进流函数 $\psi(x,y,t)$ 和速度势 $\varphi(x,y,t)$，則方程(28)—(30)能够写成对于今后的研究較方便的形式，令

$$U=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{33}$$

$$V=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{34}$$

两維矢量場 $(U,V)$ 的基本特性——位势渦度 $\Omega$ 和散度 $D$ 直接通过流函数 $\psi$ 和势函数 $\varphi$ 表达：

$$\Omega=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=\Delta_1\psi, \tag{35}$$

$$D=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=\Delta_1\varphi, \tag{36}$$

式中 $\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$——二維的拉普拉斯算子．

在对于給定的問題在无窮远处的自然边界条件下，在二維区域中解相应的泊阿桑方程**，公式(35)和(36)能够按照我們給出的速

*引进乘数 $\mu$，我們成功地得到恰恰和开始的方程組(1)—(4)結果一样的連續性方程(30)．

**如果散度 $D$ 只在某些边界区域上不等于零，或者在无窮远的地方减小得非常快，則势函数 $\varphi$ 能够用泊阿桑积分的帮助而有效地構成：

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\lg\left(\frac{1}{r}\right)D(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta,$$

式中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$．

其次流函数 $\psi$ 由下面的方程决定：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=V-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-U+\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

因为作为这个方程組积分条件的方程(36)总是成立的，所以这个方程組完全可以积分．由此可見，$\varphi$ 决定后，流函数可以簡單的由积分求出．