

大地测量研究专辑

国家测绘总局测绘科学研究所编

第二辑

716

5.11

测绘出版社

大地测量研究专辑

国家测绘总局测绘科学研究所编

第二辑

测绘出版社

本辑选编了十五篇大地测量方面的研究文章,内容有:大地主题反解公式,高斯平面坐标转换公式,低等三角点平面坐标转换,关于尤拉角问题,应用概率论观点对最小二乘法理论的补充和拓广,应用电子计算机作大规模平差的方法,条件平差时电算的编号和信息,天文方位角人仪差的研究,对旧二网区的精度分析、微波测距仪零点差的测定、我国24米基线尺的长度基准、和海面地形在大地测量上的应用等问题。本书供从事大地测量的科技人员参考,也可供测绘专业院校师生参考。

大地测量研究专辑 (第二辑)

国家测绘总局测绘科学研究所编

•
测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

•
开本 787×1092 1/16 印张 12³/₄ 字数 295 千字

1980年7月第一版 1980年7月第一次印刷

印数: 1—3600册 定价: 1.95元

统一书号: 15039·新147

前 言

“大地测量研究专辑”第一辑出版后，得到我国广大测绘工作者的积极支持。对促进我们的编辑工作起了积极作用。为了进一步贯彻“百花齐放，百家争鸣”的方针，共同促进我国的测绘事业发展。这一辑除了收集我所大地测量研究室 1979 年的部分论文外，经测绘出版社推荐，还收集了中国人民解放军测绘学院以及武汉测绘学院等单位的六篇论文。凡是论文题目中有星号者均属外来稿件。

在编辑过程中，曾得到武汉测绘学院、中国科学院测量和地球物理研究所以及中国人民解放军测绘学院等单位的有关同志的大力支持，惠予提供宝贵意见，特此致谢。

由于水平有限，错误和不足之处在所难免，敬请读者批评、指正。

国家测绘总局测绘科学研究所

1979年11月

目 录

关于我国的近代大地测量〔注一〕	张志新 (1)
大地主题反解公式	张志新 (6)
高斯平面坐标系统转换的微分公式	周忠谟 (15)
地球椭球定位中, 短轴与地轴的不平行和起始大地子午面与起始天文子午面的 不平行的影响和尤拉角的关系*	朱华统 (27)
低等三角点平面坐标系统的转换	曾启雄 (39)
正态分布律的扩广与应用	冯浩莹 (44)
最小二乘法理论的补充〔注一〕	冯浩莹 (80)
稀疏矩阵和多重分解法*	刘长学 (107)
关于三角网条件观测 (按角度) 平差算法语言电算程序的编号和信息* ...	於宗伟 (124)
天文方位角人仪差的研究*	宋成骅 (138)
一个旧二网区的精度分析	左传惠 (154)
微波测距仪零点差及其测定方法的讨论*	张良璐 (166)
我国 24 米基线尺的长度基准*	周祥甫 (179)
海面地形及其在大地测量上的应用	梁振英 (184)

关于我国的近代大地测量^(注一)

张 志 新

中国人民掌握测绘知识有着悠久的历史。早在两千多年前的春秋战国时期就有了实测的地图。七十年代初期,我国考古学者曾在湖南省的长沙汉墓中发现了二千一百年前的古代实测地形图。这说明,中国的测绘工作在二千多年前就有了一定的成就,在农业、水利和军事等方面已经占据了比较重要的地位,人们可以用简易的测量工具进行治水兴农的劳动。在史书上,有很多关于测量的记载。例如公元六七三年—七二七年,唐代的张遂等在河南省扶沟县实测了子午线一度的弧长约为132.03公里,是当时世界上最早的子午弧长测量之一,也是科学史上划时代的创举。

在中华人民共和国成立后,大地测量学和其它科学一样得到中国共产党和人民政府的高度重视。随着工农业生产、国防建设和科学技术的不断发展,古老的大地测量学无论是在生产实践还是在基础理论上,都取得了较大的进步和可喜的成就。

在旧中国,我国的大地测量只作了一些零星工作,也没有完善的作业细则,坐标系统紊乱,精度很低。因此,我国的天文大地网布设实际上是从新中国成立后才开始的。解放以来,我国测绘工作者按统一的大地测量法式的要求,在全国范围内沿经纬线方向布设了一等三角锁,每隔二百公里左右,在锁的交叉处设有起始边长和起始方位角。就是在我国边缘地区青藏高原也布测了电磁波测距导线网。

全国的一等三角锁总长度近八万公里,构成一百二十多个锁环,近四百个锁段。此外,有十多个闭合的一等导线环。一等三角锁的测角中误差,按菲列罗公式计算为 $\pm 0''.55$ (平均值)。基线扩大边上拉伯拉斯方位角自由项平均值为 $\pm 1''.00$ 左右;纬度中误差为 $\pm 0''.20$ 左右;经度中误差为 $\pm 0''.01$ — $\pm 0''.02$ 之间;基线测量的相对中误差小于1:100万。

全国全面的二等三角网,分两种情况:1958年以前是每一个一等锁环内布设两个十字交叉的二等基本锁,把一等锁环分为四个部分,然后再在这些部分内敷设二等补充三角网,测角中误差为 $\pm 1''.8$ 左右;一九五八年后为了提高天文大地网的精度,改成在一等锁环内设二等全面网,在网中加测起始边长和起始方位角,网的测角中误差小于 $\pm 1''.0$ 。

全国一、二等三角点共计五万多,五十年代末期基本完成三角测量部分。六十年代初

(注一) 本文系1978年在德意志联邦共和国考察时所作的报告。

期在青藏高原实测了一等电磁波测距导线。电磁波测距导线的折角测角中误差为 $1''.0$ 左右。电磁波测距导线边长精度分别为 $1:50$ 万（光电测距边）和 $1:20$ 万（微波测距边）。

从六十年代起，我国的天文大地网进入到修测与改造阶段，通过分析，对网中精度差的地方进行改造与重测，使天文大地网的精度得到进一步的提高，以满足各方面的要求。局部的重测与改造，侧重于拉伯拉斯方位角和起始的边长。对于锁段边长条件自由项和方位角条件自由项超限的方位角和基线网扩大边一般都进行了重测。对于锁段过长者，一般皆在锁段中央加测了起始边和拉伯拉斯方位角。这项工作已在七十年代中期完成。

这样，在我国广阔的领土上，东起碧波荡漾的东海之滨，西至冰雪覆盖的喜马拉雅山麓，北自林海雪原的兴安岭，南达美丽富饶的南海诸岛，在这幅员辽阔的土地上形成了一个统一的高精度的平面坐标控制体系。

我国的一等锁环为了早日满足各方面的急需，从五十年代中期起，曾陆续以部分锁环为一个单独区域而进行了分区平差。在布设天文大地网的开始阶段，我们设想了一个整体平差全部天文大地网的规划。随着科学技术的发展，在七十年代初我们又做出了一等锁环和全部的二等全面网一并进行整体平差的计划。对于天文大地网的平差，我们采用投影法，将所有的观测方向值和起始边长，全部改化到参考椭球面上。为了这种归算，我们从五十年代中期起，在全国范围内进行了重力测量工作。我国的重力测量主要是为了大地测量和地质普查与勘探而施测的，六十年代开始又应用于地震的趋势预测和预报工作。

我国的重力测量控制点分为三级，即：基本点、一等点和二等点。基本点和一等点属国家重力控制点。基本点原则上要构成闭合环，一等点是由基本点以辐射方式或闭合方式向外联测的。基本点的联测中误差不超过 ± 0.15 毫伽，一等点不超过 ± 0.25 毫伽。各个地区为了施测各种用途的重力点，以国家控制点为基础建立本地区的二等重力控制点。

大地测量需要天文与重力测量以测定大地水准面高程，我们通常把他叫做天文重力水准。我们的天文重力水准分二级：高精度与低精度。高精度的重力测量范围为 $4l$ （ l 为两个天文点间距离之半），低精度是 $3l$ 。重力加密点的分布是以天文点为中心，由密渐疏。天文重力水准难以布设的地区，则实测天文水准。无论是天文重力水准或天文水准，由它们所求得的高程异常的精度，应能满足从地面大地原点到最边远点所积累的误差不超过 ± 3 米。

众所周知，一个国家必须有它自己的高程控制系统。我国的高程控制基础是国家的一等水准网，它的总长度近9万公里，目前已完成一半。为了研究地壳升降运动，我们在一些地段进行了重复测量。我国的高程起算面是黄海平均海水面。水准测量每隔2—6公里埋设标石一块。水准观测的视线长度一等小于50米，测段往返测之限差为 $2\text{mm}\sqrt{R}$ ，依往返测不符值估算的每公里平均值的中误差一般 $< 0.45\text{mm}$ ，往返测的平均值每公里中误差为 $\pm 0.5\text{mm}$ 。

我国最高的水准点，是海拔6120米，距珠穆朗玛峰仅有13.6km，最高的重力点距珠穆朗玛峰只有1.9km，海拔高为7790米。

综观我国这样一个天文大地网，即一等三角锁，二等三角网以及重力网点和水准网，是按统一的规划，统一的要求，统一的精度而进行施测的。可以说是科学性很强的天文大地

网。它可以满足各方面的研究和精度需要。就其精度指标来看,也是比较先进的,因为它完成于 20 世纪,采用了当代的新兴技术,而用以指导布网原则的理论也集中了世界各国在 19 世纪完成天文大地网的先进经验。就其规模而言,由于我们是在 960 万平方公里的领域内布测这样的网,它的规模是宏大的。一个具有较高精度的、布满全国的天文大地网在我国已经建成,它已经而且正在我国国防和国民经济建设中起着重要的作用。

二

在大地测量学的一些基础理论方面,我国的测量工作者,在学习前人理论的基础上通过他们自己的实践,也曾有过一定的建树和造诣。今仅摘其主要者加以叙述如下。

1. 五十年代中期,由于测量实践中有了自己的新经验,而开始酝酿制订我国的大地测量法式。五十年代末期产生了我们自己的大地测量法式,这是我国大地测量工作者的集体劳动结晶。这个法式去掉了二等基本锁和二等补充网,而代之以二等全面连续网。二等全面网的测角精度也提高了,不得超过 $\pm 1''$ 。三、四等三角点的精度也相应地有了提高,三等为 $\pm 1''.5$,四等为 $\pm 2''.5$ 。这个大地测量法式是在总结经验基础上制订的,它集中反映了我国大地测量进入了一个具有一定技术水平的新阶段。

2. 中国的大地测量工作者面对如此庞大的天文大地网的整体平差工作是付出了巨大的辛勤劳动。从五十年代末期到六十年代中,他们曾提出过十多种平差方案。经过评议和实验最后确定采用用条件法进行联系的分区坐标间接观测平差法。该法的主要特点是:它的总联系方程的性质要比一般的间接观测平差法为好;另外,由于在该法中各分区的方程组成是完全独立的,这对数据的输入和程序的编制也会带来一定的方便。关于方程的解算,是在大型通用数字计算机上采用直接法进行。这个方案是我国大地测量工作者在总结前人经验的基础上得到的,它对加速进行平差是有其优越性的。

3. 在椭球面大地测量学方面,我国的大地测量工作者,也付出了辛勤劳动。五十年代初大地主题正解的短距离公式我们是使用德国先辈测量学家士赖伯公式。经过实践与总结,我国大地测量工作者发展了该公式,提出了一种新的方法。在长距离大地主题正反解公式上,也在白塞尔公式基础上得出了一些新的解法,这些都是我国大地测量工作者勤奋好学,接受前人有益的遗产并结合自己的实践经验,在大地测量学基本理论方面的一些贡献。

三

我国大地测量工作者成功地精确地测定了世界最高峰珠穆朗玛峰的海拔高程。

珠穆朗玛峰是世界第一高峰,它位于我国和友好邻邦尼泊尔的边界上。它的精确高程,历来为各国测量和地理工作者所关注。近百年来,国外曾对它的高程进行过多次测定,但一直未能获得较为满意的结果。这是由于珠穆朗玛峰地区特殊自然地理条件的限制。在观测时没有测量标志,造成照准误差过大;加上没有布测相当密度的天文和重力点,而且他们都是在距珠穆朗玛峰相当远的地点进行观测的,更没有量取峰顶最高点的覆

雪厚度，所以，无论在观测和归算方面都不易获得精确的结果。

我国大地测量工作者，在中国登山队的协助下，出色地完成了测量珠穆朗玛峰的高程任务。远在 1966—1968 年，我们就两度把国家的三角网和水准点以及天文点和重力点，均向着珠穆朗玛峰地区推进。在珠穆朗玛峰地区由定日的国家一等导线的一条边上，向珠穆朗玛峰方向布设了一条长约 60 公里的二等三角锁，在二等三角锁的南端，沿东、中、西绒布三条冰川布设了三条三等三角锁，作为测定珠穆朗玛峰的平面控制。又从定日的一个国家水准点起，布设了一条二等水准线路到绒布寺南，并用水准测量联测了离珠穆朗玛峰仅有 13.6 公里，高程为 5680 米的一个三角点，以它作为测定珠穆朗玛峰高程的起算点。二等锁的两端，都用 NASM-6A 型光电测距仪测定起始边长，天文点及重力点都有了适当的密度，以便推算测站的垂线偏差和控制三角网的方位角。同时也在定日及绒布寺地区进行了垂直折光的试验与研究，为修正各观测珠穆朗玛峰高程点的垂直折光差之用。当时，也曾交会了珠穆朗玛峰的位置，推算了珠穆朗玛峰的高程。但由于重力点和天文点的密度不足，峰顶上没有树立标志也没有量测覆雪深度。所以精度不高。1975 年，正值我国登山队再次组织登峰的时候，我国登山健儿首次在峰顶上树立了 3.51 米高的红色金属觐标，还量测了当时珠穆朗玛峰顶峰上觐标标心处的覆雪厚度。

同时以过去的二等三角锁为基础，重新布测了三等三角锁和微波测距导线。在三角锁和导线的端点测定了拉伯拉斯方位角，加测了天文点和重力点，形成了两条天文水准路线，把天文点（高程为 6336 米）推进到距珠穆朗玛峰仅有 5 公里的距离，把重力点推进到距珠穆朗玛峰仅有 1.9 公里越过天险北坳的 7790 米处。他们对提高推求珠穆朗玛峰高程的精度起着极为重要的作用。

在这次珠穆朗玛峰高程测定中，我们不但在取得最为全面，最为精确的测量外业数据方面付出了艰巨的劳动，而且在数据的数学处理方面，也给予了极大的重视，对整个计算方案进行了周密的考虑，使全部计算工作建立在相当严格的理论基础之上，从而使这次测定所获得的 8848.13 米的数据，已成为世界迄今为止最为精确的珠穆朗玛峰海拔高程值。

四

初步开展了卫星大地测量工作，成功地用多普勒接收系统联测了我国的神圣领土西沙群岛。

1977 年，我们从加拿大引进了两部马可尼公司生产的 CMA-722B 大地型多普勒接收系统和美国 HP21MX 计算机。当年我们在八个点上进行了大量的卫星定位的试验研究工作。通过这次试验，获得该仪器在使用广播星历的情况下，一次卫星通过每个坐标分量的中误差平均值约为 ± 6 米，50 次通过的平均值，每个坐标分量的中误差可在 1 米以内。这仅仅是内部符合精度。经过外部条件的检核，实际上多次卫星通过的任一坐标分量的中误差平均值为 5 米左右，这与国际上一些同行们所作的试验是一致的。

我们在这些试验中，有一个有趣的发现，这也和我们的预想是吻合的。在我们观测的 8 个测站中，把六个测站点分为三对，并在这三对测站点上用两架接收机同时进行观测。

我们从上述三对测站的合格通过次数中各选择了 15 次符合连测定位要求的成果来计算三条弦长。而它们的一次测定中误差分别为 ± 2.32 米, ± 2.39 米和 ± 1.92 米。而同样的非连测的三条弦的一次测定中误差为 ± 3.5 米、 ± 5.9 米和 ± 5.68 米。由此可见, 连测定位所得的弦长之精度要比非连测者高一倍左右。显然, 如果采用专门的连测定位程序的话, 可望获得更好的结果。但是它与坐标精度相比即使非连测定位, 其弦长中误差也不大于一个坐标分量的中误差。

今年我们又开赴祖国的南海, 首次精确地测定了我国西沙群岛的地理位置和高程。使得我国的西沙群岛的局部坐标系纳入了全国统一坐标系。就多普勒联测本身的精度而言还是比较高的, 得出西沙群岛所测的各点地心坐标的一次测定中误差(每个分量)为 5 米左右, 平均值中误差在 2 米以内。但由于大地网的误差以及高程异常的误差, 使得大地坐标和地心坐标的转换参数误差在 8 米左右。所以最后求得的海岛各点的大地坐标各分量中的误差可能不大于 10 米。

五

加强现代大地测量学的基础理论研究, 充分注意卫星大地测量及其它新技术的发展, 是我国大地测量学者的当务之急。

我国的大地测量工作者, 几十年来无论是在理论上还是在实践上都积累了不少自己的经验, 对我国大地测量学的发展作出了不少的贡献。在相关平差法方面, 我国测量工作者于六十年代初期开始就探索和研究这一新理论在测量平差中的各种用途, 他们所得出的结论和国外的同行们在不同情况下得出的结论有其共同之点, 但由于受到“四人帮”的破坏和干扰, 这个理论在我国目前还未能发展并用于实践。

我国大地测量学在新中国成立后有了相当的进步, 但仅仅是开始, 今后的路程更长。我们所有的一些成就只是同过去落后情况相比较而言的。同世界各先进国家相比还有较大差距。

由于科学技术的发展飞速, 古老的大地测量学已经发生了革命性的变化。大地测量学由于对地球的研究而开始, 将由于人类对地球和宇宙的认识而不断深化, 今后大地测量学所面临的任务, 不单单是要解决测图控制及研究地球形状和大小, 而且还要研究和测定地球的伸缩及其极点的位移。大地测量学的发展是同地球物理学和天文学等紧密相关的, 可以说它们是一母的双生子, 大地测量学是天文学和地球物理学的纽带。

我国的大地测量学, 在方法上基本上还是常规的, 对于新技术的应用仅仅是开始。六十年代兴起的卫星大地测量学, 我们现在已开始注意。用卫星大地网和现有的天文大地网相结合来解决和研究其它科学问题的技术, 我们还需要向先进国家的同行们学习。

对于大地测量学新兴领域的研究尚待我们大地测量工作者去开拓, 在卫星大地测量学方面要加强基础理论的建设, 而且还必须积极进行国际交流与合作。

大地主题反解公式

张 志 新

大地主题的正、反解问题，曾是大地测量学的一个重要问题，也是高等大地测量学的基础理论之一。因为在这个问题解决时，要运用椭球面上的各种曲线，也涉及微分几何学的曲面论的一些原则，而且又是大地测量学中的一个极其实际的问题。这个问题的解法有多种途径。对于正解就是已知椭球面上一点的经度和纬度，以及此点对椭球面上另外一点间的大地线长度和它的正方位角，推求另外一点的经度和纬度以及该大地线的反方位角。反解则是在椭球面上已知两点的曲面坐标（即它们的经度及纬度）反求它们间的大地线长度和大地线的正、反方位角。

高斯、赫尔默特以及士赖伯和世界其它一些大地测量学者曾对这个问题作出过杰出的贡献。我国的测量工作者对该问题也曾有过他们的补充意见。但由于三角锁转到高斯平面上平差以后，这个问题变得不太突出了，只有在比较远的距离时仍属必要。但在当今的情况，由于计算技术的进步，其它科学领域的发展，有很多情况又很需要大地主题的正、反解公式。因此，本文力图得出一个实用的解决方案，对过去一些人的努力作一个补充。为了叙述的方便，有必要对作者在二十多年前的正解公式〔1〕作一重叙，并把它全部改为真数计算形式，然后，则在它的基础上提出一个反解公式。

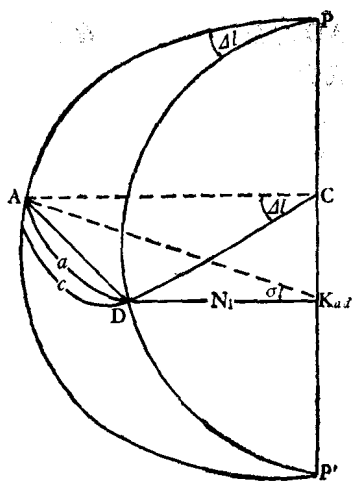
一、同纬度两点间大地线、法截线与平行圈的关系

在旋转椭球面上，纬度不相同的两点，其法线与椭球体短轴相交之处亦不相同，故此二点的法截线不相重合，因而称为相对法截线。两点间的大地线是短程线，而相对法截线不是这样性质的曲线，大地线居于两个相对法截线之间。而我们在这里仅就同纬度两点间的这两种曲线和平行圈感兴趣。同纬度的点，其法线与短轴交于一点，故二相对法截线重合。但短程线并不同两相重合的相对法截线重合，它们更不同平行圈相合。

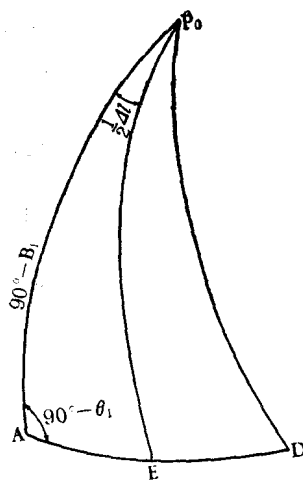
在图一中，A及D为纬度相同的两点，AaD为过此二点相互重合的法截线，AcD为过此二点的平行圈，过此二点的大地线应在AcD之上（就北纬而言），在图中并未划出，是为了图的清晰，Kad为法截线的曲率中心，C为平行圈的曲率中心， N_1 为A及D的卯酉圈曲率半径， $\angle l$ 为A及D两点间的经差， σ 为对应于法截线AaD的曲率中心角。

我们是要推导AaD的弧长 s' 和AaD及AcD间的交角 θ_1 ，并进而求平行圈与大地线之间交角及AD两点的大地线长度 s 。

为此我们可以在图一中，以Kad为中心作一个球，使其半径为 N_1 ，并令此球面在平



图一



图二

行圈 AcD 上与椭球面相切。以 N_1 为半径以 Kad 为中心的球面当然是在 AcD 上同椭球面相切的。此时 A 及 D 同为球面上的点，它们之间的球面径差同椭球面的径差皆是 Δl ，只是此时法截面 $AaD Kad$ 在球面上的交线即投影线是 $Aa'D$ ，是一个大圆弧，图中未划出。椭球面上的子午线 PA 及 PD 在球面上为 P_0A 及 P_0D 。这个球面相应于图一的部分我们就不必画出来了，我们只画出 ADP_0 这个球面三角形。

图二中的 AED 大圆弧即是相对法截线 AaD 在球面上的投影，就是未曾画出来的那大圆弧 $Aa'D$ 。我们从球之极点 P_0 作大圆弧 $Aa'D$ 的一个垂弧，并与之正交于 E 点。由于上面我们已经假设 AaD 及平行圈 AcD 之间的交角是 θ_1 ，则 $\angle P_0AD = \angle P_0DA = 90^\circ - \theta_1$ ，大圆弧 $P_0A = P_0D = 90^\circ - B_1$ ，则由直角三角形 P_0AE 得 θ_1 的计算式为：

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{\Delta l}{2} \quad (1)$$

过去在计算 θ_1 时皆以展开式为好，现在由于计算工具的发展，用闭合计算也可达到相应的精度。

对于大地线同正法截线间的交角已知公式为：

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\eta_1^2 s^2}{6N_1^2} \sin A_{1.2} (1 + \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2}) \times \left[\cos A_{1.2} - \frac{s}{4N_1^2} \operatorname{tg} B_1 (1 + 9\eta_1^2 \cos^2 A_{1.2}) \right] \times \left[1 + \frac{s^2}{6N_1^2} (1 + \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2})^2 \right] \quad (2)$$

上述 (2) 式当两点间的距离达 1000 公里尚可达到相当的精度。根据我们的情况的精度要求，则有：

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\eta_1^2 s^2}{6N_1^2} \cos \theta_1 (1 + \eta_1^2 \sin^2 \theta_1) \left[\sin \theta_1 - \frac{s}{4N_1^2} \operatorname{tg} B_1 (1 + 9\eta_1^2 \sin^2 \theta_1) \right] \quad (3)$$

大地线与平行圈间的交角 θ 为：

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (4)$$

进而推求 σ , 由图一的等腰三角形 Kad AD 及 CAD 的公共底边 AD 着手解决此问题。令 AD 弦为 K_0 , 则由 CAD 三角形得它的计算式为:

$$K_0 = 2N_1 \cos B_1 \sin \frac{\Delta l}{2}$$

由 Nad AD 三角形同样推得 K_0 的算式为:

$$K_0 = 2N_1 \sin \frac{\sigma}{2}。$$

上述二式比较即可得出 σ 的计算式为:

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \cos B_1 \sin \frac{\Delta l}{2} \quad (5)$$

由 (5) 式求出 σ 角后, 用辅助球的半径 N_1 乘之即可求 σ 角所对应的大圆弧长度, 但它不是法截线长度 AaD, 更不是 A 及 D 两点间大地线的长度。

就我们这里所提出来的问题, 在 [1] 中已有详尽的论述, 因此我们只列其结果。此时有:

$$s = N_1 \frac{\sigma''}{\rho''} \left\{ 1 - \frac{e'^2}{24} \left(\frac{\sigma''}{\rho''} \right)^2 \cos B_1 \left(\frac{\theta_1''}{\rho''} \right)^2 + \frac{e'^2}{128} \left(\frac{\sigma''}{\rho''} \right)^3 \sin 2B_1 \left(\frac{\theta_1''}{\rho''} \right) \right\} \quad (6)$$

在一般情况下, 上式中五次以上小数项皆可舍去之, 当距离在一千公里左右时就应该慎重对待, 因此时舍去各项之总和可达 0.07m 左右。

但是由 (6) 式所求得长度并不是 A 及 D 的大地线长, 如果在距离甚长时尚应加上下列改正数以求出大地线长度。即:

$$Ds = \frac{ae^4}{360} \cos^4 B_1 \left(\frac{\sigma''}{\rho''} \right)^5 \quad (7)$$

当加入 (7) 式的改正数时, 应以负值加入。当 $s = 800$ 公里时 (7) 式之值可达 0.00002 米, 故在通常情况下, s 可作为大地线长度看待, 而且 (6) 式的小数项也可不必考虑。此时有:

$$s = N_1 \left(\frac{\sigma''}{\rho''} \right) \quad (8)$$

(1) — (8) 式是理论的基础, 我们只是简短地叙述了一下。为了系统的关系, 本文也将扼要地将文献 [1] 中的正解公式略作概述。

二、大地主题正解公式

如图三所示的椭球面极三角形 PAB, P 为极点, A 点为椭球面上一已知点, 大地线 AB 的大地方位角 $A_{1.2}$ 亦为已知值, 且已知 A 及 B 两点间的大地线长度 s_1 。所须求取的

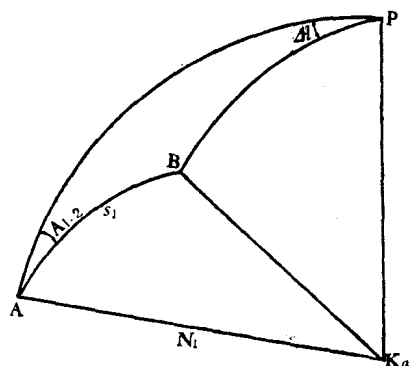


图 三

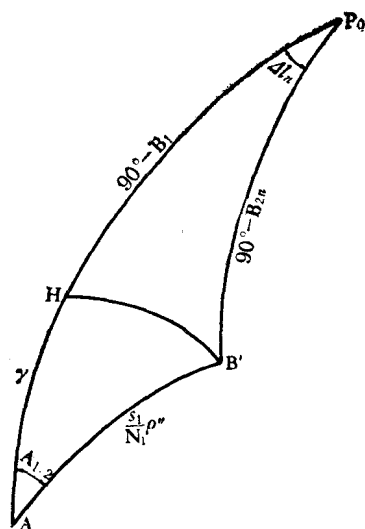


图 四

量是 B 点的纬度和大地线 AB 在 B 点的反方位角 $A_{2.1}$ ，和 A 及 B 两点间的经差 Δl 。

为此，以 Ka 为中心以 N_1 为半径作一辅助球，此球面在 A 点与椭球面相切。我们这样作一个球面极三角形，即以 $s_1/N_1\rho''$ 为球面大圆弧，以大地方位角 $A_{1.2}$ 为这个大圆弧的方位角，此极三角形如图四。

可见图四中之 B' 点纬度和经度同 B 点者不同，因而经差 Δl_n 不是椭球面的经差，令 B' 点之纬度为 B_{2n} 。我们从上之球面极三角形立即得到球面经差 Δl_n 的算式为：

$$\operatorname{tg} \Delta l_n = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{s_1}{N_1}\rho''\right)}{\cos B_1} \cdot \frac{\sin A_{1.2}}{1 - \cos A_{1.2} \operatorname{tg} B_1 \operatorname{tg}\left(\frac{s_1}{N_1}\rho''\right)} \quad (9)$$

如果假设

$$\operatorname{tg} \gamma = \cos A_{1.2} \operatorname{tg}\left(\frac{s_1}{N_1}\rho''\right) \quad (10)$$

则有：

$$\operatorname{tg} \Delta l_n = \frac{\sin A_{1.2} \cos \gamma \operatorname{tg}\left(\frac{s_1}{N_1}\rho''\right)}{\cos(B_1 + \gamma)} \quad (11)$$

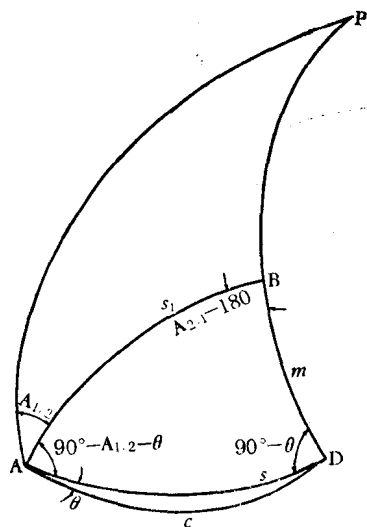
根据当今计算器发展的情况，在计算 Δl_n 时不必使用 (10) 及 (11)，也不必展开成级数式。

当将球面经差转化为椭球面经差时，我们使用克吕格方法，顾及洛戎德尔级数中含 η^2 ，则有：

$$\begin{aligned} (\Delta l - \Delta l_n) \cos B_1 = & \frac{s_1^3}{3N_1^3} \rho'' \eta_1^2 \sin A_{1.2} \cos^2 A_{1.2} + \\ & + \frac{2s_1^4}{3N_1^4} \rho'' \eta_1^2 t_1 \cos^3 A_{1.2} \sin A_{1.2} - \frac{s_1^4}{3N_1^4} \rho'' \eta_1^2 \sin^3 A_{1.2} \cos A_{1.2} \end{aligned} \quad (12)$$

对于纬差及方位角差, 我们不再采用克吕格于 1919 年提出的方案, 只是采用文献[1]中的方法, 主要是为反解打下基础。

将图一的椭球面极三角形中的 PB 子午线延长, 使之与 A 之平行圈相交于 D 点, 则 AD 两点间必可引一条大地线如图五。



图五

对平行弧及相对法截弧在图五中并未引出, 因为在前面已经说明过了。今后的正、反解都可在 ABD 这样一个椭球面三角形中进行, 由于在第一节已经求得了 AD 的大地线长度 s 和 θ 角, 对于 $\angle BAD$ 也是已知的, 所以在这个三角形中可以解出子午弧长 m 及反位角 $A_{2.1}$ 。

解椭球面三角形时使用熟知的勒戎德定理, 因 $\angle BAD + 90^\circ - \theta + A_{2.1} - 180^\circ = 180^\circ + \epsilon$

故得:

$$A_{2.1} = 180 + A_{1.2} + 2\theta + \epsilon \quad (13)$$

在 (13) 式中, 我们只要求得了三角 ABD 之椭球面角超 ϵ 即由之解出方位角 $A_{2.1}$ 。我们在这里提出两种方案, 一种是文献[1]中提过的, 即:

$$\epsilon'' = \frac{\rho''}{1R_0^2} s \cdot s_1 \cos(A_{1.2} + \theta) \quad (14)$$

再一个是根据球面三角公式新得出的计算式, 该公式可用于距离较长的情况。由球面三角形 ABD 应用已知的球面三角形公式有

$$\begin{aligned} \cos(A_{1.2} + 2\theta + \epsilon) &= \\ &= -\cos(90 - \theta) \cos(90 - A_{1.2} - \theta) + \sin(90 - \theta) \sin(90 - A_{1.2} - \theta) \cos \frac{s}{R_0} \\ &= -\sin \theta \sin(A_{1.2} + \theta) + \cos \theta \cos(A_{1.2} + \theta) \cos \frac{s}{R_0} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \frac{s}{R_0} = 2 \cos^2 \frac{s}{2R_0} - 1$$

将其代入上式整理之得:

$$\cos(A_{1.2} + 2\theta + \epsilon) = 2 \cos \theta \cos(A_{1.2} + \theta) \cos^2 \frac{s}{2R_0} - \cos A_{1.2} \quad (15)$$

式中 R_0 应是三角形三顶点之平均纬度之平均曲率半径。由 (15) 式可直接解出 $A_{2.1}$ 之值, 其可能的精度在 $\pm 0''.02$ 左右。对 A 及 B 两点的纬差, 可在三角 ABD 中解出 BD 之长, 即解出 AB 两点之子午弧长 m , 然后由它反解出纬差 $\angle B$ 。

对于 m 可用下式计算:

$$m = s_1 \cos\left(A_{1.2} + \theta + \frac{\epsilon}{3}\right) \sec\left(\theta + \frac{\epsilon}{3}\right) \quad (16)$$

对于纬度差 ΔB 的算式为:

$$\Delta B'' = \frac{\rho''}{M_1} m \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{m}{N_1} \eta_1^2 t_1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{N_1^2} \eta_1^2 (1 - t_1^2) \right\} \quad (17)$$

三、大地主题反解公式

前面的一些叙述是我们引出一种反解的基础。这时已知的量是 A 及 B 两点的纬度和经度, 所求的量是 A 及 B 间的大地线长度 s_1 及大地线在 A 及 B 两端的正、反方位角 $A_{1.2}$ 及 $A_{2.1}$ 。前面第一节中的公式 (1) — (8) 这里都有用处, 是我们这种反解的一种基础。

对于子午弧长 m 我们可用下之已知公式:

$$m = a(1 - e^2) \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 \right) \cos 2B_m + \right. \\ \left. + \frac{15}{64} e^4 \cos 4B_m + \frac{e^2}{8} \frac{(B_2 - B_1)''^2}{\rho''^2} \cos 2B_m \right\} \quad (18)$$

(18) 式还可改写成下列形式:

$$m = M_m \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} \frac{(B_2 - B_1)''^2}{\rho''^2} \cos 2B_m \right\} \quad (18)_1$$

式中, $B_m = \frac{1}{2} (B_1 + B_2)$, M_m 是属于平均纬度 B_m 的子午圈曲率半径。

此时 ABD 三角形的球面角超可由下式计算

$$\epsilon'' = \frac{\rho''}{2R_0^2} m \cdot s \cos \theta \quad (19)$$

当边长大于 400 公里不超过 800 公里时, 椭球面三角形的角超应用下式:

$$\epsilon'' = \frac{\Delta}{R_0^2} \rho'' + \frac{\rho'' \Delta}{24R_0^3} \cdot s_1^2 \quad (19)'$$

当然 (14) 式也应加入 (19)' 式的改正项。曲率半径 $R = \frac{b}{W^2} = \frac{c}{V^2}$, $W^2 = 1 - e^2$

$\sin^2 B$, $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B$, $b = a\sqrt{1 - e^2}$, b 为椭球之短半轴, $c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$, e^2 为子午

线椭球的第一偏心率, e'^2 为子午椭圆的第二偏心率。 ϵ'' 求得后即可用 (13) 式解出正、反方位角之差。

至于正方位角 $A_{1.2}$, 由 ABD 三角形有,

$$\frac{\sin\left(90^\circ - A_{1.2} - \theta - \frac{\epsilon^*}{3}\right)}{m} = \frac{\sin\left(A_{1.2} + 2\theta + \frac{2}{3} \epsilon^*\right)}{s}$$

施行简化及整理之后可得下之算式:

$$\operatorname{tg}\left(A_{1.2} + \theta + \frac{\varepsilon^*}{3}\right) = \frac{\frac{s}{m} - \sin\left(\theta + \frac{\varepsilon^*}{3}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\varepsilon^*}{3}\right)} \quad (20)$$

对于大地线长度 s_1 ，它的算式可采用下式：

$$s_1 = \frac{m \cos\left(\theta + \frac{\varepsilon^*}{3}\right)}{\cos\left(A_{1.2} + \theta + \frac{\varepsilon^*}{3}\right)} \quad (21)$$

我们在 $\frac{\varepsilon}{3}$ 上加以 * 号，主要表示：当边长大于 400 公里时，我们采用 勒戎德定理 化 椭球面三角形的角为平面角时，在各椭球面角中应加进高次项改正数。此时对我们这里的三角形三个角的改正式应为：

$$\left. \begin{aligned} 90^\circ - \theta - A_{1.2} - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{180R_0^2}(s_1^2 + s^2 - 2m^2) - \frac{\varepsilon''}{12R_1^2}(R_0^2 - R_1^2) \\ A_{2.1} - 180^\circ - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{180R_0^2}(s_1^2 + m^2 - 2s^2) - \frac{\varepsilon''}{12R_2^2}(R_0^2 - R_2^2) \\ 90^\circ - \theta - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{180R_0^2}(s^2 + m^2 - 2s_1^2) - \frac{\varepsilon''}{12R_1^2}(R_0^2 - R_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

对于 (20) 及 (21) 式，我们还可以根据球面三角学之二角和、差之半的正切公式改为如下之形式。

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left\{ (90^\circ - A_{1.2} - \theta) + (A_{2.1} - 180^\circ) \right\} &= \frac{\cos \frac{m-s}{2R_0}}{\cos \frac{m+s}{R_0}} \operatorname{ctg} \frac{90^\circ - \theta}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left\{ (90^\circ - A_{1.2} - \theta) - (A_{2.1} - 180^\circ) \right\} &= \frac{\sin \frac{m-s}{2R_0}}{\sin \frac{m+s}{2R_0}} \operatorname{ctg} \frac{90^\circ - \theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由球面三角学的正弦定律可有：

$$\sin \frac{s_1}{R_0} = \frac{\cos \theta \sin \frac{m}{R_0}}{\cos(A_{1.2} + \theta)} \quad (24)$$

(23) 及 (24) 中的各球面角与椭球面角之间的差，如果需要精确顾及时可由 (22) 式中各相应式的最末一项计算之。当三角形边长不超过 400 公里时，由 (22) 算得的差不超过 $0''.0005$ 。当边长小于 200 公里时，算得的球面角和椭球面角之差小于 $0''.0009$ 。因而与椭球面三角形的相应边相等的球面三角形可用来解算椭球面三角形。

使用 (23) 及 (24) 式反解 $A_{1.2}$ 及 $A_{2.1}$ 和 s_1 是很方便的，尤其是在小型电子计算机很发展的今天更显得方便。

为了检验反解公式，我们用下列的已知数据进行了计算，数据如下：