常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

修订版

CHANGWEIFEN FANGCHENG

都长清 焦宝聪 焦炳照 编著

华大学出版社

常微分方程

（修订版）

都长清　焦宝聪　焦炳照　编著

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/都长清等编著.—2版.—北京:首都师范大学出版社,2001.3
ISBN 7-81039-305-7

Ⅰ.常… Ⅱ.都… Ⅲ.常微分方程 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 57176 号

内容简介

全书分为七章,依次是:绪论、一阶方程的初等积分法、一阶方程的一般理论、高阶微分方程、微分方程组、定性与稳定性理论初步、一阶偏微分方程.

本书在内容取材与安排上,在考虑到常微分方程学科本身特点的同时,注重体现高师特点,加强了与有关的初等数学及高等数学基础知识的联系与比较,以进一步巩固和深化这些知识.

本书可作为师范院校数学系本科、专科的《常微分方程》课程的教材.也可作为有关专业的教学参考书,并适于自学者使用.

CHANGWEIFEN FANGCHENG

常微分方程

(修订版)

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)
北京首师大印刷厂印刷 全国新华书店经销
2001 年 3 月第 2 版 2001 年 3 月第 1 次印刷
开本 880×1230 1/32 印张 10.5
字数 311 千 印数 0,001～3,000 册
定价 17.00 元

再版前言

这次对本教材的修订，主要是结合我们这几年来的教学实践，精简了某些内容，并对已发现的错误和不妥之处进行了修正．

在这次修订中，王在洪、酒全森等老师提出了宝贵的意见，我们谨向他们表示衷心的感谢．我们恳切期望读者对本书提出批评和建议．

编　者

2000 年 12 月于首都师大数学系

前　言

本书是在我们多年教学实践和教学研究的基础上，吸取国内外同类教材的长处，参照高等师范院校《常微分方程》教学大纲编写而成的．全书共七章，前五章可作为教学的基本内容，后两章的内容可依照实际情况灵活选用．

根据常微分方程课程的特点及高师的培养目标，我们在编写本教材中有以下几点考虑．

一、力图体现“少而精”，注重数学思想的培养、基本方法的训练及近代数学观点的渗透

本课程中方程类型较多，解法各异．我们注意分析不同类型方程及其解法的特点，着重阐明解法的思路、技巧及各种方法之间的内在联系．在有的章节中选择典型例子进行综合练习，一题多解，借以提高学生的解题能力．

对常微分方程的基本理论，我们重点对解的存在惟一性定理（毕卡定理）的条件、结论与证明方法进行了较为细致的讨论与分析，着重阐述其中所包含的数学思想和方法，并把证明中的逐次逼近法引伸抽象为“压缩映象原理”，再用此原理简明地证明毕卡定理，借以提高学生的数学修养．

对常系数线性齐次微分方程组的求解方法，我们选用矩阵指数法．基解矩阵的计算采用了较新的普兹方法，既避免学生接受这部分知识上的困难，又可使学生熟悉向量、矩阵和矩阵指数函数．

为使读者了解近代常微分方程的重要分支——定性理论的基本思想和方法，为进一步学习打下基础，我们在第四章§3中介绍了二阶线性齐次方程解的振动性；在第六章中对定性、稳定性理论作了简要的介绍．

二、力图体现“师范特点”，重视对有关基础知识的联系、巩固与深

化

微分方程中的不少内容是代数方程(组)、普通函数方程的自然引伸和发展.因此,我们注意把微分方程(组)与其他一些方程(组)在基本概念、解的存在惟一性、解的性质与结构、求解方法及丢增解等方面进行比较,着重阐明其间的异同点和内在联系.这不仅能使学生较易理解微分方程的有关内容,且能更深入地把握有关基础知识.

本书从某些内容的选取,某些重要问题的提出与解决以及某些例题、习题的配备等方面,都注意加强微分方程与有关的初等数学及高等数学基础知识的结合.比如,通过运用微分方程来求解某些函数方程,不仅解法比较简便,且可加深对基本初等函数的本质属性的认识;通过一阶方程的图象解法的较为详细的讨论,可以使学生看到描绘微分方程的解族的分布图形的定性方法与中学代数及数学分析中作已知函数图象的方法之间的紧密联系.前者可看成后者的继续与推广,而后者又是前者的基础;通过运用微分方程的幂级数解法,不仅可得到常见的初等函数的幂级数展式,还可得到高斯超几何方程的解—超几何级数,并把常见的初等函数的幂级数展式统一起来.

三、力求做到符合学生的认识规律,注重启发性,便于自学

我们把微分方程的初等积分法分散在第二章、第四章及第五章中.在例题、习题的安排上注意知识的反复巩固,这有助于学生更牢固地掌握常用解法.

对微分方程的典型实例,我们把重点放在布列方程和说明解的实际意义上,并采用分散穿插与适当集中的办法进行安排,这既可明确微分方程的实际背景与广泛应用,又有利于培养学生分析解决实际问题的初步能力.

我们把高阶线性微分方程与线性微分方程组分章设置,并先讲线性齐次方程(组)的理论与解法,再讲线性非齐次方程(组)的理论及解法,这样层次清楚,便于学生接受.

每节除配备习题外,还紧密配合内容,适当地增设了一些"问题".实践表明,这对促进学生思考、全面正确掌握知识很有好处.每章末还配有复习题,作为综合性练习.书末附有习题答案,某些证明题给了提示,供读者参考.

在编写本书过程中,北京大学的丁同仁教授和北京师范大学的高

素志副教授，认真审阅了本书初稿，对我们给予了热情的支持与帮助；在使用与修改原讲义的过程中，林有浩教授，左平、解长利、仇淑芬副教授及时红庭同志都提出过许多宝贵意见. 在此，我们谨向他们表示衷心的感谢. 最后，我们殷切期望读者对本书的缺点和错误提出批评、指正.

编　者

1992年3月于北京师范学院数学系

目　　录

第一章 绪　论

什么是微分方程？它与已学过的方程有何联系与区别？在中学数学中，我们曾讨论过一些方程，例如：

$$x^2+x-2=0；3x^4+7x^2-6=0；$$

$$\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}+1；\sqrt{x+10}+2=x.$$

及

$$3^{x+1}+9^x-18=0；\lg(x-1)^2=2；\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=1.$$

在这些方程中，作为未知量的 x 均是数值，不同的是前四个方程中只含有未知量 x 的代数运算，因此，它们是代数方程．而后三个方程中却含有未知量 x 的超越运算，因此，它们是超越方程．

问题 1　求解上述各方程，指出解法的基本思路，注意是否有丢根（解）或增根（解），并说明其原因．

在数学分析中，我们又遇到过另一类方程，例如：

$$x^2+y^2-2=0$$

及

$$\frac{dy}{dx}=2x \text{ 或 } dy=2xdx$$

这两个方程与上面列举的方程性质上不同，这里作为未知量的 y 已不是数值，而是另一个变量 x 的函数，因此称它们为函数方程．这两个方程之间，也有重要的区别，前者不含导数或微分运算；后者含有未知函数的导数或微分，这种特殊的函数方程，就是最简单的微分方程．

一般说来，我们有如下定义．

定义 1　在一个方程中，如果未知的是函数，并且含有未知函数的导数或微分，则称该方程为微分方程．

微分方程有着深刻而生动的实际背景．在本章中，我们先介绍几个实际例子，然后介绍一些基本概念．

§1 几个实例

例 1 自由落体运动

设质量为 m 克的物体，只受到重力的作用，它在离地面 s_0 米处，以初速度 v_0 米/秒下落. 试求其运动规律.

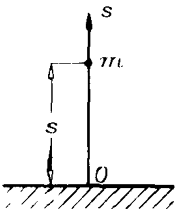

图 1.1

解 为了描述这个运动，如图 1.1 建立坐标系. 取物体下落时所沿垂直于地面的直线为 s 轴，s 轴与地面的交点 O 为坐标原点，且规定背离地心的方向为 s 轴正向.

设物体在时刻 t 的位置坐标为 $s(t)$，于是物体下落的瞬时速度 v 和瞬时加速度 a，可分别表示为

$$v=\frac{ds}{dt} \quad 及 \quad a=\frac{d^2s}{dt^2}$$

显然，不易直接找出 s 对时间 t 的函数关系式 $s(t)$（即落体运动规律）. 但我们可以根据牛顿第二定律

$$F=ma \tag{1}$$

及所设条件得到 $s(t)$ 所满足的关系式.

(1)中的 F 表示物体所受外力的合力. 由条件，物体只受到重力的作用，又重力的正方向指向地心，恰与 s 轴的正向相反，故 $F=-mg$，其中 g 是重力加速度. 把此式及 $a=s''(t)$ 代入(1)式，就得到

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g \tag{2}$$

这是一个含有未知函数 $s(t)$ 的二阶导数的微分方程. 显然，落体的运动状态 $s=s(t)$，应与物体的初始状态即起始时刻 $t=0$ 时的初位置和初速度

$$s(0)=s_0,\ s'(0)=v_0 \tag{3}$$

有关. 从不同高度，以不同初速度下落的物体，其运动状况是有差别的. 条件(3)称为初始条件. 于是，求落体运动规律的问题就归结为求方程(2)满足初始条件(3)的未知函数 $s(t)$ 的问题.

问题 2 设质量为 m 克的物体在离地面 20 米处自由下落，在下落过程中除受重力外，还有空气阻力，且知阻力与运动速度成正比. 试求

落体的位置坐标所满足的微分方程，并指出初始条件.

例 2 镭的衰变

放射性元素镭，因不断地放射出各种射线，故其质量随着时间的变化而逐渐减少(这种现象称为衰变). 根据实验知道，镭的衰变规律是：衰变速度与它的剩余的质量成正比. 已知在某一时刻 $t=t_0$ 时镭的质量为 R_0. 试求它在任何时刻 t 的质量 $R(t)$.

解 由于镭的质量 $R(t)$随着时间 t 的增加而减少，故镭的衰变速度 $R'(t)$应是负的，从而按衰变规律得到

$$\frac{dR}{dt}=-kR \tag{4}$$

其中 $k>0$ 是比例常数，这是一个含有未知函数 $R(t)$的一阶导数的微分方程. 显然镭的质量 $R(t)$还依赖于初始时刻 $t=t_0$ 的质量 R_0，即与初始条件

$$R(t_0)=R_0 \tag{5}$$

有关. 于是，上述问题就归结为求方程(4)满足初始条件(5)的未知函数 $R(t)$的问题.

有趣的是，人们发现其他的放射性物质的衰变，细菌的繁殖，植物的初期生长，溶液的冲淡等问题均会导出与(4)类似的方程，但方程右端有时是正号.

问题 3 已知酵母的繁殖速度与它在该时刻的量成正比. 设酵母在某一时刻 $t=t_0$ 时的量为 R_0，试求它在任何时刻 t 的量 $R(t)$所满足的微分方程，并指出初始条件.

例 3 一个几何问题

求一平面曲线，使其上任一点的切线在纵坐标轴上的截距等于切点的横坐标.

解 设所求平面曲线为 $y=y(x)$. 显然，不易直接求出 $y(x)$的表达式，但我们可以根据曲线所具有的性质，建立 $y(x)$所满足的关系式. 如图 1.2，过所求曲线上任一点(x,y)的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

其中(X,Y)表示切线上的动点. 因此，切线在纵坐标轴上的截距(简称纵截距)为

$$b=y-xy'$$

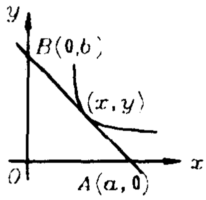

图 1.2

(为什么?)从而由题意,便得

$$y-xy'=x \tag{6}$$

这是一个含有未知函数 $y(x)$ 的一阶导数的微分方程. 于是,问题就归结为求满足方程(6)的未知函数 $y(x)$ 的问题.

问题 4 如图 1.2,试证过曲线上任一点 (x,y) 的切线在横坐标轴上的截距(简称横截距)为

$$a=x-\frac{y}{y'}$$

例 4 由一个函数方程引出微分方程

设函数 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处可导,且具有性质

$$\varphi(t+s)=\frac{\varphi(t)+\varphi(s)}{1-\varphi(t)\varphi(s)} \tag{7}$$

试求此函数.

解 (7)是一个函数方程,为了便于求出函数 $\varphi(t)$,我们把它转化为微分方程. 首先在(7)中令 $t=0,s=0$,有

$$\varphi(0)=\frac{2\varphi(0)}{1-\varphi^2(0)}$$

则得

$$\varphi(0)=0 \tag{8}$$

又因

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t+s)-\varphi(t)}{s}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[\frac{\varphi(t)+\varphi(s)}{1-\varphi(t)\varphi(s)}-\varphi(t)\right]\\&=(1+\varphi^2(t))\lim_{s\to 0}\left(\frac{\varphi(s)-\varphi(0)}{s}\right)\left(\frac{1}{1-\varphi(t)\varphi(s)}\right)\end{aligned}$$

从而有

$$\varphi'(t)=\varphi'(0)[1+\varphi^2(t)] \tag{9}$$

这是一个含有未知函数 $\varphi(t)$ 的一阶导数的微分方程. 于是,问题就归结为求方程(9)满足初始条件(8)的未知函数 $\varphi(t)$ 的问题.

注 在初等数学中,我们知道正切函数 $\varphi(t)=\tan t$ 具有性质(7). 反过来要问:具有性质(7)的函数是否一定为正切函数呢? 值得引起重视的是:对指数函数、对数函数及幂函数等基本初等函数,同样可提出

类似的反问题(参看习题 1.1 及习题 2.1). 在下一章,我们可以很容易地回答这些问题. 有兴趣的读者可参看文献[28].

从上面的例子可以看出,微分方程与许多实际问题之间有着紧密的联系,这是因为在寻求某些变量之间的函数关系时,往往不易或不能直接找到这些函数关系,但却能建立有关变量和它们的导数(或微分)之间的关系式,即微分方程. 这是运用微分方程解决实际问题的首要步骤. 然而,一般说来,这又是一个比较困难的步骤. 因为这不仅需要一定的数学知识,还需要掌握与问题有关的专业知识. 在以后某些章节中,我们还将介绍若干实际例子,以逐步提高解决实际问题的能力.

习 题 1.1

1. 一质量为 m 的物体,从高度 s_0 处以初速度 v_0 铅直向上抛出,设空气的阻力与速度成正比,试求物体的运动规律所满足的微分方程,并写出初始条件.

2. 一高温物体在 20℃的恒温介质中冷却,设在冷却过程中降温速度与物体和其所在介质的温差成正比. 已知物体的初始温度为 u_0,试求物体的温度 $u(t)$所满足的微分方程,并写出初始条件.

3. 已知曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项,试求这曲线所适合的微分方程.

4. 已知平面曲线上任一点的切线与坐标原点到这点的连线相交为定角 α,试求这曲线所适合的微分方程.

5. 设函数 $\varphi(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,不恒为零,$\varphi'(0)$存在,且具有性质

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\cdot\varphi(s)$$

试求 $\varphi(t)$所满足的微分方程,并写出初始条件.

§2 基 本 概 念

2.1 有关微分方程的一些概念

由于各个方面的具体问题所提出来的微分方程是各式各样的,为了便于研究,我们将根据各种方程的特点,把微分方程进行适当的分类.

一、常微分方程和偏微分方程

在微分方程中，如果未知函数只是一个自变量的函数，则其中的导数为通常的导数，我们称该方程为**常微分方程**；如果未知函数是多个自变量的函数，则其中的导数是偏导数，我们称该方程为**偏微分方程**.

例如，微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g \tag{1}$$

$$\frac{dR}{dt}=-kR \tag{2}$$

$$y-xy'=x \tag{3}$$

$$\varphi'(t)=\varphi'(0)[1+\varphi^2(t)] \tag{4}$$

$$xdx+ydy=0 \tag{5}$$

均是常微分方程．而微分方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0 \tag{6}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u \tag{7}$$

是偏微分方程.

对微分方程中的变量，要分清谁是自变量，谁是未知函数．例如，在方程(1)中，t 是自变量，s 是 t 的未知函数；在方程(5)中，由于变量 x 和 y 处于平等地位，因此 x 或 y 均可视为自变量，而另一个就是未知函数．在方程(7)中，x、y 为自变量，u 是 x、y 的未知函数.

需要指出的是，在一个微分方程中，不一定明显地出现自变量和未知函数(如方程(1))，但必须含有未知函数的导数或微分.

本教程主要讨论常微分方程，为方便起见，有时把常微分方程简称为微分方程或方程.

二、一阶与高阶微分方程

在一个微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数 n 称为该微分方程的**阶**．当 $n=1$ 时，称为**一阶微分方程**；当 $n>1$ 时，称为**高阶微分方程**.

例如，方程(2)、(3)、(4)、(5)是一阶常微分方程，方程(1)是二阶常微分方程；又方程(6)及(7)分别为二阶及一阶偏微分方程.

一阶常微分方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y')=0 \tag{8}$$

如果由(8)式可把 y' 解出，则得到方程

$$y'=f(x,y) \tag{9}$$

我们称(8)为**一阶隐方程**，称(9)为**一阶显方程**.

类似的，n 阶隐方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{10}$$

n 阶显方程的一般形式为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

其中 F 及 f 分别是它所依赖的变元的已知函数.

三、线性和非线性微分方程

如果方程(10)的左端为未知函数及其各阶导数的一次有理整式，则称它为**线性微分方程**，否则，称它为**非线性微分方程**.

例如，方程(1)、(2)、(3)均是线性微分方程，而方程(4)为非线性微分方程. n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x)$$

其中 $a_0(x),a_1(x),\cdots,a_n(x)$ 及 $g(x)$ 为 x 的已知函数，且 $a_0(x)\neq 0$.

问题 1 方程(5)是否为线性微分方程?

2.2 有关微分方程的解的一些概念

一、解及其表示形式

与研究代数方程和超越方程类似，微分方程的主要问题之一是要求出其中的未知函数，此函数就称为微分方程的解. 确切地说，有

定义 2 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有直到 n 阶的导数，如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(10)后，能使等式

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]=0$$

在 I 上恒成立，则称函数 $y=\varphi(x)$ $(x\in I)$ 为方程(10)的一个解，并称区