全国高等教育自学考试应试指导丛书

中国计算机函授学院图书编写中心　组编

高等数学(工本)自考应试指导

主　编　叶宏光
副主编　叶善菊

南京大学出版社

中国计算机函授学院图书编写中心　组编

全国高等教育自学考试应试指导丛书

公共课程

高等数学(工本)自考应试指导

主　编　叶宏光
副主编　叶善菊

南　京　大　学　出　版　社

内容简介

高等数学(工科、本科)课程是自学考试计划中的一门重要基础课程,为了帮助考生通过考试,我们编写了这本辅导教材。

本书是一本考前强化教材,以题目的分析与讲解为主。

在第一部分中,对教材每一章中的知识点分别进行简单的概括与总结,然后通过典型例题的讲解来加深读者对内容的理解;

第二部分为综合练习题,并给出了答案与解题要点,考生可以通过这些题目的求解来启发自己的解题思路;

第三部分为应试指导,传授考生一些应试的经验并给出两套模拟试题以便考生自己测试。

附录中给出了四套历年试卷以供读者分析与自测。

本书对于考生的考前强化将会有极大的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工本)自考应试指导/叶宏光主编.—南京:南京大学出版社,2000.8

(全国高等教育自学考试应试指导丛书)

ISBN 7-305-01638-1

Ⅰ.高... Ⅱ.叶... Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 69015 号

书　　名　高等数学(工本)自考应试指导
主　　编　叶宏光
副主编　叶善菊
责任编辑　蒋劲柏
出版发行　南京大学出版社
地　　址　南京汉口路 22 号　邮编　210093　电话　025-3593695
印　　刷　合肥学苑印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　787×1092　1/16　印张　20.5　字数　487.5 千
版　　次　2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷
定　　价　29.00 元
ISBN 7-305-01638-1/O·253

目　　录

第一部分

内容概要与典型题解

在这一部分中，以考试大纲规定的考核知识点为纲，以最简捷的文字简明扼要地阐述各知识点的基本概念、原理和方法，并围绕相关知识点辅以大量典型例题，以增强读者对概念的理解和解题能力的提高．

读者可将这部分内容作为复习提纲来使用，它针对性强，能帮助考生从繁杂的内容中理清头绪，在复习迎考冲刺阶段能起到事半功倍的作用．

第1章 函　　数

函数是高等数学研究的基本对象，并且是高等数学中最基本的内容之一. 通过本章的学习，应掌握常量、变量、函数的定义及其定义域、函数的性态、复合函数、基本初等函数、初等函数和反函数等相关知识.

1.1 内容概要

1. 常量、变量和函数

(1) 常量与变量

观察某一过程时，某些量可取不同的数值，这类量称为变量；而某些量保持不变的数值，这类量称为常量.

(2) 函数

在研究某一实际问题时，往往会有几个变量，但这些变量并不都是彼此独立的变化的，它们之间存在着一定的依存关系，函数就是反映这些变量之间关系的一个重要概念.

① 函数的定义

设有两个变量 x 与 y，当变量 x 在给定的某一个变域中任意取定一值时，另一个变量 y 就按某一个确定的法则有一个确定的值与 x 的这个值相对应，那末变量 y 称为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$.

② 定义中的两个要素

定义域：自变量 x 的取值范围.

对应法则：自变量 x 与因变量 y 的对应规则.

提个醒

两个函数只有当它们的定义域和对应法则都相同时，才能说它们是相同的函数. 如函数 $f(x) = 1$ 和函数 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$，它们有相同的定义域和对应法则，所以这两个函数相同.

③ 函数的三种表示法

解析法：通过数学表达式表示函数关系；

图示法：通过某种坐标系上的图像表示函数关系；

表格法：通过表格形式表示函数关系.

☞ **提个醒**

在不同区间上用不同数学表达式来表示的函数称为分段函数.分段函数是一个函数而不是几个函数.

2. 函数的简单性态

(1) 单调性

若对于区间(a,b)内任意两个值x_1与x_2,当$x_1 < x_2$时恒有$f(x_1) < f(x_2)$(或$f(x_1) > f(x_2)$),则称函数$f(x)$在(a,b)内为单调增(或减)函数,区间(a,b)称为$f(x)$的单调区间.单调增或单调减函数统称为单调函数.单调增(或减)函数的图形为自左至右上升(或下降)的曲线.

(2) 奇偶性

设函数$y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对属于定义域的任何x值恒有$f(x)=f(-x)$,那末称函数$f(x)$为偶函数;如果恒有$f(-x)=-f(x)$,那末称$f(x)$为奇函数.

奇函数的图象对称于原点,偶函数的图象对称于y轴.

☞ **提个醒**

函数可以是既不奇也不偶.

(3) 有界和无界性

如果对属于某一区间I的所有x值总有$|f(x)| \leqslant M$成立,其中M是一个与x无关的常数,那末称函数$f(x)$在区间I有界;否则,称在I无界.

(4) 周期性

对于函数$y=f(x)$,如果有一正数l存在,对属于定义域的任意$x, x+l, x-l$,总有等式$f(x)=f(x \pm l)$成立,那末称$f(x)$为周期函数,l是$f(x)$的一个周期.

3. 反函数

(1) 反函数的概念

设已给y是x的函数$y=f(x)$,如果将y当作自变量,x当作函数,则由关系$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$就叫做函数$f(x)$的反函数.由于通常总是把自变量记作x,函数记为y,因此习惯上称$y=\varphi(x)$为函数$f(x)$的反函数,记作$f^{-1}(x)$,而$f(x)$叫做直接函数,直接函数的值域和它的反函数的定义域相同.

(2) 反函数的图形

由于函数$y=f(x)$与它的反函数$x=\varphi(y)$是变量x与y之间相同的对应法则,所以在同一坐标平面内它们有同一图形.若把自变量记作x,函数记作y,则反函数为$y=\varphi(x)$,它的图形与直接函数$y=f(x)$的图形是对称于直线$y=x$的.

4. 复合函数

(1) 复合函数的定义

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，而且当 x 在某一区间 I 取值时相应的 u 值可使 y 有定义，则称 y 是 x 的一个定义于区间 I 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

(2) 几个注意问题

① 复合函数可以简单地理解为函数的函数.复合函数是函数间的一种运算，两个函数经过复合运算后产生了一个新的函数.有了复合运算可以把一个较复杂的函数分解为几个简单的函数.例如函数 $y=\sin x^2$，可以看作是由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合运算而产生的.

② 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的，要使复合函数 $y=[\varphi(x)]$ 有意义，必须满足函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与函数 $y=f(u)$ 的定义域相同或函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域中.

5. 基本初等函数与初等函数

(1) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

提个醒

基本初等函数是高等数学中最常用、最基本的函数，要熟记基本初等函数的图形及其基本性质.

(2) 初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算和复合所构成的，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.初等函数是最常见的函数，是我们研究的主要对象.

1.2 典型例题分析与解答

一、函数的定义域

例1 求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

【分析】要使得 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 有意义，需 $\dfrac{1}{x}$ 与 $\sqrt{1-x^2}$ 两项均有意义，对于 $\dfrac{1}{x}$，要求 $x\neq 0$，对于 $\sqrt{1-x^2}$，要求 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

【解】要使函数的表达式有意义，x 要满足：

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x^2\geqslant 0.\end{cases}\qquad 即\quad \begin{cases}x\neq 0,\\ -1\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

所以　函数的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求函数 $f(x+a)$ 的定义域.

【解】因为　函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,

所以　$0\leqslant x\leqslant 1$.

由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$　得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$,

所以　函数 $f(x+a)$ 的定义域为$[-a,1-a]$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ -1, & 1<x\leqslant 5.\end{cases}$

试求:函数 $f(x)$ 的定义域.

【解】$f(x)$ 的定义域为$(0,5]$.

4. 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg\sin x$ 的定义域.

【解】要使函数的表达式有意义,x 要满足下列不等式组:

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x^2\leqslant 4 \quad \Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 3,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),\end{cases}$$

所以,函数 y 的定义域是$(0,2]$.

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\lg(x-1)}$ 的定义域.

【解】要使函数的表达式有意义,x 要满足:

$$\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\ x-1>0,\\ \lg(x-1)\neq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 4,\\ x>1,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

所以,函数 $f(x)$ 的定义域是$(1,2)\cup(2,4]$.

6. 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

【解】要使函数的表达式有意义,x 要满足:

$$\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ -1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -2,\\ -3\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

所以,函数 y 的定义域为$[-3,-2]\cup[3,4]$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域是$[-1,1]$,求函数 $f(2\sin x)$ 的定义域.

【解】由 $-1\leqslant 2\sin x\leqslant 1$ 得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant\dfrac{1}{2}$,

故 $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}+k\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

所以函数 $f(2\sin x)$ 的定义域为$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,则 $f(x+8)$ 的定义域是(　).

A) $[0,8]$　　B) $[-8,0]$　　C) $[8,9]$　　D) $[-8,-7]$

【分析】由于 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,所以 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant1$,用 $x+8$ 代替上式中 x,得 $0\leqslant x+8\leqslant1$,解之得 $-8\leqslant x\leqslant-7$.即 $f(x+8)$ 的定义域为$[-8,-7]$.

【答】本题正确答案为 D.

9. 设 $f(x)=\ln x,g(x)=x+4$,则 $f[g(x)]$ 的定义域是(　).

A) $(-4,+\infty)$　　B) $[-4,+\infty)$　　C) $(-\infty,4)$　　D) $(-\infty,4]$

【分析】因为 $f(x)=\ln x$, $g(x)=x+4$,

所以 $f[g(x)]=\ln(x+4)$.

它的定义域为 $x+4>0$,即 $x>-4$.

【答】本题正确答案为 A.

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[1,2]$,则 $f(\sin x)$ 的定义域是(　).

A) $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

B) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

C) $x=[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

D) $x=[k\pi,(k+1)\pi]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

【分析】因为 $f(x)$ 的定义域为$[1,2]$,所以 $1\leqslant x\leqslant2$,

因为 $f(\sin x)$ 的定义域要满足 $1\leqslant\sin x\leqslant2$,即 $\sin x=1$

所以 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

【答】本题正确答案为 B.

11. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,则函数 $f\left(x+\frac{1}{5}\right)+f\left(x-\frac{1}{5}\right)$ 的定义域为(　).

A) $\left[-\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right]$　　B) $\left[\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right]$　　C) $\left[\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right]$　　D) $\left[\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right]$

【分析】$f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,故 $0\leqslant x\leqslant1$

所以 $f\left(x+\frac{1}{5}\right)$ 的定义域要满足 $0\leqslant x+\frac{1}{5}\leqslant1$,即 $-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{4}{5}$,故 $f\left(x+\frac{1}{5}\right)$ 的定义域为$\left[-\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right]$.

$f\left(x-\frac{1}{5}\right)$ 的定义域要满足 $0\leqslant x-\frac{1}{5}\leqslant1$,即 $\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{6}{5}$,故 $f\left(x-\frac{1}{5}\right)$ 的定义域为$\left[\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right]$

$f\left(x+\frac{1}{5}\right)+f\left(x-\frac{1}{5}\right)$ 的定义域应为 $f\left(x+\frac{1}{5}\right)$ 的定义域与 $f\left(x-\frac{1}{5}\right)$ 的定义域的

公共部分，故 $f\left(x+\frac{1}{5}\right)+f\left(x-\frac{1}{5}\right)$ 的定义域为 $[\frac{1}{5},\frac{4}{5}]$.

【答】本题正确答案为 B.

7 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\sin x)$；　(3) $f(\lg x)$；　(4) $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(\log_2 x)$.

【解】(1) $0<x^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1$，

所以　$f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(2) $0<\sin x\leqslant 1$，即 $2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

所以　$f(\sin x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(3) $0<\lg x\leqslant 1$，　$10^0<x\leqslant 10^1$，　即 $1<x\leqslant 10$，

所以　$f(\lg x)$ 的定义域为 $(1,10]$

(4) $\begin{cases}0<x-\frac{1}{2}\leqslant 1,\\ 0<\log_2 x\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{2},\\ 2^0<x\leqslant 2^1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{2},\\ 1<x\leqslant 2,\end{cases}\Rightarrow 1<x\leqslant\frac{3}{2}$，

所以　$f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(\log_2 x)$ 的定义域为 $\left(1,\frac{3}{2}\right]$.

要点

所谓函数的定义域就是自变量 x 的允许取值范围，因此

- 对于用数学表达式表示的函数，其定义域就是使数学表达式有意义的 x 的取值范围，因此要注意某些运算对函数的限制. 一些常见的限制有：

  在分式中的分母不能为零；

  在根式中负数不能开偶次方根；

  在对数中，真数要大于 0；

  在反三角函数中，要符合反三角函数的定义域.

- 对于已知 $f(x)$ 的定义域，要求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域，只要将 $f(x)$ 中 x 的变化范围当成 $\varphi(x)$ 的变化范围，再从中解出 x 的变化范围，这个 x 的变化范围就是函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域. 例如，函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，则可得 $f(ax)(a>0)$ 的定义域为 $[\frac{1}{a},\frac{2}{a}]$.

- 对于分段函数，它的定义域为所有分段区间的并集.
- 如果函数的表达式由若干项组成，它的定义域是各项定义域的公共部分.

二、函数值与函数记号

1 若 $f(x)=x^3+1$，求 $f(x^2)$，$[f(x)]^2$，$f(0)$ 及 $f(a+1)$.

【解】$f(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$,

$[f(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$,

$f(0)=0^3+1=1$,

$f(a+1)=(a+1)^3+1$.

2. 设 $f(x+1)=x^2+4x-3$,求 $f(x)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

【解】令 $x+1=t$,解得 $x=t-1$,代入原式得:

$f(t)=(t-1)^2+4(t-1)-3=t^2+2t-6$,

故 $f(x)=x^2+2x-6$,

所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}\right)-6=\frac{1}{x^2}(1+2x-6x^2)$.

3. 设 $f(x)=\frac{1}{x+1}$,求:

(1) $f(x-1)$; (2) $f(x)-1$; (3) $f\left(\frac{1}{x}\right)$; (4) $f\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

【解】(1) $f(x-1)=\frac{1}{(x-1)+1}=\frac{1}{x}$.

(2) $f(x)-1=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$.

(3) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x}{x+1}$.

(4) $f\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{1}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x+1}{2x+1}$.

4. 已知 $f(x)=\ln x+1$,$g(x)=\sqrt{x}+1$,求 $f[g(x)]$.

【解】$f[g(x)]=f[\sqrt{x}+1]=\ln(\sqrt{x}+1)+1$.

5. 设 $f\left(\frac{1}{x}+1\right)=3x+2$,求 $f(x)$.

【解】令 $\frac{1}{x}+1=t$ 即 $\frac{1+x}{x}=t$,解得 $x=\frac{1}{t-1}$ 代入原式得:

$f(t)=\frac{3}{t-1}+2=\frac{3+2t-2}{t-1}=\frac{1+2t}{t-1}$,

所以 $f(x)=\frac{1+2x}{x-1}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0,\\ x, & 0<x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(-2)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1.5)$.

【解】$f(-2)=\frac{1}{-2-1}=-\frac{1}{3}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

$f(1.5)=2$.

7. 设 $f(x)=\cos x$,则 $f(\cos 0)=(\quad)$.

A) 0　　B) 1　　C) $\cos 1$　　D) $-\cos 1$

【分析】因为 $\cos 0=1$, 所以 $f(\cos 0)=f(1)$.

由已知 $f(x)=\cos x$,得 $f(1)=\cos 1$.

所以 $f(\cos 0)=f(1)=\cos 1$.

【答】本题正确答案为 C.

8. 设 $g(x)=1+x$,且当 $x\neq 0$ 时,$f[g(x)]=\frac{1-x}{x}$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=(\quad)$.

A) 0　　B) 1　　C) 3　　D) -3

【分析】本题要求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的函数值,令 $g(x)=\frac{1}{2}$,则有 $1+x=\frac{1}{2}$,由此得 $x=-\frac{1}{2}$,

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left.\frac{1-x}{x}\right|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-3$.

【答】本题正确答案为 D.

9. 设 $g(x)=\ln 5$,则 $g(x+2)-g(x-1)=(\quad)$.

A) $\ln\frac{7}{6}$　　B) $\ln 7$　　C) $\ln 5$　　D) 0

【分析】因为 $g(x)=\ln 5$, 所以 $g(x+2)=\ln 5, g(x-1)=\ln 5$

于是 $g(x+2)-g(x-1)=\ln 5-\ln 5=0$.

【答】本题正确答案为 D.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ 1-\sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$ 求:

(1) $g[f(1)]$;　　(2) $f[g(-1)]$.

【解】(1) 由 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $f(1)=1-1=0$,

由 $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ 1-\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$ 得 $g(0)=0^2=0$,

所以 $g[f(1)]=g(0)=0$.

(2) 因为 $g(-1)=(-1)^2=1$, 所以 $f[g(-1)]=f(1)=1-1=0$.

11. 若 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$,则 $f(x)=(\quad)$.

A) x^2　　B) e^x　　C) $\ln x$　　D) $\sin x$

【答】本题正确答案为 B(因为 $e^x\cdot e^y=e^{x+y}$).

12. 若 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=(\quad)$.

A) $f(x)$　$x\in(-\infty,+\infty)$　　B) 1　$x\in(-\infty,+\infty)$

C) 0　$x \in (-\infty, +\infty)$　　　　D) 不存在

【分析】因为　当 $|x| \leqslant 1$ 时，$f(x) = 1$，　故　$f[f(x)] = 1$.

当 $|x| > 1$ 时，$f(x) = 0$，　故　$f[f(x)] = 1$.

所以　$f[f(x)] = 1$　　$x \in (-\infty, +\infty)$.

【答】本题正确答案为 B.

☞ 要点

• 已知函数 $f(x)$ 的表达式，要求某一点 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 或求函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，只要将 $f(x)$ 表达式中的字母 x 换成 x_0 或 $\varphi(x)$，再进行计算整理即得所求.

• 若已知 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，要求 $f(x)$ 的表达式，一般可令 $\varphi(x) = t$，从中解出 $x = \psi(t)$，将 $\varphi(x) = t$ 及 $x = \psi(t)$ 代入原表达式可得关于变量 t 的函数表达式，再将字母 t 换成 x，即得函数 $f(x)$ 的表达式.

• 若求分段函数在某点 x_0 处的函数值，要先判断 x_0 在哪个区间，再用相应的表达式求出函数值.

三、反函数的求法

1 设 $y = 1 + \lg(x + 2)$，求它的反函数.

【解】因为　$y - 1 = \lg(x + 2)$，

所以　$x + 2 = 10^{y-1}$.

即　$x = 10^{y-1} - 2$.

故所求的反函数为 $y = 10^{x-1} - 2$.

2 求函数 $y = -\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$　$(0 < x \leqslant 5)$ 的反函数.

【解】由 $y = -\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$　得 $-\frac{5}{3}y = \sqrt{25 - x^2}$　$\Rightarrow$　$x^2 = 25 - \frac{25}{9}y^2$.

因为　$0 < x \leqslant 5$，　　故　$x = \sqrt{25 - \frac{25}{9}y^2} = \frac{5}{3}\sqrt{9 - y^2}$.

所以　所求的反函数为 $y = \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$，　　$-3 \leqslant x \leqslant 0$.

☞ 要点

求函数 $y = f(x)$ 的反函数的基本方法为：

第一步：由 $y = f(x)$ 解出 $x = \varphi(y)$；

第二步：把 $x = \varphi(y)$ 中的字母 x 换成 y，y 换成 x，得 $y = \varphi(x)$．$y = \varphi(x)$ 就是函数 $y = f(x)$ 的反函数.

四、判断函数的奇偶性

1 判断下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数：

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$；　(2) $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

【分析】要判断函数的奇、偶性，应根据函数的奇偶性定义进行，若对一切 x，有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数，若有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数，如果上述两种情况都不成立，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

【解】(1) 因为　$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x\neq\begin{cases}f(x),\\-f(x).\end{cases}$

所以　$f(x)$ 是非奇偶函数.

(2) 因为　$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-f(x)$，

所以　$f(x)$ 是奇函数.

(3) 因为　$f(-x)=\sqrt[3]{[1-(-x)]^2}+\sqrt[3]{[1+(-x)]^2}=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$
$=f(x)$，

所以　$f(x)$ 是偶函数.

2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，则下列函数中必为奇函数的是(　).

A) $y=c$　　B) $y=xf(x^2)$　　C) $|f(x)|$　　D) $y=-|f(x)|$

【答】本题正确答案为 B.

3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，则下列函数中必为偶函数的是(　).

A) $y=-f(-x)$　　B) $y=f(-x^3)$　　C) $y=|f(x)|$　　D) $y=f(x^4)$

【答】本题正确答案为 D.

4 判断函数 $f(x)=x^3\sin x$ 的奇偶性.

【分析】根据奇、偶函数的定义来判断.

【解】因为　$f(-x)=(-x)^3\sin(-x)=-x^3(-\sin x)=x^3\sin x=f(x)$，

所以　$f(x)=x^3\sin x$ 是偶函数.

5 证明函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

【证明】因为　$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$

$$=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\log_a\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)，$$

所以　$f(x)$ 是奇函数.

6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　(2) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$；　(3) $y=\dfrac{x}{a^x-1}$；　(4) $y=\sin x\cdot\cos x$.

【解】(1) 因为　$y(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=y(x)$，

所以　y 是偶函数.

(2) 因为　$y(-x)=\dfrac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{a^x}+1}{\dfrac{1}{a^x}-1}=\dfrac{1+a^x}{1-a^x}=-\dfrac{a^x+1}{a^x-1}=-y(x)$，

所以　y 是奇函数.

(3) 因为　$y(-x)=\dfrac{-x}{a^{-x}-1}=\dfrac{xa^x}{a^x-1}\neq\begin{cases}y(x),\\-y(x),\end{cases}$

所以　y 是个非奇非偶函数.

(4) 因为　$\sin(-x)=-\sin x$，故 $\sin x$ 是一个奇函数，

又　因为　$\cos(-x)=\cos x$，故 $\cos x$ 是一个偶函数，

所以　$y=\sin x\cdot\cos x$ 是奇函数.

要点

• 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性的基本方法是先求出 $f(-x)$ 的表达式，然后与 $f(x)$ 的表达式相比较，若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数，若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数，若 $f(-x)$ 既不与 $f(x)$ 相等，也不与 $-f(x)$ 相等，则 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

• 另外，有几个结论需记住：两个奇函数的乘积是偶函数，两个偶函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

五、判断两个函数的异同

1 判断函数 $f(x)=\lg x^2$ 与函数 $\varphi(x)=2\lg x$ 是否相同.

【解】由于函数 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $\varphi(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，它们的定义域不相同，故这两个函数不相同.

2 判断下列各对函数是否相同：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x},\varphi(x)=1$；　(2) $f(x)=x,\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=x,\varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

【解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它们的定义域不同，故这两个函数不相同.