工程数学习题解答

（下　册）

武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系　合编

武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系
合编

湖北省嘉鱼县印刷厂印刷

目　录

数学物理方程与特殊函数

第一章　一些典型方程和定解条件的推导

1. 长为l的均匀杆，侧面绝缘，一端温度为零，另一端有恒定热流q进入（即单位时间内通过单位截面积流入的热量为q），杆的初始温度分布是$\frac{x(l-x)}{2}$，试写出相应的定解问题.

解：由于杆的侧面绝缘，热量只能沿长度方向传导，且在垂直于长度方向的截面上温度一致. 取x轴方向与细杆方向一致，原点为杆的一端. 设t时刻杆上x点的温度为$u(x,t)$，它满足一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad (0<x<l,t>0)$$

初始条件为
$$u\Big|_{t=0}=\frac{x(l-x)}{2}.$$

若 n 为杆在端点处的外法线，单位时间内通过杆端单位截面面积流入杆内的热量为$K\frac{\partial u}{\partial n}$.

若在$x=l$端有恒定热流q进入，则

$$K\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=l}=K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=q;$$

若在$x=0$端有恒定热流q进入，则

$$K\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0}=-K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=q.$$

$\therefore$ 边界条件为 $u\Big|_{x=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\dfrac{q}{K}$;

或 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\dfrac{q}{K},\ u\Big|_{x=l}=0.$

所求定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & (0<x<l,t>0);\\ u\Big|_{t=0}=\dfrac{x(l-x)}{2}; \\ u\Big|_{x=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\dfrac{q}{K}.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<l,t>0);\\ u\Big|_{t=0}=\dfrac{x(l-x)}{2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\dfrac{q}{K},\ u\Big|_{x=l}=0.\end{cases}$$

2. 长为 l 的弦两端固定，开始时在 $x=c$ 受到冲量的作用，试写出相应的定解问题.

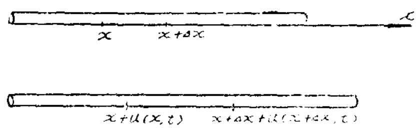
解：线密度为ρ的弦，在 $t=0$ 时在 $x=c$ 处受到冲量 K 的作用引起弦振动.设 t 时刻弦上 x 点处位移为 $u(x,t)$. 今在弦上 $x=c$ 附近取任意小的一段 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 来考察，由动量守恒定律可知:

$$\rho 2\delta\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}\approx\begin{cases}K, & |x-c|<\delta,\\ 0, & |x-c|>\delta.\end{cases}$$

$\therefore$ 所求定解问题为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<l,\ t>0); \\
u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0; \\
u\Big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{K}{2\delta\rho}, & |x-c|<\delta \\ 0, & |x-c|>\delta. \end{cases} & (\delta \to 0).
\end{cases}
$$

3. 有一均匀杆，只要杆中任一小段有纵向位移或速度，必导致邻段的压缩或伸长，这种伸缩传开去，就有纵波沿着杆传播。试推导杆的纵振动方程.



解：杆作纵振动时，设在t时刻杆上点x处纵向位移$u(x,t)$、张力$T(x,t)$.根据虎克定律，张力和杆的伸长率成正比．因此先计算t时在点x处杆的伸长率.杆上取$(x, x+\Delta x)$小段，即小段原长Δx.t时点x变到点$x+u(x,t)$，点$x+\Delta x$变到点$x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$,此时小段长为$x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)-[x+u(x,t)] = \Delta x + u(x+\Delta x,t) - u(x,t)$，

即比原长伸长了：$u(x+\Delta x,t)-u(x,t)$，

$$\text{平均伸长率} = \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x},$$

$$\therefore \quad t\text{时点}x\text{处的伸长率} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

根据虎克定律，张力 $T(x,t) = E\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ （E为杨氏模量）．线密度为ρ的杆作纵振动时，在杆上取$(x, x+\Delta x)$小段来考察，此小段两端的张力分别为$-E\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$，$E\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$．由牛

顿第二定律得

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\approx E\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x},$$

即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $\left(\text{其中}\quad a^2=\dfrac{E}{\rho}\right)$.

4.一均匀杆原长为 l，一端固定，另一端沿杆的轴线方向被拉长 e 而静止，突然放手任其振动，试建立振动方程与定解条件.

解. 杆作纵振动时，由题 3，t 时杆上 x 点处位移 $u(x,t)$ 满足方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

若 $x=0$ 端固定，即 $u\big|_{x=0}=0$；

$x=l$ 端自由，即张力 $T\big|_{x=l}=0$， $\therefore\quad E\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$.

已知 $t=0$ 时杆静止， $\therefore\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$.

已知 $t=0$ 时杆的 $x=0$ 端固定， $x=l$ 端沿杆的轴线方向被拉长 e. 由于杆是均匀的可以设初始位移是 x 的线性函数，即 $u(x,0)=kx+b$.

$\because\quad u(x,0)\big|_{x=0}=0$， $\therefore\quad b=0$,

$\therefore\quad u(x,0)\big|_{x=l}=e$， $\therefore\quad kl+b=e$， $\therefore\quad k=\dfrac{e}{l}$,

$\therefore\quad u(x,0)=\dfrac{e}{l}x$.

∴ 所求定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<l, t>0); \\ u\Big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0; \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{e}{l}x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

5．若$F(z)$，$G(z)$是任意二阶可微函数，验证

$$u = F(x+at) + G(x-at)$$

满足方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证：设 $u = F(z) + G(y)$，
$$\begin{cases} z = x + at, \\ y = x - at. \end{cases}$$

则
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dF}{dz}a + \frac{dG}{dy}(-a), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dF}{dz}\cdot 1 + \frac{dG}{dy}\cdot 1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d^2F}{dz^2}a^2 + \frac{d^2G}{dy^2}(-a)^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2G}{dy^2},$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

6．若函数$u_1(x,t)$，$u_2(x,t)$，…，$u_n(x,t)$，…均为线性齐次方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q\frac{\partial u}{\partial x} + r\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$
的解，其中p，q，r只是x，t的函数，而且级数$u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$收敛，并对$x$，$t$可以进行两次逐项微分．求证级数$u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$满足原方程（这个结论叫做线性齐次方程的叠加原理）．

证：已知$u_k(x,t)$是所述方程的解，即

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + q\frac{\partial u_k}{\partial x} + r\frac{\partial u_k}{\partial t} \equiv 0, \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

且已知 $u=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$收敛，并对$x,t$可进行两次逐项微分.

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+q\frac{\partial u}{\partial x}+r\frac{\partial u}{\partial t}$$

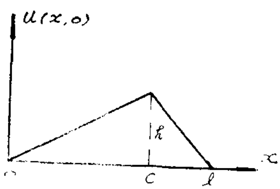
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}+q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial x}+r\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial t}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}+q\frac{\partial u_k}{\partial x}+r\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)\equiv 0,$$

即 $\quad u=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)\quad$ 满足原方程.

第二章 分离变量法

1. 设弦的两端固定于 $x=0$及$x=l$，弦的初始位移如图所示，初速度为零，又没有外力作用，求弦作横向振动时的位移函数 $u(x,t)$.



解：所求定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<l,\ t>0);\\ u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=l}=0; \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{h}{l-c}(l-x), & c\leqslant x\leqslant l;\end{cases} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)=0 .\end{cases}$$

满足方程及边界条件的解可由第22页（2.11）式（指的是原教材页数，下同）给出

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其系数按第23页（2.12）式为

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0,$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^c\frac{h}{c}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx+\frac{2}{l}\int_c^l\frac{h}{l-c}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

后一积分中令 $l-x=v$，得

$$\frac{2}{l}\int_0^{l-c}\frac{h}{l-c}v(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi v}{l}dv,$$

$$\therefore\ C_n=\frac{2}{l}\frac{h}{c}\left[\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{l}c-\frac{l}{n\pi}c\cos\frac{n\pi}{l}c\right]$$

$$+\frac{2}{l}\frac{h}{l-c}(-1)^{n+1}.$$

$$\cdot\left[\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{l}(l-c)-\frac{l}{n\pi}(l-c)\cos\frac{n\pi}{l}(l-c)\right]$$

$$=2h\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\frac{1}{c(l-c)}\sin\frac{n\pi}{l}c.$$

因此，所求的解为

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

2.就下列初始条件及边界条件解弦振动方程

$$u(x,0)=0,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=x(l-x),$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0.$$

解：令 $u\Big|_{t=0}=\varphi(x)=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)=x(l-x),$

与题1类似按第22页(2.11)式及第23页(2.12)式，所求解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0,$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{4l^3}{n^4\pi^4 a}[1-(-1)^n],$$

即 $$u(x,t)=\frac{4l^3}{a\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}[1-(-1)^n]\sin\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

3.就下列初始条件及边界条件解弦振动方程

$$u\Big|_{t=0}=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x<1;\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x(x-1);$$

$$u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=1}=0.$$

解：令 $l=1,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)=x(x-1),$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x<1;\end{cases}$$

与题1类似按第22页(2.11)式及第23页(2.12)式，所求解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $D_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$$=\frac{2}{n\pi a}\int_0^1 x(x-1)\sin n\pi x\,dx$$

$$=\frac{4}{n^4\pi^4a}[(-1)^n-1],$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin n\pi x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\sin n\pi x\,dx\right]$$

$$=\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

即 $u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\pi at\right.$

$$\left.+\frac{4}{n^4\pi^4a}[(-1)^n-1]\sin n\pi at\right\}\sin n\pi x.$$

4.解出习题一中第2题.

解：令 $u\big|_{t=0}=\varphi(x)=0,$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{K}{2\delta\rho}, & |x-c|<\delta\\ 0, & |x-c|>\delta\end{cases}\qquad(\delta\to0)$$

与题1类似按第22页(2.11)式及第23页(2.12)式，所求解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0,$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{n\pi a}\lim_{\delta\to 0}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{K}{2\delta\rho}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{n\pi a}\frac{K}{\rho}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{n\pi a}\frac{K}{\rho}\sin\frac{n\pi}{l}c,$$

即 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2K}{n\pi a\rho}\sin\frac{n\pi}{l}c\sin\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x.$

5. 试求适合于下列初始条件及边界条件的一维热传导方程的解

$$u\big|_{t=0}=x(l-x),$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0.$$

解：求 $u(x,t)$ 满足：

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l,t>0) \quad (1)\\ u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0 & (2)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)=x(l-x) & (3)\end{cases}$$

设 $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ (4)

即 $X(x)\neq 0,\quad T(t)\neq 0.$

由齐次边界条件(2)得 $X(0)T(t)=0,\quad X(l)T(t)=0.$

$\because\ T(t)\neq 0,\quad \therefore\ X(0)=0,\quad X(l)=0.$ (5)

(4)代入(1)得 $X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$,

即 $$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

$$\therefore \quad X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{6}$$
$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{7}$$

由(5)、(6)，按21页(2.8)，得固有值 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ (8)

固有函数 $X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ (9)

$(n=1, 2, \cdots)$.

(8)代入(7)，求得 $T_n(t)=D_ne^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}$ (10)

(9)、(10)代入(4)得 $u_n(x,t)=C_ne^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$,

$(n=1, 2, \cdots)$.

由叠加原理，$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$ (11)

也满足(1)、(2).要它满足(3)，即

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x),\quad 0<x<l,$$

$$\therefore \quad C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{12}$$

令 $\varphi(x)=x(l-x)$，$\therefore C_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$$=\frac{4l^2}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right] \tag{13}$$

(13)代入(11)得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

6.解一维热传导方程，其初始条件及边界条件为

$$u\big|_{t=0}=x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0.$$

解：求$u(x,t)$满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0<x<l,\ t>0) & (1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0 & (2)\\ u|_{t=0}=\varphi(x)=x & (3)\end{cases}$$

设 $u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0$ (4)

即 $X(x)\not\equiv 0$，$T(t)\not\equiv 0$.

由齐次边界条件(2)得$X'(0)T(t)=0$，$X'(l)T(t)=0$，

$\because\ T(t)\not\equiv 0$，$\therefore\ X'(0)=0$，$X'(l)=0$ (5)

(4)代入(1)得 $X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$，

即 $\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$，

$\therefore\ X''(x)+\lambda X(x)=0$ (6)

$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0$， (7)

由(5)、(6)求非零解$X(x)$.

(i) 设$\lambda<0$，即$-\lambda>0$，

(6)的解$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+B^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X'(x)=A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$，

由(5)，$X'(0)=A\sqrt{-\lambda}-B\sqrt{-\lambda}=0$，

$X'(l)=A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$，

解得 $A=0$，$B=0$，$\therefore X(x)\equiv 0$，非所求.

(ii)设 $\lambda=0$，(6)的解$X(x)=Ax+B$，$\therefore\ X'(x)=A$，

由(5)得 $A=0$，$\therefore X(x)=B$.

(iii)设 $\lambda>0$，(6)的解$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$，

$X'(x)=-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$，

由(5)， $X'(0)=B\sqrt{\lambda}=0$，$\therefore\ B=0$.

$$X'(l) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0,$$

要 $X(x)\neq 0$，$\therefore A\neq 0$，$\sqrt{\lambda}\,l = n\pi,\ (n=1,2,\cdots)$

得固有值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$ (8)

固有函数 $X_n(x) = A_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x$ (9)

$(n=0,1,2,\cdots$. $n=0$即(ii)).

将(8)代入(7)解得 $T_n(t) = D_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$ (10)

将(9)、(10)代入(4)，得：

$$n=0\text{时}\ u_0(x,t) = \frac{C_0}{2},$$

$$u_n(x,t) = C_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x \quad (n=1,2\cdots).$$

由叠加原理，$u(x,t) = \dfrac{C_0}{2}$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x \qquad (11)$$

也满足(1)、(2)，要它满足(3)，即

$$u\big|_{t=0} = \frac{C_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} C_n\cos\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x),\ 0<x<l.$$

$$\therefore\quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (12)$$

令 $\varphi(x) = x$，$\therefore C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$

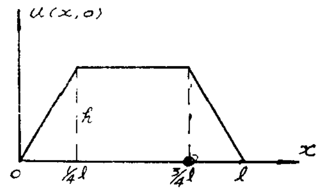
$$= \frac{2l}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right],\ (n=1,2,\cdots),$$

$$C_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = l,$$

代入(11)得 $u(x,t)=\frac{l}{2}$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right]e^{-a^2\left(\frac{n}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x .$$

7．一根长为l的细杆表面绝缘，其初始温度分布如图所示，由$t=0$开始两端温度保持于零度，求杆上温度分布．



解．t时杆上点x的温度$u(x,t)$满足：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(0<x<l,t>0),$$

两端温度保持零度，即$u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0$．

$$u|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases}\frac{4h}{l}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{4};\\ h, & \frac{l}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}l;\\ \frac{4h}{l}(l-x), & \frac{3}{4}l\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

此定解问题与题5相同．由题5 (11)、(12)式得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{4}}\frac{4h}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx+\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{3}{4}l}h\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3}{4}l}^{l}\frac{4h}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]$$