

成人高考专升本应试丛书

高等数学(二)

朱 青 编著

首都师范大学出版社

出版说明

全国各类成人高等学校统一招生考试,从 2001 年起将启用新大纲作为命题依据。与原大纲相比,新大纲在考试科目及各科考核知识点的范围上,都做了较大调整。对广大应考者来说,迫切必备的第一要件,就是要有一套完全符合新大纲规范的复习资料。我社组织编写的这套成人高考专升本应试丛书,就是为了满足准备参加 2001 年全国各类成人高校统一招生考试专升本的读者的紧迫需要。全套丛书共有八册,即《政治》、《高等数学》(一)、《高等数学》(二)、《英语》、《大学语文》、《艺术概论》、《教育理论》、《民法》。北京大学、中国人民大学、首都师范大学、北京建筑工程学院、北京教育学院等一些多年从事成人教育教学辅导、经验丰富的教授、专家参与了编写这套考试辅导书。

丛书各册都是由新大纲指导编写的。

一、本丛书系统全面地涵盖了新大纲考核知识点的范围,读者不会因为漏网现象而失分。

二、丛书的作者们注意到成人高考专升本应考者的时间宝贵。将考核知识点的内容做了简约化处理,舍去了不必要的赘言。丛书的内容实打实的,没有“水分”可挤了。

三、丛书的体例及知识点的表述,为求便于应考者记忆。又不止于此。作者们都是各学科的专家,对各自学科领域的知识驾轻就熟。他们力图为读者提供把握各科知识要点的纲领。

四、本丛书还按新大纲关于考试题型的要求,对重点题型和解题方法做了导引性的分析,旨在帮助读者从试题的角度复习考核知识点。

五、最后丛书各科都附有五套模拟试卷及答案,以便考生掌握试卷结构和评分标准,搞好复习。

我们相信,按这套丛书的复习思路和方法备考 2001 年的成人高考专科升本科考试,通过考试是没有什么问题的。

2000 年 9 月

编 者 的 话

本书是根据教育部高校学生司、教育部考试中心于2000年6月制定的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》《高等数学》(二),为非理工类各专业而编写的配套应试教材.

一、对新大纲规定的复习和考试内容、要求,考生应该注意:

1. 新大纲在考试内容方面作了较大的修订,下述知识点不再作为考试要求:

- (1)反函数的导数;
- (2)函数最大(小)值的经济应用;
- (3)用定积分求截面面积已知的立体体积;
- (4)定积分的经济应用;
- (5)二阶偏导数;
- (6)二元函数的极值.

考生需要了解:一方面,要求考生掌握的知识点减少了,对考生的要求有所降低;另一方面,由于新大纲规定试题的难易比例没有改变,仍然是:较容易题约占30%,中等难度题约占50%,较难题约占20%.综合两方面的情况可以得出结论,考试要求的降低是相对的.

2. 新大纲在试卷题型比例上作了调整,将填空题所占题型比例由原来的10%,提高到25%.填空题是较为灵活的题型,由于每道小题的分值不高,可以适当提高解题的难度.这就要求考生在复习过程中,注意掌握知识的系统性、完整性,理解概念的内涵,而不是仅仅停留在背一些结论的初级水平上.

3. 新大纲对考试内容中的方法运算部分的要求,由原来的二级化分改为三级化分,即:熟练掌握、掌握、会(或能).

希望考生在复习时,仔细阅读本书中的考试内容和考试要求.

二、本书编写的指导思想:

1. 以考生自学为主要对象,也兼顾教师备课、辅导之用.

2. 在内容的取舍上注意了两点:

(1)详略兼顾

对新大纲中所列的知识点和要求进行了详细的阐述,起到大纲内容的延伸、具体化的作用.同时,有意回避了数学理论过深的原理与方法的论证,对高等数学中浩瀚的证明题,只是根据大纲的要求,精心选编了其中的一小部分.

(2) 淡化难题、解题技巧

淡化难题以及解题技巧,强调对基础知识和基本概念的理解. 比如,本书没有例举利用两面夹定理证明数列极限存在性的例题,而是增加了在导数概念中,如何运用导数定义中的解析式解题的例子,从而使考生加深对导数概念的理解.

3. 在结构编序上,作者考虑应试教材的特点,将本书分为四篇:知识总览(含典型例题解析)、答疑解惑、综合练习以及模拟试卷. 在典型例题解析、综合练习、模拟试卷三部分的题型选编方面,按新大纲的要求分成单选、填空、计算和综合四类题型.

4. 在本书的综合练习部分,作者不搞题海战术,而是有针对性地选编了一些训练题,希望考生能够克服困难独立完成. 这是加深理解、学会运用和巩固学习成果的必要环节.

本书反映了作者多年来讲授专升本高等数学(二)考前辅导课程的经验,批阅历年试卷的总结以及对考试大纲和命题的研究,同时,也是参阅了朱光贵教授、曹承宾教授的研究成果而写成的,对此表示衷心感谢.

由于作者才疏学浅,时间仓促,书中难免有疏漏和不妥之处,欢迎读者批评指正.

编 者

2000年8月于中国人民大学

目 录

出版说明

编者的话

第一编 知识总览

第一章 函数、极限和连续	(1)
一、考试内容	(1)
二、考试要求	(2)
§ 1.1 函数	(3)
典型例题解析	(5)
§ 1.2 极限	(11)
典型例题解析	(15)
§ 1.3 连续	(21)
典型例题解析	(23)
第二章 一元函数微分学	(28)
一、考试内容	(28)
二、考试要求	(29)
§ 2.1 导数与微分	(29)
典型例题解析	(33)
§ 2.2 中值定理及导数的应用	(46)
典型例题解析	(49)
第三章 一元函数积分学	(66)
一、考试内容	(66)
二、考试要求	(66)
§ 3.1 不定积分	(67)
典型例题解析	(69)
§ 3.2 定积分	(84)
典型例题解析	(89)
第四章 多元函数微积分初步	(107)
一、考试内容	(107)

二、考试要求	(107)
§ 4.1 多元函数微积分初步	(107)
典型例题解析	(112)

第二编 答疑解惑

第一章 函数、极限和连续	(128)
第二章 一元函数微分学	(132)
第三章 一元函数积分学	(135)
第四章 多元函数微积分初步	(136)

第三编 综合练习

第一章 函数、极限和连续	(140)
参考答案	(144)
第二章 一元函数微分学	(145)
参考答案	(150)
第三章 一元函数积分学	(153)
参考答案	(156)
第四章 多元函数微积分初步	(158)
参考答案	(159)

第四编 全国成人高考专升本高等数学模拟试卷

高等数学模拟试卷(一)	(161)
答案及解析	(164)
高等数学模拟试卷(二)	(175)
答案及解析	(178)
高等数学模拟试卷(三)	(190)
答案及解析	(193)
高等数学模拟试卷(四)	(202)
答案及解析	(205)
高等数学模拟试卷(五)	(216)
答案及解析	(220)

附录 2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试非师范类高等数学(二)试卷 ..	(228)
参考答案及评分标准	(232)

第一编 知识总览

第一章 函数、极限和连续

一、考试内容

(一)函数

1. 函数的概念

函数的定义 函数的表示法 分段函数

2. 函数的简单性质

单调性 奇偶性 有界性 周期性

3. 反函数

反函数的定义 反函数的图象

4. 函数的四则运算与复合运算

5. 基本初等函数

幂函数 指数函数 对数函数 三角函数 反三角函数

6. 初等函数

(二)极限

1. 数列极限的概念

数列 数列极限的定义

2. 数列极限的性质

惟一性 有界性 四则运算定理 两面夹定理 单调有界数列极限存在定理

3. 函数极限的概念

函数在一点处极限的定义 左、右极限及其与极限的关系 x 趋于无穷($x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$)时函数的极限 函数极限的几何意义

4. 函数极限的定理

惟一性定理 两面夹定理 四则运算定理

5. 无穷小量和无穷大量

无穷小量与无穷大量的定义 无穷小量与无穷大量的关系 无穷小量与无穷大量的性质
两个无穷小量阶的比较

6. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(三)连续

1. 函数连续的概念

函数在一点连续的定义 左连续和右连续 函数在一点连续的充分必要条件 函数的间断点及其分类

2. 函数在一点处连续的性质

四则运算连续性 复合函数连续性

3. 闭区间上连续函数的性质

有界性定理 最大值与最小值定理 介值定理(包括零点定理)

4. 初等函数的连续性

二、考试要求

(一)函数

1. 理解函数的概念,会求函数的定义域、表达式及函数值. 会求分段函数的定义域、函数值,并作出简单的分段函数图象.

2. 理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性,会判断所给函数的类别.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图象),会求单调函数的反函数.

4. 理解和掌握函数的四则运算与复合运算,熟练掌握分析复合函数的复合过程.

5. 掌握基本初等函数的简单性质及其图象.

6. 了解初等函数的概念.

7. 会建立简单实际问题的函数关系式.

(二)极限

1. 了解极限的概念(对极限定义中“ $\varepsilon-N$ ”、“ $\varepsilon-\delta$ ”、“ $\varepsilon-M$ ”等形式的描述不作要求),能根据极限概念了解函数的变化趋势,掌握求函数在一点处的左极限与右极限,理解函数在一点处极限存在的充分必要条件.

2. 了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

3. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质,无穷小量与无穷大量的关系. 会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价).

4. 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

(三)连续

1. 理解函数在一点连续与间断的概念,掌握判断简单函数(含分段函数)在一点处连续,理解函数在一点连续与极限存在之间的关系.

2. 会求函数的间断点及确定其类型.

3. 了解在闭区间上连续函数的性质.

4. 理解初等函数在其定义区间上连续,并会利用函数连续性求极限.

§ 1.1 函 数

一、函数

1. 函数定义

(1) 函数定义

设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y , 变量 y 随变量 x 而变化, 如果变量 x 在实数集合 D 中取某个数值时, 变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记为

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量, y 叫因变量或函数.

(2) 定义域

使函数 f 有定义自变量的取值范围 D , 称为函数的定义域, 记为 $D(f)$.

(3) 值域

函数 y 的取值范围, 称为函数的值域, 记为 $Z(f)$.

2. 函数的表示法

(1) 公式法

用数学式子表示自变量与因变量之间对应关系的方法称为公式法.

(2) 表格法

将一系列自变量的值与对应的函数值列成表, 以此表示函数的方法称为表格法.

(3) 图示法

在平面直角坐标系 xOy 中, 以平面上的一条曲线表示函数的方法称为图示法.

3. 分段函数

在用公式法表示的函数中, 若变量之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表达, 即在定义域的不同部分用不同数学式子表示的函数, 称为分段函数.

分段函数的定义域是各个部分自变量 x 取值范围之总和.

二、函数的简单性质

1. 单调性

对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$,

如果 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加,

如果 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加, 记作: $f(x) \uparrow, x \in (a, b)$;

如果 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少,

如果 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内严格单调减少, 记作: $f(x) \downarrow, x \in (a, b)$.

(严格)单调增加和(严格)单调减少的函数统称为单调函数.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域是以原点为对称的区间, 对 $x \in D$:

奇函数: $f(-x) = -f(x)$, 图形对称于坐标原点.

偶函数: $f(-x) = f(x)$, 图形对称于 y 轴.

若上二式均不成立, 则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于 (a,b) 内的任意一点 x , 总有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 如果存在一个数 B , 使得对于 (a,b) 内的任意一点 x , 总有 $f(x) \leq B$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有上界的; 如果存在一个数 A , 使得对于 (a,b) 内的任意一点 x , 总有 $f(x) \geq A$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有下界的.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$, 如果存在一个不等于 0 的常数 l , 使得关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于 $(-\infty, +\infty)$ 中任何 x 的值都成立, 则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数. 此时 l 的整数倍也是 $f(x)$ 的周期. 通常称满足这个等式的最小正数 l 为函数的周期.

三、反函数、隐函数

1. 反函数的定义

(1) 反函数的定义

定义 设已知函数为

$$y=f(x) \quad (1)$$

如果由此解出的

$$x=\varphi(y) \quad (2)$$

是一个函数, 则称它为 $f(x)$ 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$, 并称 $f(x)$ 为直接函数.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量, 而用字母 y 表示函数, 为了与习惯一致, 通常将 (2) 式中的自变量 y 改写成 x , 而将函数 x 改写成 y , 于是 (1) 式的反函数就变为

$$y=\varphi(x)$$

记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2) 反函数存在定理

定理 如果函数

$$y=f(x) \quad D(f)=X$$

$$Z(f)=Y$$

是严格单调增加(或减少)的, 则它必定存在反函数

$$x=\varphi(y) \quad D(\varphi)=Y$$

$$Z(\varphi)=X$$

并且也是严格单调增加(或减少)的.

(3) 求反函数的步骤

第一步: 从直接函数 $y=f(x)$ 中解出

$$x=\varphi(y)$$

看它是否能成为函数;

第二步: 如果 $x=\varphi(y)$ 是函数, 将字母 x 换成 y , 将字母 y 换成 x , 得

$$y=\varphi(x)$$

这就是 $y=f(x)$ 的反函数.

2. 反函数的图象

反函数 $y=\varphi(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

3. 隐函数的定义

称 $y=f(x)$ 的函数为显函数. 其特点是因变量 y 单独地在等号的一边, 而另一边则仅仅是自变量 x 的表达式 $f(x)$.

称由方程 $F(x, y)=0$ 确定的函数关系为隐函数. 其特点是函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$ 表示出来.

四、复合函数

定义 设 y 是 u 的函数: $y=f(u)$

而 u 又是 x 的函数: $u=\varphi(x)$

又设 X 表示函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一个子集. 如果对于在 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值, 函数 $y=f(u)$ 有定义, 则 y 通过 $u=\varphi(x)$ 而成为 x 的函数, 记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 它的定义域为 X , u 叫做中间变量.

五、基本初等函数

1. 常数: $y=c, D(f)=(-\infty, +\infty)$
2. 幂函数: $y=x^\mu$, 定义域随实数 μ 而变
3. 指数函数: $y=a^x, (a>0, a\neq 1), D(f)=(-\infty, +\infty)$
4. 对数函数: $y=\log_a x, (a>0, a\neq 1), D(f)=(0, +\infty)$
5. 三角函数:

$$y=\sin x \quad D(f)=(-\infty, +\infty)$$

$$y=\cos x \quad D(f)=(-\infty, +\infty)$$

$$y=\tan x \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$y=\cot x \quad x \neq k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$y=\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$y=\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

6. 反三角函数:

$$y=\arcsin x, D(f)=[-1, 1], Z(f)=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y=\arccos x, D(f)=[-1, 1], Z(f)=[0, \pi]$$

$$y=\arctan x, D(f)=(-\infty, +\infty), Z(f)=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=\operatorname{arccot} x, D(f)=(-\infty, +\infty), Z(f)=(0, \pi)$$

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算(加, 减, 乘, 除)和复合所构成的并且能够用一个数学式子表示的函数称为初等函数.

典型例题解析

一、单项选择题

例 1 函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x-2)^2}$ 的定义域为().

A. $(-\infty, 2), (2, +\infty)$

B. $(-\infty, 1), (1, +\infty)$

C. $(-\infty, 2), (2, 3), (3, +\infty)$

D. $(-\infty, 1), (1, 2), (2, 3), (3, +\infty)$

解 应选 D.

[分析] 要 $\ln(x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 3$ 且 $x \neq 1$.

又要 $(x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

所以定义域为 $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$ 且 $x \neq 3$ 的一切实数.

例 2 设 $f(x) = \frac{1}{3}e^{x-1}$ ($-\infty < x < +\infty$) 是().

A. 单调增加函数

B. 单调减少函数

C. 非单调函数

D. 有界函数

解 应选 A.

[分析] $\because f(x) = \frac{1}{3}e^{x-1} = \frac{1}{3e}e^x$ ($-\infty < x < +\infty$)

且当 $a > 1$ 时, a^x 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 中单调增加

而 $e \approx 2.71828 > 1$

$\therefore e^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 中单调增加

于是 $f(x) = \frac{1}{3}e^{x-1} = \frac{1}{3e}e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中单调增加.

例 3 下列函数中, 奇函数为().

A. e^{-x^2+x}

B. $\frac{\sin x}{x}$

C. x^3+1

D. $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$

解 应选 D.

[分析] A. 非奇非偶 B. 偶函数 C. 非奇非偶 D. 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

则 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$

$$= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$= -f(x)$$

即 $f(-x) = -f(x)$

例 4 设 $f(x-1) = x(x-1)$, 则 $f(x)$ 等于().

A. $x(x+1)$

B. $(x-1)(x+2)$

C. $(x+1)(x-1)$

D. $(x+2)(x-1)$

解 应选 A.

[分析] 设 $u = x-1$

则 $f(u) = (u+1)u$

有 $f(x) = x(x+1)$

例 5 下列各对函数中 $f(x)$ 、 $g(x)$ 为同一函数的为().

A. $f(x) = x-1$ 与 $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

B. $f(x) = \frac{x \ln(1-x)}{x^2}$ 与 $g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$

C. $f(x)=\frac{x^2}{x}$ 与 $g(x)=x$

D. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

解 应选 B.

[分析] A. 定义域不同, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$.

B. $f(x)$ 的分母、分子可约去 x , 得到 $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}$, 这与 $g(x)$ 相同.

C. 定义域不同, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

D. 两个函数的对应法则不同. 当 $x \geq 0$ 时, 有 $x = \sqrt{x^2}$; 而当 $x < 0$ 时, 有 $-x = \sqrt{x^2}$.

例 6 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若 $\varphi(x)$ 是奇函数, 则 $F(x) = \varphi(x) \left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2} \right)$ 是 ().

A. 奇函数

B. 非奇非偶函数

C. 偶函数

D. 奇偶性与 a 的值有关

解 应选 C.

[分析] 设 $f(x) = \frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \because f(-x) &= \frac{1}{a^{-x}+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1-a^{-x}}{2(a^{-x}+1)} \\ &= \frac{a^x-1}{2(1+a^x)} \\ &= \frac{1+a^x-2}{2(1+a^x)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+a^x} \\ &= -\left(\frac{1}{1+a^x} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

又 $\varphi(x)$ 为奇函数, 而两个奇函数的积为偶函数.

$\therefore F(x) = \varphi(x) \cdot f(x)$ 是偶函数.

例 7 已知 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上是偶函数, 且当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = 2x^2 + x$, 则当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x)$ 的表达式是 ().

A. $2x^2 + x$

B. $2x^2 - x$

C. $-2x^2 + x$

D. $-2x^2 - x$

解 应选 B.

[分析] 因为 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上是偶函数, 故在该区间上应有 $f(-x) = f(x)$.

当 $x \in (0, 2]$ 时, 由已知式, $f(-x) = 2x^2 - x$.

$\therefore$ 应选 B.

例 8 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 在定义域内不是 () 函数.

A. 奇

B. 偶

C. 有界

D. 周期

解 应选 A.

[分析] 因为 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, 故它是偶函数, 有界函数, 且是周期函数.

例 9 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x & -\pi\leq x<0 \\ \cos x+x & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$ 在定义域内是()函数.

A. 无界 B. 偶 C. 单调 D. 周期

解 应选 B.

[分析] 若设 $g(x)=\cos x, x\in[-\pi, \pi], \varphi(x)=|x|, x\in[-\pi, \pi]$, 则 $f(x)=g(x)+\varphi(x), x\in[-\pi, \pi]$

因 $g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 均是偶函数, 故 $f(x)$ 是偶函数.

因 $f(x)$ 是偶函数, 所以它不是单调函数.

由 $f(x)$ 的表达式知, 它不是周期函数, 且在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是有界函数.

例 10 满足 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f^{-1}(x)}$ 的函数 $f(x)$ 是().

A. $-x+1$ B. x^3
C. $-\frac{1}{x}+1$ D. $\frac{2x+1}{x-1}$

解 应选 C.

[分析] 该题由题干所给的条件不易求出 $f(x)$, 可采用验证的方法. 即从所给的选择项出发, 假设选择项是正确的, 经验算, 看是否能推出关系式 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f^{-1}(x)}$.

A. 由 $f(x)=-x+1$, 可推出

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}+1$$

$$f^{-1}(x)=-x+1$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)\neq\frac{1}{f^{-1}(x)}$$

B. 由 $f(x)=x^3$, 可推出

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^3}$$

$$f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)\neq\frac{1}{f^{-1}(x)}$$

C. 由 $f(x)=-\frac{1}{x}+1$, 可推出

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-x+1$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f^{-1}(x)}$$

D. 由 $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$, 可推出

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2+x}{1-x}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) \neq \frac{1}{f^{-1}(x)}$$

例 11 函数 $y = \ln(x+1)$ 的反函数的值域是().

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

解 应选 A.

[分析] 所求值域就是求函数 $y = \ln(1+x)$ 的定义域. 由 $x+1 > 0$, 即 $x > -1$.

例 12 设 $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$, 则 $f(x^2-1) = ()$.

- A. $x^4 - x^2 - 3$ B. $x^4 + x^2 + 3$
C. $x^4 - x^2 + 3$ D. $x^4 + x^2 - 3$

解 应选 D.

[分析] 设 $u = x^2 + 1$, 则 $x^2 = u - 1$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(u) &= (u-1)^2 + 5(u-1) + 3 \\ &= u^2 + 3u - 1 \end{aligned}$$

$$\text{有 } f(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2 + 3(x^2-1) - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 3 \end{aligned}$$

例 13 函数 $y = e^x + e^{-x}$ 的图形对称于直线().

- A. $y = x$ B. $y = -x$ C. $x = 0$ D. $y = 0$

解 应选 C.

[分析] 因函数 $f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故函数对称 y 轴.

二、填空题

例 1 设 $f(x) = \ln x$, 则 $f[f(x)]$ 的定义域为_____.

解 填 $x > 1$.

[分析] 由 $f(x) = \ln x$, 知 $f[f(x)] = \ln f(x)$, 从而要 $f(x) > 0$, 即 $\ln x > 0$, 得 $x > 1$.

例 2 $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$ 的定义域为_____.

解 填 $[1, 100]$.

[分析] 由 $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$, 得 $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10$. $1 \leq x \leq 100$.

例 3 设 $f(x) = x^2 + ax + b$, 且 $f(-3) = f(2) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

解 填 $x^2 + x - 6$.

[分析] 求函数 $f(x)$, 就是确定 $f(x)$ 的表示式 $x^2 + ax + b$ 中未知的 a 和 b . 由 $f(-3) = 0, f(2) = 0$, 得方程组

$$\begin{cases} (-3)^2 + a(-3) + b = 0 \\ 2^2 + a \cdot 2 + b = 0 \end{cases}$$

解得 $a = 1, b = -6$

所以 $f(x) = x^2 + x - 6$

例 4 已知 $f(x) + f(y) = f(z)$, 如果 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $z =$ _____.

解 填 $\frac{xy}{x+y}$.

[分析] $\because f(x) = \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z}$$

故 $z = \frac{xy}{x+y}$

例5 设 $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 填 $f(x)$.

[分析]

$$f[f(x)] = \begin{cases} -1 & f(x) < 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ 1 & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} = f(x)$$

三、计算题

例1 设 $x-1 = f(\sqrt[3]{x}+1)$, 求 $f(x)$.

解 设 $u = \sqrt[3]{x}+1$, 则有 $x = (u-1)^3$

$$\begin{aligned} f(u) &= (u-1)^3 - 1 \\ &= u^3 - 3u^2 + 3u - 2 \end{aligned}$$

故 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

例2 $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$ 可以看成由哪些基本初等函数复合而成? 并求其定义域.

解 $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$ 可以分解为

$$y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = \sqrt{x}$$

求 $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$ 的定义域:

要求满足 $\ln \sqrt{x} \geq 0$, 则要 $\sqrt{x} \geq 1$, 即 $x \geq 1$

所以 $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$ 的定义域: $[1, +\infty)$

例3 求 $y = f(u) = \frac{1}{u}$ 与 $u = \varphi(x) = \ln(4-x^2)$ 所构成的复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 $y = f[\varphi(x)] = \frac{1}{\ln(4-x^2)}$

要求满足 $4-x^2 > 0$ 且 $4-x^2 \neq 1$

即 $|x| < 2$ 且 $x \neq \pm \sqrt{3}$

因此 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域:

$$(-2, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, 2)$$

例4 将下列函数按基本初等函数复合与四则运算形式分解.

(1) $y = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$

解 若视 $y = \arctan u$, 则 $u = \frac{2x}{1-x^2}$

因 $\frac{2x}{1-x^2}$ 已是基本初等函数四则运算形式, 无须再分解.

所以 $y = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ 由下列两式构成

$$y = \arctan u, u = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$(2) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

解 若视 $y = \ln u$, 则 $u = x + \sqrt{1+x^2}$; 若视 $u = x + v$, 则 $v = \sqrt{1+x^2}$; 若视 $v = \sqrt{w}$, 则 $w = 1+x^2$

于是, $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 由下列各式构成

$$y = \ln u, u = x + v, v = \sqrt{w}, w = 1+x^2$$

$$(3) y = \left(a^x \cos \frac{1}{x} \right)^{-3}$$

解 若视 $y = u^{-3}$, 则 $u = a^x \cos \frac{1}{x}$; 若视 $u = vw$, 则 $v = a^x, w = \cos \frac{1}{x}$; 若视 $w = \cos t$, 则 $t = \frac{1}{x}$

于是, $y = \left(a^x \cos \frac{1}{x} \right)^{-3}$ 是由下列各式构成

$$y = u^{-3}, u = vw, v = a^x, w = \cos t, t = \frac{1}{x}$$

四、综合题与证明题

例 1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调增加, 试证 $f(x) + g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上也单调增加.

证 对区间 $[a, b]$ 内任意两点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 由题意可知:

$$f(x_1) \leq f(x_2), g(x_1) \leq g(x_2)$$

因此 $f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2)$

所以, 函数 $f(x) + g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上也是单调增加的.

§ 1.2 极 限

一、数列极限的概念

1. 数列的定义

按自然顺序排成的无穷多个(或可数个)数, 称为数列, 记作

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

简记作 $\{y_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项, 各项依次称为数列的第 1 项, 第 2 项, $\dots$, 第 n 项, $\dots$. 第 n 项又称为数列的通项或一般项.

从函数定义来理解数列, 数列是一个函数, 其定义域是自然数集合 N , 数列的通项 y_n 就是函数的表达式. 即

$$y_n = f(n) \quad n \in N$$

2. 数列极限的定义

定义 对于数列 $\{y_n\}$, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, y_n 无限地趋于一个常数 A , 则称当 n 趋于无穷大时, 数列 $\{y_n\}$ 以常数 A 为极限, 或称数列收敛于 A , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$$