



面向 21 世纪 课 程 教 材  
Textbook Series for 21st Century

# 数 学 分 析

## 下 册

陈纪修 於崇华 金 路



高 等 教 育 出 版 社  
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 数学分析

下册

陈纪修 於崇华 金路



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

数学分析下册/陈纪修,於崇华,金路编著. —北京:高等教育出版社,2000.4

ISBN 7-04-007882-1

I. 数... II. ①陈...②於...③金... III. 数学分析 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 06787 号

数学分析 下册

陈纪修 於崇华 金路

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京外文印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 2000 年 4 月第 1 版

印 张 27.75

印 次 2000 年 8 月第 2 次印刷

字 数 508 000

定 价 23.30 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

## 内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向 21 世纪课程教材。本书是以复旦大学数学系近 20 年中陆续多次出版的《数学分析》为基础，为适应数学教学面向 21 世纪进行改革的需要而编写的。结合了多年来教学实践的经验体会，从体系、内容、观点、方法和处理上，对教材作了有益的改革。

全书分上、下两册出版。

上册内容包括：集合与映射、数列极限、函数极限与连续函数、微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分等八章。

下册内容包括：数项级数、函数项级数、Euclid 空间上的极限和连续、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、Fourier 级数等八章。

本书可以作为高等院校数学专业数学分析课程的教科书，也可供其他有关专业适用。

责任编辑 徐 刚  
封面设计 张 楠  
责任绘图 朱 静  
责任印制 陈伟光

# 目 录

<b>第九章 数项级数</b> .....	(1)
§ 1 数项级数的收敛性 .....	(1)
数项级数 .....	(1)
级数的基本性质 .....	(3)
习题 .....	(7)
§ 2 上极限与下极限 .....	(8)
数列的上极限和下极限 .....	(8)
上极限和下极限的运算 .....	(10)
习题 .....	(14)
§ 3 正项级数 .....	(15)
正项级数 .....	(15)
比较判别法 .....	(15)
Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法 .....	(17)
Raabe 判别法 .....	(20)
积分判别法 .....	(22)
习题 .....	(25)
§ 4 任意项级数 .....	(26)
任意项级数 .....	(26)
Leibniz 级数 .....	(27)
Abel 判别法与 Dirichlet 判别法 .....	(29)
级数的绝对收敛与条件收敛 .....	(32)
加法交换律 .....	(34)
级数的乘法 .....	(38)
习题 .....	(41)
§ 5 无穷乘积 .....	(42)
无穷乘积的定义 .....	(42)
无穷乘积与无穷级数 .....	(45)
习题 .....	(50)
<b>第十章 函数项级数</b> .....	(52)

§ 1	函数项级数的一致收敛性 .....	(52)
	点态收敛 .....	(52)
	函数项级数(或函数序列)的基本问题 .....	(53)
	函数项级数(或函数序列)的一致收敛性 .....	(56)
	习题 .....	(63)
§ 2	一致收敛级数的判别与性质 .....	(65)
	一致收敛的判别 .....	(65)
	一致收敛级数的性质 .....	(68)
	处处不可导的连续函数之例 .....	(75)
	习题 .....	(76)
§ 3	幂级数 .....	(78)
	幂级数的收敛半径 .....	(78)
	幂级数的性质 .....	(80)
	习题 .....	(86)
§ 4	函数的幂级数展开 .....	(87)
	Taylor 级数与余项公式 .....	(87)
	初等函数的 Taylor 展开 .....	(91)
	习题 .....	(99)
§ 5	用多项式逼近连续函数 .....	(100)
	习题 .....	(103)
<b>第十一章</b>	<b>Euclid 空间上的极限和连续 .....</b>	<b>(104)</b>
§ 1	Euclid 空间上的基本定理 .....	(104)
	Euclid 空间上的距离与极限 .....	(104)
	开集与闭集 .....	(106)
	Euclid 空间上的基本定理 .....	(109)
	紧集 .....	(111)
	习题 .....	(113)
§ 2	多元连续函数 .....	(114)
	多元函数 .....	(114)
	多元函数的极限 .....	(115)
	累次极限 .....	(116)
	多元函数的连续性 .....	(118)
	向量值函数 .....	(120)
	习题 .....	(122)
§ 3	连续函数的性质 .....	(123)

---

紧集上的连续映射 .....	(123)
连通集与连通集上的连续映射 .....	(125)
习题 .....	(127)
<b>第十二章 多元函数的微分学</b> .....	<b>(128)</b>
§ 1 偏导数与全微分 .....	(128)
偏导数 .....	(128)
方向导数 .....	(131)
全微分 .....	(132)
梯度 .....	(136)
高阶偏导数 .....	(137)
高阶微分 .....	(140)
向量值函数的导数 .....	(142)
习题 .....	(145)
§ 2 多元复合函数的求导法则 .....	(148)
链式规则 .....	(148)
一阶全微分的形式不变性 .....	(154)
习题 .....	(156)
§ 3 Taylor 公式 .....	(157)
习题 .....	(161)
§ 4 隐函数 .....	(162)
单个方程的情形 .....	(162)
多个方程的情形 .....	(168)
逆映射定理 .....	(175)
习题 .....	(177)
§ 5 偏导数在几何中的应用 .....	(180)
空间曲线的切线和法平面 .....	(180)
曲面的切平面与法线 .....	(186)
习题 .....	(191)
§ 6 无条件极值 .....	(192)
无条件极值 .....	(192)
函数的最值 .....	(198)
最小二乘法 .....	(201)
习题 .....	(204)
计算实习题 .....	(205)
§ 7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法 .....	(206)

---



	Lagrange 乘法法 .....	(206)
	一个最优价格模型 .....	(214)
	习题 .....	(216)
<b>第十三章</b>	<b>重积分</b> .....	(218)
§ 1	有界闭区域上的重积分 .....	(218)
	面积 .....	(218)
	二重积分的概念 .....	(220)
	多重积分 .....	(223)
	习题 .....	(225)
§ 2	重积分的性质与计算 .....	(225)
	重积分的性质 .....	(225)
	矩形区域上的重积分计算 .....	(227)
	一般区域上的重积分计算 .....	(230)
	习题 .....	(236)
§ 3	重积分的变量代换 .....	(239)
	曲线坐标 .....	(239)
	二重积分的变量代换 .....	(239)
	变量代换公式的证明 .....	(244)
	$n$ 重积分的变量代换 .....	(249)
	均匀球体的引力场模型 .....	(254)
	习题 .....	(256)
§ 4	反常重积分 .....	(258)
	无界区域上的反常重积分 .....	(258)
	无界函数的反常重积分 .....	(264)
	习题 .....	(267)
§ 5	微分形式 .....	(267)
	有向面积与向量的外积 .....	(267)
	微分形式 .....	(270)
	微分形式的外积 .....	(272)
	习题 .....	(276)
<b>第十四章</b>	<b>曲线积分、曲面积分与场论</b> .....	(277)
§ 1	第一类曲线积分与第一类曲面积分 .....	(277)
	第一类曲线积分 .....	(277)
	曲面的面积 .....	(281)
	第一类曲面积分 .....	(285)

	通讯卫星的电波覆盖的地球面积	(288)
	习题	(290)
§ 2	第二类曲线积分与第二类曲面积分	(292)
	第二类曲线积分	(292)
	曲面的侧	(297)
	第二类曲面积分	(299)
	习题	(305)
§ 3	Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式	(306)
	Green 公式	(306)
	曲线积分与路径无关的条件	(313)
	Gauss 公式	(318)
	Stokes 公式	(322)
	习题	(326)
§ 4	微分形式的外微分	(329)
	外微分	(329)
	外微分的应用	(331)
	习题	(333)
§ 5	场论初步	(333)
	梯度	(333)
	通量与散度	(334)
	向量线	(336)
	环量与旋度	(338)
	Hamilton 算子	(343)
	保守场与势函数	(345)
	均匀带电直线的电场模型	(347)
	热传导模型	(349)
	习题	(351)
<b>第十五章</b>	<b>含参变量积分</b>	<b>(353)</b>
§ 1	含参变量的常义积分	(353)
	含参变量常义积分的定义	(353)
	含参变量常义积分的分析性质	(354)
	习题	(357)
§ 2	含参变量的反常积分	(359)
	含参变量反常积分的一致收敛	(359)
	一致收敛的判别法	(360)

	一致收敛积分的分析性质 .....	(365)
	习题 .....	(371)
§ 3	Euler 积分 .....	(372)
	Beta 函数 .....	(372)
	Gamma 函数 .....	(374)
	Beta 函数与 Gamma 函数的关系 .....	(375)
	习题 .....	(382)
<b>第十六章</b>	<b>Fourier 级数</b> .....	(384)
§ 1	函数的 Fourier 级数展开 .....	(384)
	Fourier 级数(三角级数) .....	(384)
	周期为 $2\pi$ 的函数的 Fourier 展开 .....	(385)
	正弦级数和余弦级数 .....	(387)
	任意周期的函数的 Fourier 展开 .....	(389)
	习题 .....	(390)
§ 2	Fourier 级数的收敛判别法 .....	(393)
	Dirichlet 积分 .....	(393)
	Riemann 引理及其推论 .....	(395)
	Fourier 级数的收敛判别法 .....	(397)
	习题 .....	(403)
§ 3	Fourier 级数的性质 .....	(404)
	Fourier 级数的分析性质 .....	(404)
	Fourier 级数的逼近性质 .....	(407)
	习题 .....	(409)
§ 4	Fourier 变换和 Fourier 积分 .....	(410)
	Fourier 变换及其逆变换 .....	(410)
	Fourier 变换的性质 .....	(414)
	习题 .....	(418)
§ 5	快速 Fourier 变换 .....	(419)
	离散 Fourier 变换 .....	(419)
	快速 Fourier 变换 .....	(421)
	习题 .....	(425)
	计算实习题 .....	(426)
<b>索 引</b>	.....	(427)

## 第九章 数项级数

早在大约公元前 450 年,古希腊有一位名叫 Zeno 的学者,曾提出若干个在数学发展史上产生过重大影响的悖论,“Achilles(传说中的希腊英雄)追赶乌龟”即是其中较为著名的一个.

设乌龟在 Achilles 前面  $S_1$  米处向前爬行, Achilles 在后面追赶,当 Achilles 花了  $t_1$  秒时间,跑完  $S_1$  米时,乌龟已向前爬了  $S_2$  米;当 Achilles 再花  $t_2$  秒时间,跑完  $S_2$  米时,乌龟又向前爬了  $S_3$  米……这样的过程可以一直继续下去,因此 Achilles 永远也追不上乌龟.

显然,这一结论完全有悖于常识,是绝对荒谬的.没有人会怀疑, Achilles 必将在某一  $T$  秒时间内,跑了  $S$  米后追上乌龟( $T$  和  $S$  是常数). Zeno 的诡辩之处就在于把有限的时间  $T$ (或距离  $S$ ) 分割成无穷段  $t_1, t_2, \dots$ (或  $S_1, S_2, \dots$ ), 然后一段一段地加以叙述,从而造成一种假象;这样“追一爬一追一爬”的过程将随时间的流逝而永无止境.事实上,如果将花掉的时间  $t_1, t_2, \dots$ (或跑过的距离  $S_1, S_2, \dots$ ) 加起来,即

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots \text{(或 } S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots \text{)},$$

尽管相加的项有无限个,但它们的和却是有限数  $T$ (或  $S$ ).换言之,经过时间  $T$  秒, Achilles 跑完  $S$  米后,他已经追上乌龟了.

这里,我们遇到了无限个数相加的问题.很自然地,我们要问,这种“无限个数相加”是否一定有意义?若不一定的话,那么怎么来判别?有限个数相加时的一些运算法则,如加法交换律、加法结合律对于无限个数相加是否继续有效?如此等等.这正是本章要讨论的数项级数的一些概念.

### §1 数项级数的收敛性

#### 数项级数

设  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  是可列无穷个实数,我们称它们的“和”

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

为数项级数(简称级数),记为  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ , 其中  $x_n$  称为级数的通项或一般项.

当然,我们无法直接对无穷多个实数逐一地进行加法运算,所以必须对上述的级数求和给出合理的定义.为此构作级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的“部分和数列” $\{S_n\}$ :

$$S_1 = x_1,$$

$$S_2 = x_1 + x_2,$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots \\ S_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k, \\ & \dots\dots \end{aligned}$$

**定义9.1.1** 如果部分和数列  $\{S_n\}$  收敛于有限数  $S$ , 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛, 且称它的和为  $S$ , 记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

如果部分和数列  $\{S_n\}$  发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  发散.

由上述定义可知, 只有当级数收敛时, 无穷多个实数的加法才是有意义的, 并且它们的和就是级数的部分和数列的极限. 所以, 级数的收敛与数列的收敛本质上是一回事.

**例 9.1.1** 设  $|q| < 1$ , 则几何级数(即等比级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

是收敛的. 这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

显然,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

现在我们来回答本章开头提出的 Achilles 追赶乌龟的问题.

设乌龟的速度  $v_1$  米/秒与 Achilles 的速度  $v_2$  米/秒之比为  $q = \frac{v_1}{v_2}$ ,  $0 < q < 1$ . Achilles 在乌龟后面  $S_1$  米处开始追赶乌龟. 当 Achilles 跑完  $S_1$  米时, 乌龟已向前爬了  $S_2 = qS_1$  米; 当 Achilles 继续跑完  $S_2$  米时, 乌龟又向前爬了  $S_3 = q^2S_1$  米……当 Achilles 继续跑完  $S_n$  米时, 乌龟又向前爬了  $S_{n+1} = q^nS_1$  米……显然 Achilles 要追赶上乌龟, 必须跑完上述无限段路程  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ , 由于

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots &= S_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) \\ &= \frac{S_1}{1 - q}, \end{aligned}$$

即我们在前面所说的, 这无限段路程的和却是有限的, 也就是说, 当 Achilles 跑完路程  $S = \frac{S_1}{1 - q}$  米(即经过了时间  $T = \frac{S_1}{(1 - q)v_2}$  秒), 他已经追上了乌龟.

**例 9.1.2 级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的. 这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ 1, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

显然  $\{S_n\}$  是发散的.

当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛时, 我们还可以构作它的“余和数列” $\{r_n\}$ , 其中

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots,$$

设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ , 则  $r_n = S - S_n$ , 显然, 这时  $\{r_n\}$  收敛于 0.

**级数的基本性质**

可以由数列的性质平行地导出级数的一些性质.

**定理 9.1.1 (级数收敛的必要条件)** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛, 则其通项所构成的数列  $\{x_n\}$  是无穷小量, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**证** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ , 则对  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S,$$

于是得到,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

证毕

定理 9.1.1 可以用来判断某些级数发散. 例如, 当  $|q| \geq 1$  时  $\{q^n\}$  不是无穷小量, 因此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  发散.

要注意的是, 定理 9.1.1 只是级数收敛的必要条件, 而非充分条件. 换言之, 数列  $\{x_n\}$  为无穷小量并不能保证级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛. 例如, 虽然数列  $\{\frac{1}{n}\}$  是无穷小量, 但根据例 2.4.7, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (称为调和级数) 却是发散的.

**定理 9.1.2 (线性性)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ ,  $\alpha, \beta$  是两个常数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

证 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和数列为  $\{S_n^{(1)}\}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和数列为  $\{S_n^{(2)}\}$ , 则

对  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  的部分和数列  $\{S_n\}$  有

$$S_n = \alpha S_n^{(1)} + \beta S_n^{(2)},$$

于是成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \alpha A + \beta B.$$

证毕

定理 9.1.2 表示对收敛级数可以进行加法和数乘运算.

例 9.1.3 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n}$  的值.

解 因为几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$  都收敛, 所以有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n} &= \frac{16}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{6}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ &= \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = 14. \end{aligned}$$

定理 9.1.3 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛, 则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛, 且其和不变.

证 设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  添加括号后表示为

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1}) + (x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2}) + \cdots + (x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \cdots + x_{n_k}) + \cdots,$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1},$$

$$y_2 = x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2},$$

.....

$$y_k = x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \cdots + x_{n_k},$$

.....

则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  按上面方式添加括号后所得的级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ . 令  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的部分和数列为

为  $\{S_n\}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  的部分和数列为  $\{U_n\}$ , 则

$$U_1 = S_{n_1},$$

$$U_2 = S_{n_2},$$

.....

$$U_k = S_{n_k},$$

.....

显然  $\{U_n\}$  是  $\{S_n\}$  的一个子列, 于是由  $\{S_n\}$  的收敛性即得到  $\{U_n\}$  的收敛性, 且极限相同.

证毕

定理 9.1.3 可以理解为收敛的级数满足加法结合律.

在极限论中我们已经知道, 一个数列的某个子列收敛并不能保证数列本身收敛. 因此, 相应地, 在一个级数的和式中, 添加了括号后所得的级数收敛并不能保证原来的级数收敛, 即上面的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  收敛并不能保证级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛,

**例 9.1.4** 我们已知例 9.1.2 中的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的. 但若在每两项之间加上括号, 则有

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0,$$

即添加了括号后所得的级数是收敛的.

更有甚者, 对一个发散的级数, 若按不同的方式加括号, 所得的级数可能收敛于不同的极限. 仍以

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

为例, 除了上面的加括号方式外, 还可以有

$$\begin{aligned} & 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1) + \cdots \\ & = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

的不同结果.

这就是说, 发散的级数不满足加法结合律.

**例 9.1.5** 计算机进行计算时所处理的数据都是二进制的, 求二进制无限循环小数  $(110.110\ 110\cdots)_2$  的值.

**解**  $(110.110\ 110\cdots)_2$



$$= 2^2 + 2^1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \cdots,$$

设上述级数的部分和数列为  $\{S_n\}$ , 则

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2^{3k-5}} + \frac{1}{2^{3k-4}} \right) = 6 \frac{6}{7} \left[ 1 - \left( \frac{1}{8} \right)^n \right],$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{3n-2}},$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 6 \frac{6}{7},$$

即二进制无限循环小数  $(110.110110\cdots)_2$  的值为  $6 \frac{6}{7}$ .

**例 9.1.6** 一慢性病人需每天服用某种药物, 按医嘱每天服用 0.05 mg, 设体内的药物每天有 20% 通过各种渠道排泄掉, 问长期服药后体内药量维持在怎样的水平?

**解** 服药第一天, 病人体内药量为 0.05 mg; 服药第二天, 病人体内药量为  $0.05(1 - 20\%) + 0.05 = 0.05 \left( 1 + \frac{4}{5} \right)$  mg; 服药第三天, 病人体内药量为  $[0.05(1 - 20\%) + 0.05](1 - 20\%) + 0.05 = 0.05 \left[ 1 + \frac{4}{5} + \left( \frac{4}{5} \right)^2 \right]$  mg;  $\cdots$ . 按此推下去, 长期服药后, 体内药量近似为

$$\begin{aligned} & 0.05 \left[ 1 + \frac{4}{5} + \left( \frac{4}{5} \right)^2 + \left( \frac{4}{5} \right)^3 + \cdots \right] (\text{mg}) \\ &= 0.05 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4}{5} \right)^n (\text{mg}) = 0.25 (\text{mg}). \end{aligned}$$

在实际病例中, 医生往往根据病人的病情, 考虑体内药量水平的需求, 确定病人每天的服药量(见习题 4).

**例 9.1.7** 计算级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ .

**解** 设级数的部分和数列为  $\{S_n\}$ , 则

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_n - S_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{2n-1}{2^n}, \end{aligned}$$

于是