面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学分析

下册

陈纪修　於崇华　金　路

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数学分析

下 册

陈纪修 於崇华 金 路

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析下册/陈纪修,於崇华,金路编著.—北京:高等教育出版社,2000.4

ISBN 7-04-007882-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①陈…②於…③金… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第06787号

数学分析　下册

陈纪修　於崇华　金路

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京外文印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2000年4月第1版
印　张	27.75	印　次	2000年8月第2次印刷
字　数	508 000	定　价	23.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。本书是以复旦大学数学系近20年中陆续多次出版的《数学分析》为基础，为适应数学教学面向21世纪进行改革的需要而编写的。结合了多年来教学实践的经验体会，从体系、内容、观点、方法和处理上，对教材作了有益的改革。

全书分上、下两册出版。

上册内容包括：集合与映射、数列极限、函数极限与连续函数、微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分等八章。

下册内容包括：数项级数、函数项级数、Euclid空间上的极限和连续、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、Fourier级数等八章。

本书可以作为高等院校数学专业数学分析课程的教科书，也可供其他有关专业适用。

责任编辑　徐　刚
封面设计　张　楠
责任绘图　朱　静
责任印制　陈伟光

目　录

第九章　数项级数

早在大约公元前 450 年，古希腊有一位名叫 Zeno 的学者，曾提出若干个在数学发展史上产生过重大影响的悖论，“Achilles（传说中的希腊英雄）追赶乌龟”即是其中较为著名的一个.

设乌龟在 Achilles 前面 S_1米处向前爬行，Achilles 在后面追赶，当 Achilles 花了 t_1秒时间，跑完 S_1米时，乌龟已向前爬了 S_2米；当 Achilles 再花 t_2秒时间，跑完 S_2米时，乌龟又向前爬了 S_3米……这样的过程可以一直继续下去，因此 Achilles 永远也追不上乌龟.

显然，这一结论完全有悖于常识，是绝对荒谬的. 没有人会怀疑，Achilles 必将在某一 T 秒时间内，跑了 S 米后追上乌龟（T 和 S 是常数）. Zeno 的诡辩之处就在于把有限的时间 T（或距离 S）分割成无穷段 $t_1,t_2,\cdots$（或 $S_1,S_2,\cdots$），然后一段一段地加以叙述，从而造成一种假象：这样“追—爬—追—爬”的过程将随时间的流逝而永无止境. 事实上，如果将花掉的时间 $t_1,t_2,\cdots$（或跑过的距离 $S_1,S_2,\cdots$）加起来，即

$$t_1+t_2+\cdots+t_n+\cdots（或\ S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots），$$

尽管相加的项有无限个，但它们的和却是有限数 T（或 S）. 换言之，经过时间 T 秒，Achilles 跑完 S 米后，他已经追上乌龟了.

这里，我们遇到了无限个数相加的问题. 很自然地，我们要问，这种“无限个数相加”是否一定有意义？若不一定的话，那么怎么来判别？有限个数相加时的一些运算法则，如加法交换律、加法结合律对于无限个数相加是否继续有效？如此等等. 这正是本章要讨论的数项级数的一些概念.

§1　数项级数的收敛性

数项级数

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是可列无穷个实数，我们称它们的“和”

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$$

为**数项级数**（简称**级数**），记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，其中 x_n 称为级数的**通项**或**一般项**.

当然，我们无法直接对无穷多个实数逐一地进行加法运算，所以必须对上述的级数求和给出合理的定义. 为此构作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的“**部分和数列**”$\{S_n\}$：

$$S_1=x_1,$$

$$S_2=x_1+x_2,$$

……

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

……

定义9.1.1　如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限数 S，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且称它的和为 S，记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

由上述定义可知，只有当级数收敛时，无穷多个实数的加法才是有意义的，并且它们的和就是级数的部分和数列的极限. 所以，级数的收敛与数列的收敛本质上是一回事.

例 9.1.1　设 $|q| < 1$，则**几何级数**(即**等比级数**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

是收敛的. 这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

显然，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

现在我们来回答本章开头提出的 Achilles 追赶乌龟的问题.

设乌龟的速度 v_1 米/秒与 Achilles 的速度 v_2 米/秒之比为 $q = \frac{v_1}{v_2}$，$0 < q < 1$. Achilles 在乌龟后面 S_1 米处开始追赶乌龟. 当 Achilles 跑完 S_1 米时，乌龟已向前爬了 $S_2 = qS_1$ 米；当 Achilles 继续跑完 S_2 米时，乌龟又向前爬了 $S_3 = q^2 S_1$ 米…… 当 Achilles 继续跑完 S_n 米时，乌龟又向前爬了 $S_{n+1} = q^n S_1$ 米…… 显然 Achilles 要追赶上乌龟，必须跑完上述无限段路程 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$，由于

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots &= S_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots) \\ &= \frac{S_1}{1-q}, \end{aligned}$$

即我们在前面所说的，这无限段路程的和却是有限的，也就是说，当 Achilles 跑完路程 $S = \frac{S_1}{1-q}$ 米(即经过了时间 $T = \frac{S_1}{(1-q)v_2}$ 秒)，他已经追上了乌龟.

例 9.1.2　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的. 这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n=\begin{cases}0, & n \text{ 为偶数},\\ 1, & n \text{ 为奇数},\end{cases}$$

显然 $\{S_n\}$ 是发散的.

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛时,我们还可以构作它的"**余和数列**"$\{r_n\}$,其中

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots,$$

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=S$,则 $r_n=S-S_n$,显然,这时 $\{r_n\}$ 收敛于 0.

级数的基本性质

可以由数列的性质平行地导出级数的一些性质.

定理 9.1.1(级数收敛的必要条件)　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,则其通项所构成的数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量,即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=S$,则对 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,成立

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S,$$

于是得到,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

证毕

定理 9.1.1 可以用来判断某些级数发散. 例如,当 $|q|\geqslant 1$ 时 $\{q^n\}$ 不是无穷小量,因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 发散.

要注意的是,定理 9.1.1 只是级数收敛的必要条件,而非充分条件. 换言之,数列 $\{x_n\}$ 为无穷小量并不能保证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛. 例如,虽然数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是无穷小量,但根据例 2.4.7,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$(称为**调和级数**)却是发散的.

定理 9.1.2(线性性)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$,$\alpha,\beta$ 是两个常数,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n^{(1)}\}$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列为 $\{S_n^{(2)}\}$，则对 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有

$$S_n = \alpha S_n^{(1)} + \beta S_n^{(2)},$$

于是成立

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} + \beta \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \alpha A + \beta B.$$

证毕

定理 9.1.2 表示对收敛级数可以进行加法和数乘运算.

例 9.1.3　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3\cdot 2^n}{5^n}$ 的值.

解　因为几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ 都收敛，所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3\cdot 2^n}{5^n} = \frac{16}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$= \frac{16}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}} - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = 14.$$

定理9.1.3　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛，且其和不变.

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 添加括号后表示为

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1}) + (x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2}) + \cdots + (x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \cdots + x_{n_k}) + \cdots,$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1},$$

$$y_2 = x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2},$$

……

$$y_k = x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \cdots + x_{n_k},$$

……

则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 按上面方式添加括号后所得的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. 令 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列

为$\{S_n\}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和数列为$\{U_n\}$，则

$$U_1 = S_{n_1},$$

$$U_2 = S_{n_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$U_k = S_{n_k},$$

$$\cdots\cdots$$

显然$\{U_n\}$是$\{S_n\}$的一个子列，于是由$\{S_n\}$的收敛性即得到$\{U_n\}$的收敛性，且极限相同.

证毕

定理 9.1.3 可以理解为收敛的级数满足加法结合律.

在极限论中我们已经知道，一个数列的某个子列收敛并不能保证数列本身收敛. 因此，相应地，在一个级数的和式中，添加了括号后所得的级数收敛并不能保证原来的级数收敛，即上面的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛并不能保证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

例 9.1.4 我们已知例 9.1.2 中的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的. 但若在每两项之间加上括号，则有

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots+0+\cdots = 0,$$

即添加了括号后所得的级数是收敛的.

更有甚者，对一个发散的级数，若按不同的方式加括号，所得的级数可能收敛于不同的极限. 仍以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

为例，除了上面的加括号方式外，还可以有

$$\begin{aligned} & 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots \\ = {} & 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

的不同结果.

这就是说，发散的级数不满足加法结合律.

例 9.1.5 计算机进行计算时所处理的数据都是二进制的，求二进制无限循环小数$(110.110\,110\cdots)_2$的值.

解 $(110.110\,110\cdots)_2$

$$= 2^2 + 2^1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \cdots,$$

设上述级数的部分和数列为$\{S_n\}$,则

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{3k-5}} + \frac{1}{2^{3k-4}}\right) = 6\frac{6}{7}\left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right],$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{3n-2}},$$

令 $n \to \infty$,得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 6\frac{6}{7},$$

即二进制无限循环小数$(110.110\,110\cdots)_2$的值为$6\frac{6}{7}$.

例 9.1.6　一慢性病人需每天服用某种药物,按医嘱每天服用 0.05 mg,设体内的药物每天有 20% 通过各种渠道排泄掉,问长期服药后体内药量维持在怎样的水平?

解　服药第一天,病人体内药量为 0.05 mg;服药第二天,病人体内药量为$0.05(1-20\%)+0.05 = 0.05\left(1+\frac{4}{5}\right)$mg;服药第三天,病人体内药量为

$[0.05(1-20\%)+0.05](1-20\%)+0.05 = 0.05\left[1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]$mg;$\cdots$.

按此推下去,长期服药后,体内药量近似为

$$0.05\left[1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots\right](\mathrm{mg})$$

$$= 0.05\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n(\mathrm{mg}) = 0.25(\mathrm{mg}).$$

在实际病例中,医生往往根据病人的病情,考虑体内药量水平的需求,确定病人每天的服药量(见习题 4).

例 9.1.7　计算级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解　设级数的部分和数列为$\{S_n\}$,则

$$S_n = 2S_n - S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{2n-1}{2^n},$$

于是