

科学出版社

数学模型建模分析

蔡常丰 编著



数学模型建模分析

蔡常丰 编著

科学出版社

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书运用数学理论与方法并通过典型实例,阐明如何根据实际问题的因果关系等,引进适当的假设,并运用相应的数学工具和相关学科的知识建立相应的数学模型,以及如何求解、验证、应用。本书所选示例侧重于经济管理和生态数学领域中的实际问题,知识覆盖面广,且附有适量习题,旨在使读者能运用数学原理和方法解决实际问题。

本书可作为应用数学类专业三、四年级的参考教材,也可供从事应用数学研究的科技工作者及高校理工科师生参考。

数学模型建模分析

蔡常丰 编著

责任编辑 牛耘 李锋

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 * 各地新华书店经售

*

1995年12月第 一 版 开本:787×1092 1/16

1995年12月第一次印刷 印张:11 1/4

印数:1—2000 字数:256 000

ISBN 7-03-004657-9/O · 779

定价:22.00 元

前 言

应用数学工作者不仅要具有扎实的数学基础理论和熟练的数学技巧，而且更需要丰富的想象力和洞察力。我们这里所说的想象力是指能从两个或多个表面上好象没有多少联系的现象中找出共同点，并加以类比的能力。这里所谓的洞察力是指面对一个不太复杂的问题，经过一番初步分析后，能较快地抓住问题的实质（即主要因素）的能力。历来在大学里传统的数学课着重对学生进行严格的数学理论和技巧的训练，但似乎还没有哪一门传统的数学课程把想象力和洞察力的培养作为自身的主要任务，而在校学生亟需这类能力的培养与训练。正是为了适应这种需要，近年来国内外兴起了“数学模型”课，这是一门十分注重理论联系实际的课程，特别注重想象力和洞察力的培养与训练。

运用数学理论与方法解决任何一个实际问题，首先必须建立有关的数学模型。数学模型名目繁多，举不胜举。本书主要选择一些非物理领域（经济、生态、医学、人口、社会等）中的典型示例进行讲解。核心内容是如何根据客观事物本身的性质、因果关系，引进适当的简化假设，利用相当的数学工具建立相应的数学模型，以达到解决实际问题的目的。

作者在多年教学实践的基础上将所积累的素材筛选整理成书。在成书的过程中，承蒙汕头大学领导大力支持；承蒙武汉大学校长齐民友教授指导和审核；承蒙汕头大学数学系系主任曾祥金教授和系副主任吴乐光副教授热心帮助，为本书提供许多宝贵意见。作者在此一并致以衷心的感谢。

由于多种原因，书中可能存有错误或不妥之处，敬希读者不吝指教。

蔡常丰

1992年4月于汕头大学

目 录

前言	
第一章 数学模型导论	(1)
§ 1 数学模型引论 (含传染病模型)	(1)
§ 2 大鱼吃小鱼模型	(4)
§ 3 简单的人口增长模型	(9)
§ 4 物价指数	(12)
习题 1	(16)
第二章 综合模型	(17)
§ 1 席位分配的 Q 值法	(17)
§ 2 比例法与图解法	(20)
§ 3 古物年代测定法	(23)
§ 4 怎样计算学生贷款每月的偿还额	(24)
§ 5 香烟过滤嘴的利弊	(27)
§ 6 平均更新数公式	(31)
习题 2	(35)
第三章 决策优化模型	(36)
§ 1 随机需求模型	(36)
§ 2 生产计划与设备检查	(41)
§ 3 状态转移模型	(45)
§ 4 Markov 链模型	(49)
§ 5 序贯决策过程	(59)
§ 6 出租汽车问题 (策略迭代法应用之一)	(66)
§ 7 合作对策模型	(70)
§ 8 冲量过程模型	(75)
§ 9 层次分析法	(79)
§ 10 最大值原理与自治系统的最优控制	(87)
§ 11 加热模型及其最优控制	(94)
习题 3	(98)
第四章 生态数学模型	(101)
§ 1 捕鱼的稳定与优化	(101)
§ 2 两物种互相竞争的群体模型	(103)
§ 3 按年龄分布离散化模型	(107)
§ 4 人口的控制与预测	(109)
§ 5 肿瘤生长的数学模型	(115)
§ 6 生灭过程	(118)
习题 4	(121)

第五章 模糊数学模型分析	(122)
§ 1 模糊集合及其运算	(122)
§ 2 模糊关系及其运算	(125)
§ 3 癌细胞与艾滋病的识别模型	(128)
§ 4 模糊综合决策模型选例	(131)
§ 5 模糊聚类分析	(138)
§ 6 模糊序贯决策过程	(141)
习题 5	(146)
第六章 灰色系统模型分析	(148)
§ 1 灰色系统基本概念	(148)
§ 2 灰色模型 $GM(1, N)$	(151)
§ 3 灰色预测	(159)
§ 4 灰色决策	(165)
习题 6	(173)
主要参考文献	(174)

第一章 数学模型导论

随着电子计算机的普及应用,运用数学的理论与方法解决各类实际问题已不仅仅局限于自然科学的领域,而已遍及经济、生态、人口、社会等各个领域。

要运用数学理论与方法解决任一实际问题,必先根据有关的条件建立相应的数学模型,然后才有可能进一步求解、分析、编制程序上机计算。因此,建立数学模型是解决实际问题的关键。

本章将通过几个典型示例,向读者展示数学模型的概貌。

§ 1 数学模型引论(含传染病模型)

1. 数学模型

依照实物的形状和结构按比例制成的物品,这种模型称为实物模型;用一种不同于表达对象的元素代替所要表达的事物的模型(组织系统图表、需求曲线(图 1.1)等)称为模拟模型;用文字或符号描述实际情况或管理者思想的一系列语言(如产品说明书等)称为文字模型。

数学模型是一种文字模型。我们不妨认为:数学模型是关于部分现实世界为某种目的而作的一个抽象的、简化的数学结构。这种数学结构由数学语言(包括符号)确定一组变量之间的关系,从而解释或描述某一系统或过程。

其实,我们对数学模型并不陌生。例如,当物体的尺度和形状很小时,我们可以把它当作带有质量的质点,它的运动过程可以用反映位置的函数 $s=s(t)$ 来描述。牛顿第二定律 $F=ma$ 就是一个典型的数学模型。历史上著名的七桥问题的答案也是一个巧妙的数学模型。这个故事发生在 18 世纪初,哥尼斯堡城有一条河,河中有两个小岛,有七座桥把它们与河岸联结起来(图 1.2)。

当时有人提出:能否从岛上或岸上任一点 A 处出发,通过每座桥 1 次,且仅 1 次而回到 A 处?这就是著名的七桥问题。七桥问题成为当时的一道难题。1736 年,欧拉(Euler)想出一个巧妙的办法,把它解决了。欧拉把两岸和两个岛简化成四个点,两点之间用一连线代表桥,使七桥问题转化成一个简单的几何问题:从任一点出发,能否通过一根连线一次且仅一次而回到出发点?(图 1.3)。

从几何直观上不难发现,要回到原处,每个中间点的连线要一进一出,必须为偶数条。在起点或终点可以只出不进或只进不出,故起点或终点的连线可为奇数条。但是七桥问题的模型中所有四个点的连线都是奇数条。因此,七桥问题无解。

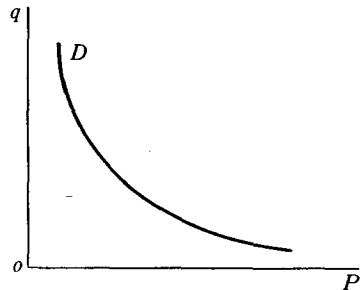


图 1.1 需求曲线

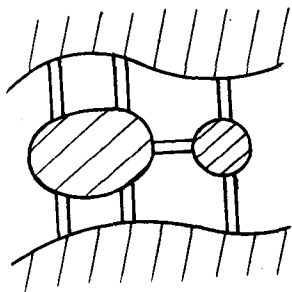


图 1.2 七桥问题示意图

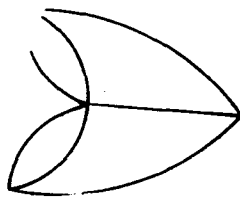


图 1.3 七桥问题数学模型

2. 数学模型的组建

如何建立数学模型？这是数学模型课的核心。

1) 建立数学模型要领：抓住主要因素，忽略次要因素，建立模型后，必须加以验证、修改、完善。

2) 建立数学模型要求（目标）：要求模型尽可能接近于现实原形，近似程度越高越好，然而，模型只能近似描述，不能苛求模型与真实事物完全吻合。

3. 实例（传染病模型）

问题：20 世纪初，瘟疫经常在世界上的某些地区流行。被传染的人数与哪些因素有关？如何预报传染病高潮的到来？为什么同一地区一种传染病每次流行时，被传染的人数大致相同？

科学家们试图建立一个模型来描述传染病的蔓延过程，对上述这些问题作出回答。

为了今后书写方便，我们用 MM（即 Mathematical Model）代表数学模型。

(1) 假设

1) 某地区总人数 n ， t 时刻健康人数 $s(t)$ ，病人人数 $i(t)$ ， $i(0) = i_0$

$$n = s(t) + i(t)。$$

2) t 时刻单位时间内 1 个病人能传染的人数与健康人数成正比例，比例系数 k （称传染系数）。

(2) 建立数学模型

根据假设，我们有

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = k s(t) \cdot i(t) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = k i(t)(n - i(t)) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \quad (\text{MM})_1$$

(等价于)

(3) 求解与分析

应用分离变量法求解，易得

$$i(t) = \frac{n}{1 - \left(1 - \frac{n}{i_0}\right) e^{-kt}}$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $i(t) \rightarrow n$ 。这意味着所有的人都将传染, 处于生病状态。

事实上, 传染病人经过治疗, 或者全愈, 因而具有免疫力; 或者死亡; 所以, 最终病人人数 $i(t)$ 应该趋于零, 即当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $i(t) \rightarrow 0$ 。由此可见, 以上所建数学模型 $(MM)_1$ 不符合实际情况。

(4) 再假设

考虑到 $t \rightarrow +\infty$ 时, $i(t) \rightarrow 0$, 我们作出如下假设。记 t 时刻具有免疫力 (含死亡者) 的人数为 $r(t)$ 。

$$1) n = i(t) + s(t) + r(t)$$

$$2) \frac{di(t)}{dt} \propto s(t)$$

3) t 时刻单位时间内具有免疫力的人数 $\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)$ 与病人人数 $i(t)$ 成正比例, 比例系数为 l (称恢复系数)。

(5) 再建数学模型

根据以上假设 1)–3), 补充 $s(0) = s_0$, 我们可以得到

$$\begin{cases} \frac{dr(t)}{dt} = l \cdot i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = k s(t) \cdot i(t) - \frac{dr(t)}{dt} \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{di(t)}{dt} - \frac{dr(t)}{dt} \end{cases} \quad i(0) = i_0, s(0) = s_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = k s(t) i(t) - l i(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -k s(t) i(t) \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases} \quad (MM)_2$$

这是非齐次非线性的微分方程组, 难以求出精确的解析解。根据方程组的特点, 我们可以先确定 $i(t)$ 与 $s(t)$ 之间的关系, 然后再利用 i, s 的关系, 确定 $i(t)$ 。

将 $(MM)_2$ 两式左右两边分别相除, 得

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{ds} = \frac{\rho}{s} - 1 \\ i(s_0) = n - s_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\rho = \frac{l}{k}$ 称为特征指数, 对于同一地区, 同一传染病, ρ 为常数。

解 (1.1) 式, 得

$$i(s) = \rho \ln \frac{s}{s_0} - s + n \quad (1.2)$$

由 (1.1) 式知 $s = \rho$ 时, $\frac{di}{ds} = 0$ 。容易检验

$$\left. \frac{di}{ds} \right|_{\rho_-} > 0, \quad \left. \frac{di}{ds} \right|_{\rho_+} < 0$$

由此知 $i(\rho)$ 为极大值。按函数作图法可以作出 (1.2) 式过点 $P_0(s_0, i_0)$ 的轨线 (图 1.4)。由于 $i(t) \geq 0$, 所以在图 1.5 中只有实线部分有实际意义。又因为 $i(t) \geq 0, s(t) \geq 0$ 。由 $(MM)_2$ 第 2 式知, 当 $t \uparrow$ 时, $s(t) \downarrow$ 。

下面我们来讨论 $i(t)$ 。

$$\frac{di}{dt} = k i(t)(s - \rho)$$

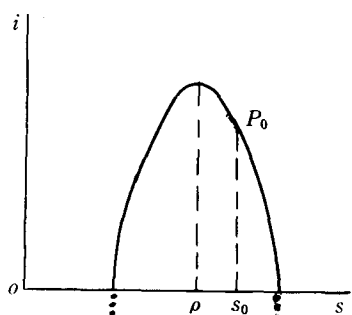
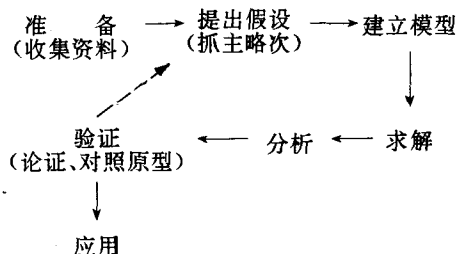


图 1.4 $i(s)$ 轨线示意图

由此可见，只有在健康人数 $s > \rho$ 时，传染病才会蔓延， ρ 是一个阈值。通常 i_0 很小，可以近似地取 $s_0 \approx n$ 。在总人数 n 不变的情况下，提高 ρ 值，这对限制传染病的蔓延是有利的。而 $\rho = \frac{l}{k} \uparrow$ ，意味着增大恢复系数 l ，降低传染系数 k ，其实际意义就是要提高医疗水平和保健水平。从这方面检验，可证实 $(MM)_2$ 的正确性。据一些地区的实际统计数据， $(MM)_2$ 与实际情形相当接近。

从上述的建模过程中，我们看到，建立数学模型时，不一定一次就能成功。一次建模不成功不要紧，可以逐次验证、修改，直至模型比较接近实际原形为止。

至此，我们把建立数学模型的步骤归纳如下：



4. 数学模型分类

数学模型的类别有几种不同的分法：按变量的特征分类，可分为确定性模型、随机性模型、模糊数学模型、灰色模型等；若按模型特征分类，可分为初等模型、优化模型、逻辑模型等；本书倾向于按领域来分类，分为模型引论、决策优化、综合模型、生态模型、模糊数学模型、灰色模型等。其中决策优化和生态模型是本书的核心部分。

§ 2 大鱼吃小鱼模型

各门科学运用数学的目的大致有两种，一是对已有的数据进行分析处理，并且作出某种解释；另一是利用数学模型作出预测。数学模型的好坏（价值高低）是由模型本身所能作出的解释和预测与实际原形相接近的程度而定。在生物数学中，Volterra 数学模型

是较早能对已知事实作出正确解释的数学模型之一。

1. 实际问题

为什么第一次世界大战期间在地中海捕获的鲨鱼百分比急剧上升？

1925 年意大利有一位年青的生物学家 D'Ancona 在研究工作中发现，第一次世界大战期间在地中海各个港口关于捕鱼的一些资料中鲨鱼的比例比战前战后有着明显的增加。与此同时，被鲨鱼吞食的食用鱼比例则有所下降。

表 1-1 第一次世界大战期间地中海各港口捕获鲨鱼比例与战前战后比较

日期(年)	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
百分数(%)	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16	15.9	14.8	10.7

按常规，战争期间捕鱼量少，海里的食用鱼应当增加。可事实却相反。D'Ancona 无法解释这种生态现象。百思不得其解。他带着这个问题去请教未来的丈人——意大利著名的数学家 Volterra。女婿的问题引起了丈人的兴趣，从此促使 Volterra 开始用数学的方法去研究生物的课题，以至于他后来成为生物数学的鼻祖。Volterra 建立了一个弱肉强食的数学模型。通过这个模型的求解，成功地解答了 D'Ancona 提出的问题。

2. 数学模型的组建

记 $x(t)$ 为食用鱼总数量， $y(t)$ 为鲨鱼总数量。

因为大海资源很丰富，如果没有鲨鱼（即 $y(t)=0$ ），那么食用鱼将以自然增长率 a （正数）无限增长，

$$\dot{x}/x = a$$

可是，事实上海里有鲨鱼（即 $y(t)>0$ ），鲨鱼要捕食食用鱼，致使食用鱼的增长率降低。假设 $\dot{x}/x$ 降低的程度与 $y(t)$ 成正比，比例系数为 b （正数），代表鲨鱼捕食能力。于是

$$\dot{x}/x = a - by. \quad (1.3)$$

如果没有食用鱼（即 $x(t)=0$ ），鲨鱼无法生存。设鲨鱼的自然死亡率为 ξ （正数），即

$$\dot{y}/y = -\xi$$

有了食用鱼（即 $x(t)>0$ ），为鲨鱼提供了增长的条件。设食用鱼为鲨鱼提供的增长率与 $x(t)$ 成正比例，比例系数为 η （正数），代表鲨鱼的供养条件。于是，

$$\dot{y}/y = -\xi + \eta x. \quad (1.4)$$

(1.3) 式与 (1.4) 式联立构成 Volterra 数学模型：

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -\xi y + \eta xy \end{cases} \quad (1.5)$$

(1.5) 式的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.6)$$

由于 f, g 中不显含时间因子 t , 故称为自治系统。相应地, 如果 f, g 中显含时间因子 t 的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

则称之为非自治系统。

因为自治系统 (1.6) 的 f, g 中的 x 与 y 不只一次, 所以系统 (1.6) 又称为非线性自治系统。与系统 (1.6) 相对应的方程组:

$$\begin{cases} 0 = f(x, y) \\ 0 = g(x, y) \end{cases} \quad (1.7)$$

的公共零点 $P_0(x_0, y_0)$ 称为 (1.6) 的平衡点。而且当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$$

时, $P_0(x_0, y_0)$ 称为稳定的平衡点。

为了便于分析, 我们常采用线性化的方法讨论非线性自治系统 (1.6) 平衡点的稳定性。即:

在 $P_0(x_0, y_0)$ 处取 f, g 的一阶台劳近似

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \\ g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \end{cases}$$

其中 f_x, f_y, g_x, g_y 代表 f, g 的偏导数。记

$$p = [f_x + g_y]_{(x_0, y_0)}, \quad q = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}.$$

若 $p < 0$, 且 $q > 0$ 时, 则 $P_0(x_0, y_0)$ 是稳定平衡点;

若 $p > 0$, 或 $q < 0$ 时, 则 $P_0(x_0, y_0)$ 为不稳定平衡点。

对于 (1.5), 我们有

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -\xi y + \eta xy = 0 \end{cases}$$

它有非零平衡点 $P_0\left(\frac{\xi}{\eta}, \frac{a}{b}\right)$ 。容易检验

$$p = 0, \quad q > 0.$$

由于 $p = 0$, 不便于判断 $P_0\left(\frac{\xi}{\eta}, \frac{a}{b}\right)$ 的稳定性。在下述将可知 $P_0\left(\frac{\xi}{\eta}, \frac{a}{b}\right)$ 是不稳定的。

3. 求解与分析

关于 (1.5), 我们没有常规的解法, 我们可以设法先确定 x 与 y 之间的关系。易见, 当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, 没有实际意义。因此, 下述基于 $(x, y) \neq (0, 0)$ 进行讨论。

从 (1.5) 中消去 dt , 得

$$\left(\frac{a}{y} - b\right)dy = \left(-\frac{\xi}{x} + \eta\right)dx$$

积分得

$$a \ln y - by = -\xi \ln x + \eta x + \ln C$$

即

$$\frac{y^a}{e^{by}} \cdot \frac{x^\xi}{e^{\eta x}} = C. \quad (1.8)$$

为了确定 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的性态, 我们引入两个引理来进行讨论。

引理 1 方程 (1.8) 确定了一族封闭曲线。

证 设 $\psi(y) = y^a e^{-by}$, $\varphi(x) = x^\xi e^{-\eta x}$ 。

易见 $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = 0$, 而且

$$\psi'(y) = (a - by) y^{a-1} e^{-by} = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{a}{b}, \psi'_-(y_0) > 0, \psi'_+(y_0) < 0.$$

可见 $\psi(y_0) = (a/b)^a e^{-a} = \max \psi(y)$ 。利用函数作图法可作出 $\psi(y)$ 的图形 (图 1.6 (1))。

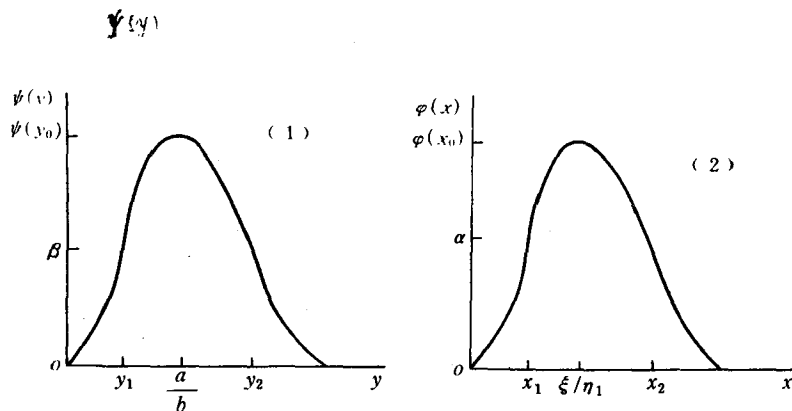


图 1.6 $\psi(y)$, $\varphi(x)$ 示意图

类似地 $\varphi(x_0) = (\xi/\eta)^\xi e^{-\xi}$, $\varphi(x)$ 的图形如图 1.6 (2)。

显然, 当 $\psi(y_0) \cdot \varphi(x_0) < C$ 时, (1.8) 式无解; 如果 $\psi(y_0) \cdot \varphi(x_0) = C$, (1.8) 式有唯一解 $x_0 = \frac{\xi}{\eta}$, $y_0 = \frac{a}{b}$ 。 $(x_0, y_0) = (\xi/\eta, a/b)$ 正是 (1.5) 的平衡点。

当 $\psi(y_0) \varphi(x_0) > C$ 时, 设 $C = \alpha \psi(y_0)$, 则有

$$\varphi(x) = \alpha, (0 < \alpha < \varphi(x_0))$$

从图 1.6 (2) 知这方程有两个根 $x_1 < x_0 < x_2$ 。于是在图 1.7 上得到一条轨线上的两个点 $S_1(x_1, y_0)$, $S_2(x_2, y_0)$ 。对于 $[x_1, x_2]$ 外的任一点 x , $\varphi(x) < \alpha$, 代入 (1.8) 式

$$\psi(y) = C/\varphi(x) = \alpha \psi(y_0)/\varphi(x) > \psi(y_0)$$

这说明当 $x \in [x_1, x_2]$ 时, 方程 (1.8) 无法确定 y , 即在 $[x_1, x_2]$ 外, 没有轨线通过。

对于任意 $x \in [x_1, x_2]$, $\varphi(x) > \alpha$,

$$\psi(y) = \frac{\alpha \psi(y_0)}{\varphi(x)} \triangleq \beta < \psi(y_0)$$

从图 1.7 上可得同一轨线上的两个点 $s_3(x, y_3)$, $s_4(x, y_1)$ 。由于 x 的任意性, 可知 s_1 , s_2 , s_3 , s_4 等所在的曲线是封闭的。

当 α 从 $\varphi(x_0)$ 无限变小而趋于 0 时, 轨线是一族以 $p_0(x_0, y_0)$ 为中心, 越来越扩展的封闭曲线。

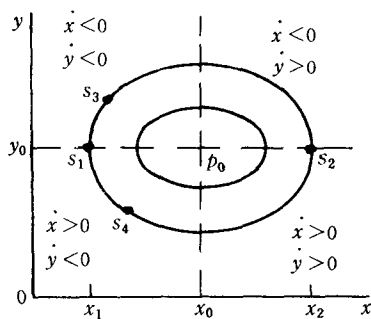


图 1.7 方程 (1.8) 轨线族示意图

在图 1.7 中, 直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$. 将曲线族划分为四个区域, 由方程 (1.5) 可确定 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 在这四个区域上的符号, 从而可判定 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是同一周期的周期函数。我们虽然不能确定精确的 $x(t)$ 、 $y(t)$ 。但我们可以确定 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的平均值。

引理 2 设 $x(t)$ 、 $y(t)$ 是 (1.5) 式的周期解, 周期 $T > 0$, 则有 $x(t)$ 、 $y(t)$ 在 $[0, T]$ 上的平均值

$$\bar{x} = \xi/\eta, \quad \bar{y} = a/b.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\eta} \left[\xi - \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\eta} [\xi t - \ln y(t)]_0^T = \frac{\xi}{\eta}. \end{aligned}$$

同理 $\bar{y} = a/b$ 。

4. 验证

Volterra 模型怎样解释第一次世界大战期间鲨鱼捕捞率明显上升呢?

在 (1.5) 式中, 我们没考虑捕捞的影响, 现在我们可以计入捕捞的影响了。

设鲨鱼与食用鱼的捕捞率都为 k 。这样就相当于食用鱼的相对增长率为 $a-k$, 鲨鱼的相对死亡率为 $\xi+k$ 。在这种影响下, Volterra 数学模型仍然成立:

$$\begin{cases} \dot{x} = (a-k)x - bxy \\ \dot{y} = -(\xi+k)y + \eta xy. \end{cases} \quad (1.9)$$

相应的平均值

$$\begin{cases} \bar{x}^* = (\xi+k)/\eta \\ \bar{y}^* = (a-k)/b. \end{cases}$$

比较 $\bar{x}^*$, $\bar{y}^*$ 与 $\bar{x}$, $\bar{y}$, 易见: 如果 $0 < k < a$, 即一定的捕捞率 k 实际上会使食用鱼的总量 $x(t)$ 有所增长, 平均值从 ξ/η 增至 $(\xi+k)/\eta$; 而鲨鱼会有所减少, 其平均值从 a/b 减至 $(a-k)/b$ 。反之, 如果减少捕捞率 k , 却会导致鲨鱼增长, 食用鱼减少。因为第一次世界大战期间减少了捕捞率 k , 故鲨鱼增加, 食用鱼减少。这样, Volterra 模型成功地解释了生物学家 D'Ancona 提出的问题, 虽然它们有一些局限性, 但是这个模型至今仍为生态学的必读篇章, 也是数学模型的典型示例。

Volterra 模型大大地提高了生物学家和数学家利用数学方法对生物世界进行深入研究的信心, 从此开创了生物数学的新篇章。

5. 模型的启迪

将 Volterra 模型的分析应用于解释杀虫剂的作用是很有趣的。假设面对着这样的一个生态环境: 害虫靠吃农作物生存。数量记作 $x(t)$ 。益虫靠吃害虫生存, 数量记作 $y(t)$ 。这样, x, y 正好与 Volterra 模型中的食用鱼与鲨鱼相对应。倘若对这样的生态环境施用杀虫剂, 相当于施加一定的捕捞率 $k > 0$ 。结果是使害虫增加, 益虫减少, 事与愿违。因

此, 农药制造部门必须注意生产的药剂只杀害虫, 不伤益虫, 如此才能真正达到杀虫的目的。

§ 3 简单的人口增长模型

1. 回顾与展望

人口问题是当今世界最引人注目的问题之一。有的国家出生率过高, 越来越严重地威胁着人类正常的生活。而有的国家(或民族)人口的自然增长率趋于零, 呈现出种族消亡的危机。

据生态学家粗略的估计, 在原始社会, 人类靠打猎、捕鱼和采野果为生, 全世界最多只能存活 2 千万人。在旧石器时代, 全世界人口不满 1 千万。随着农业生产的出现与发展, 世界人口持续增长。从公元前 6000 年至公元初, 每隔 1700 年, 人口增加 1 倍, 公元初, 全世界人口已达 1 亿 5 千万。从公元初至公元 1600 年, 大约每隔 800 年, 人口增加 1 倍, 到公元 1600 年, 全世界人口已达 5 亿。

18 世纪第一次工业革命加速了工农业生产的发展, 人们生活水平相应有了明显的提高, 从此, 世界人口激增, 到公元 1830 年, 全世界人口已达 10 亿。公元 1930 年, 全世界人口达 20 亿。公元 1975 年, 全世界人口达 40 亿。1987 年全世界人口已突破 50 亿(见表 1-2)。

表 1-2 公元前 6000—1975 年世界人口倍增与时间间隔的关系

时 间	人口倍增时间间隔	人口数
公元前 6000 年—公元初	1700 年	1.5 亿
公元初—1600 年	800 年	5 亿
1600—1830 年	230 年	10 亿
1830—1930 年	100 年	20 亿
1930—1975 年	45 年	40 亿

目前世界人口正以每年约 2% 的增长率增加。按 $50(1+0.02)^k=100$ 计算, $k=35$ 。即到公元 2022 年, 全世界人口可达 100 亿。

科学家们估计, 按目前的科技及生产水平, 全世界人口增至 80 亿, 即达饱和状态。因此, 如果各国都不认真控制人口的增长, 那么, 不需再过半个世纪, 世界人口总数将大大超过人类赖以生存的地球所能承受的最大限度。

可幸的是, 据报道, 1981 年以来, 世界上已有 59 个国家实行人口控制计划。

我国明代著名的科学家徐光启是世界上最早预测人口增长率的一位学者。他早在 16 世纪就指出, 人口“大抵 30 年就增加 1 倍”。可惜的是, 我们目前无法考证他是如何推算的。

在西方, 英国有一位神父 Malthus 是较早研究人口增长模型的人。他根据教堂里百余年的统计资料, 在 1798 年提出人口的指数增长模型。

本节将介绍两个关于人口增长的模型: 指数增长模型与 Logistic 模型。

2. 指数增长模型

影响人口增长的因素很多:人口的底数、出生率、死亡率、男女比例、年龄结构、生产水平、风俗习惯、天灾人祸等。我们必须把问题简化,抓住主要因素——增长率,以此来建立人口的模型。

初看起来,人口增长是按整数变化的,不是时间 t 的可微函数。然而,如果人口总数很大,整数与实数之间的误差很小。因此我们可以把人口总数 $N(t)$ 近似地视为时间 t 的连续函数,甚至于可微函数。

设 t 时刻的人口总数为 $N(t)$, 人口增长率为 $r(t, N(t))$ 。那么 $[t, t + \Delta t]$ 内人口总数 $N(t)$ 的增量

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = r(t, N(t))N(t)\Delta t$$

两边同除以 Δt , 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得

$$\frac{dN}{dt} = r(t, N(t))N(t)。$$

Malthus 在担任牧师期间,在教堂中查看了一百多年的人口统计资料。他发现人口的增长率几乎是一个常数,即

$$r(t, N) = r_0$$

如果再设 $N(t_0) = N_0$, 即得

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_0 N(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

解之得:

$$N(t) = N_0 \exp[r_0(t - t_0)]。 \quad (1.11)$$

一般而言, $r_0 > 0$, 所以, (1.11) 式说明 $N(t)$ 将以指数规律无限增长。

如果将 $t - t_0$ 以 1 年为单位计算。则 $N(t)$ 以 $\exp(r_0)$ 为公比的几何级数增长。取 $t_0 = 0$, $t = n$ 则有

$$N(n) = N_0 \exp(nr_0)$$

两边取对数,

$$\ln N(n) = nr_0 + \ln N_0$$

可见, 人口总数 $N(t)$ 的对数 $\ln N(t)$ 是年数 n 的线性函数。

从 1780 年到 1920 年这 140 年内, 瑞典普查所得人口总数的对数与年数的关系非常近似于线性函数关系。这说明指数增长模型很适合用来描述某些地区在某一段时间内人口发展的趋势。但是, 指数增长模型不适合用于全世界范围和长时间 ($t \rightarrow \infty$) 的人口发展过程。因为全世界人口总数不可能无穷大。

据调查统计发现, 迁往加拿大的法国移民的后代, 在某一定时期内, 人口数量的增长很符合指数增长模型; 而同一血统的法国本土居民人口总数增长却很缓慢。这说明自然资源与环境条件对人口增长的影响相当显著。为了更好地描述人口总数增长规律, 指数增长模型有待于修改。

3. Logistic 模型

荷兰生物数学家 Verhult 提出, 引入一个常数 N_m , 表示在自然资源和环境条件下所能容纳的最大人口总数 (简称环境容纳量), 并且认为人口净增长率随着人口总数 $N(t)$ 的增加而减少, 即令

$$r(t, N) = r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{N_m} \right)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $N(t) \rightarrow N_m$, 从而 $r(t, N) \rightarrow 0$ 。

按此假设, 我们可将指数增长模型作如下修改:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{N_m} \right) N(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

其中 r_0 称为生命系数, 与环境无关。

(1.12) 式称为 Logistic 模型。

解:

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + \left(\frac{N_m}{N_0} - 1 \right) \exp[-r_0(t - t_0)]} \quad (1.13)$$

显然, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $N(t) \rightarrow N_m$ 。由于

$$\frac{d^2N}{dt^2} = r_0 \left(1 - \frac{2N}{N_m} \right) \frac{dN}{dt}$$

易知, 当 $\tilde{N} = \frac{N_m}{2}$ 时, $\frac{d^2N}{dt^2} = 0$; 而且

$$\left. \frac{d^2N}{dt^2} \right|_{\tilde{N}} > 0 \quad \left. \frac{d^2N}{dt^2} \right|_{\tilde{N}+} < 0,$$

将 $\tilde{N} = \frac{N_m}{2}$ 代入 (1.13) 式, 易得

$$\tilde{t} = \frac{1}{r_0} \ln \left(\frac{N_m}{N_0} - 1 \right)。$$

上述说明 $(\tilde{t}, \tilde{N})$ 是 $N(t)$ 的拐点。 $N(t)$ 的图形如图 1.8。

4. 验证

取 $t_0 = 1790$, $N_0 = 39$ 万, $N_m = 1970$ 万, $r_0 = 0.03134$ 。按 Logistic 模型计算, 计算结果非常接近 1820—1920 年美国人口的实际数据 (L 代表 Logistic 模型, E 代表实际数据):

表 1-3 美国 1820—1920 年人口数与采用 Logistic 模型计算数据对比

年份	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970
L (万)	97	130	174	230	302	381	499	624	765	916	1070	1230	1359	1482	1588	1670
E (万)	96	129	171	232	314	386	502	629	760	920	1065	1220	1317	1507	1793	2040