王金金　李广民　于力　编

新编 高等数学学习辅导

——配合同济高等数学（四版）（上）

- 解惑答疑
- 典型例题
- 习题选解
- 自测练习

西安电子科技大学出版社

新编高等数学学习辅导

——配合同济高等数学(四版)

(上)

王金金　李广民　于　力　编

西安电子科技大学出版社

2000

内容简介

本书是深入学习工科“高等数学”的辅导书，内容包括解惑答疑、典型例题、习题选解、自测练习。其目的是针对学生在学习过程中产生的疑难问题，采用问答形式予以解答；通过典型例题的分析求解，引导学生产生联想，从中领悟预示的途径，提高学生解题的能力；对教材中有代表性的习题进行解答，供学生在学习过程中参考；自测练习则是为学生自我测试提供的。

本书分上、下两册出版，内容与同济大学数学教研室编写的高等数学(第四版)教材上、下册配套。

本书对学习工科“高等数学”的同学是一本很好的辅导教材，同时也可作为报考研究生的理想复习资料及“高等数学”任课教师的教学参考书。

新编高等数学学习辅导

——配合同济高等数学(四版)(上)

王金金　李广民　于　力　编著

责任编辑　杨宗周

出版发行　西安电子科技大学出版社

(西安市太白南路2号)

邮　　编　710071

电　　话　(029) 8227828

经　　销　新华书店

印　　刷　西安兰翔印刷厂

版　　次　1999年2月第1版

2000年3月第4次印刷

开　　本　850毫米×1168毫米　1/32　印张10

字　　数　243千字

印　　数　12 001～18 000

定　　价　12.00元

ISBN 7-5606-0693-8/O·0036

* * * 如有印制问题可调换 * * *

前　　言

在科学技术飞速发展的当今社会，高等数学作为工科专业的一门重要的基础课，对于学生专业课的学习，乃至今后更进一步的拓宽专业知识面、调整自身的知识结构尤为重要。为配合教学改革，减少授课学时，增加课堂信息量，培养学生的自学能力，提高学生素质，1995 年我们配合本校使用的教材，编写了《高等数学辅导》一书。该书旨在帮助学生加深对高等数学中基本概念的理解，引导学生掌握高等数学的解题方法和技巧，启发、培养学生的学习兴趣。此书受到了广大师生的普遍欢迎，对提高教学质量起到了十分重要的作用。

为了更进一步适应教学的需要，我们广泛听取了使用这一辅导教材的师生的意见修编了原书。考虑到本书的双重作用，即既可作为学习工科高等数学的辅导教材，同时还能作为报考研究生的复习资料，故这次修编在内容安排上，做了较大的变动，使之与高等数学(同济四版)教材结合更加密切。通过大量的解惑答疑和典型例题的剖析，使读者在加深理解基本概念，熟练掌握解题方法和技巧方面达到事半功倍的效果。

本书每章均由四部分组成。第一部分是“解惑答疑”。这部分收集了编者多年来在与学生接触中发现的典型疑难问题，内容及方法涉及基本概念、基本理论的深入理解，解题思路的启发诱

导，解题方法中常见错误剖析等。第二部分是“典型例题”。选择有代表性的例题，对解题思路、解题方法进行仔细分析，启发诱导学生产生联想，提高他们的解题能力。第三部分是“习题选解”。在这一部分中，对同济大学主编的高等数学第四版中的习题，选取其中有代表性的进行解答，供学生在解题时参考。希望通过这些题解的启发，让学生独立完成剩余部分习题，提高学生的解题能力。第四部分是“自测练习”，这部分是为学生自我测试提供的练习题，学生可通过自测练习检查自己对本章内容掌握的程度。

我们采用同济大学主编的高等数学第四版的习题，是因为这本教材是我国高等学校中普遍使用的国家级优秀教材。这本教材习题安排合理，难易适度，反映了学习高等数学应达到的要求。选用该书习题，则能更好地使所编辅导教材与学生使用教材紧密配合。

本书分上、下两册出版，上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数，与教材上册配套；下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程，与教材下册配套。本书由三位编者分工编写，其中第一、四章由于力执笔，第二、三、八、九、十章由王金金执笔，第五、六、七、十一、十二章由李广民执笔，各章都经过反复讨论、修改后定稿。

本书在编写过程中，得到应用数学系领导及从事高等数学教学的广大教师的热情支持，特别是刘三阳教授、王世儒教授、刘玉濮副教授以及青年教师马华、任春丽、高淑萍、刘红卫、冯晓慧等，对本书的初稿，提出了许多宝贵的修改意见，编者在此致以深深的谢意。本书的出版得到西安电子科技大学出版社领导及编辑部的大力支持，他们为此付出了辛勤劳动，编者在此一并表

示致谢。

编者虽然对本书的编写做出了最大努力，但由于水平与经验有限，加之时间仓促，错误与不妥之处一定难免，敬请广大读者指正。

编者

1999 年 2 月

目　　录

第一章

函数与极限

一、解惑答疑

问题 1　下面关于数列极限的论述是否正确?

(1) 当 n 充分大以后，数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 a，则 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

(2) 如果 $\forall\ \varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，总有无穷多个 x_n 满足 $|x_n-a|<\varepsilon$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(3) 若对于任意给定的正整数 k，总存在正数 N，当 $n>N$ 时，所有的 x_n 均满足 $|x_n-a|<10^{-k}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

答　(1) 不正确. 因为 $\{x_n\}$ 以 a 为极限是指当 n 充分大以后，x_n 与 a 的差的绝对值小于预先给定的任意小的正数 ε，即 $|x_n-a|$ 随着 n 的增大而趋于 0；而 x_n 越来越接近于 a，只能表明 $|x_n-a|$ 越来越小，并不能保证 $|x_n-a|$ 趋于 0. 例如，$x_n=1+\dfrac{1}{n}$，随着 n 的增大，x_n 越来越接近于 0，但 $x_n\not\to 0(n\to\infty)$. 正确的说法应是，当 $n\to\infty$ 时，x_n 与 a 无限地接近，要多么接近就有多么接近，则 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

(2) 不正确. 由数列极限的几何解释知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 在几何上表示两点: ① 在点 a 的任何 ε 邻域 $U(a, \varepsilon)$ 中都包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点; ② 在 $U(a, \varepsilon)$ 以外, 最多只有 $\{x_n\}$ 的有限多个点. 而题设之条件仅满足①而不满足②, 故不能说 $\{x_n\}$ 以 a 为极限. 例如, 取

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

在 $U(0, \varepsilon)$ 中包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点, 但显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

(3) 正确. 因为对于任意给定的正数 ε, 总可以取适当的正整数 k 使 $10^{-k} < \varepsilon$, 对于上述 k, 由题设存在正数 N, 当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < 10^{-k} < \varepsilon$, 所以由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

问题 2　数列 $\{x_n\}$ 的敛散性与数列 $\{|x_n|\}$ 的敛散性有何关系?

答　若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{|x_n|\}$ 也收敛, 且当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. 证明如下: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 从而 $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon$.

反之, 若 $\{|x_n|\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 可能收敛, 也可能发散. 例如, $\{|(-1)^n|\}$ 是收敛的, 但 $\{(-1)^n\}$ 却发散. 如果 $\{x_n\}$ 恒正或恒负, 那么 $\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 同敛散. 此外, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 这是一个今后经常用到的结论.

问题 3　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 1$, 对吗?

答　不对. 尽管我们可以由极限的定义知道, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, 但是在使用商的极限运算法则时有一个条件: 分母的极限不能为零. 由此可知, 当 $a \neq 0$ 时, 结论是正确的; 当

$a=0$ 时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能存在，也可能不存在，即使存在，也不一定等于 1.

例如，数列$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}[2+(-1)^n]\right\}$，虽然有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right]$$

不存在.

又如，数列$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

问题 4　下列说法能否作为极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的等价定义？

（1）对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<k\delta$ 时，有$|f(x)-A|<m\varepsilon$(其中 k，m 为任意确定的正数).

（2）对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|\leqslant\delta$ 时，有$|f(x)-A)|\leqslant\varepsilon$.

答　上面两种说法都可以作为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的等价定义. 事实上，对于说法(1)，因为 ε 是任意的正数，所以令 $\varepsilon_1=m\varepsilon$ 仍是任意正数；令 $\delta_1=k\delta$，存在 δ，也就存在 δ_1. 因此，(1)也就是：对$\forall\ \varepsilon_1>0$，$\exists\ \delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon_1$. 这与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义是一样的，所以与定义等价.

对于说法(2)，只要在(1)中取 $k=\frac{1}{2}$，$m=2$，由(2)便可得(1)；取 $k=2$，$m=\frac{1}{2}$，由(1)便可得(2). 所以，(2)与(1)是等价的，从而(2)也与定义等价.

问题 5　函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时不以 A 为极限的分析定义是

什么？

答 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 的分析定义是：存在一个正数 ε_1，对任意给定的 $\delta>0$，总有点 x_δ 满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$，使 $|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_1$.

例如，证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

按上面的定义，只要找出符合要求的 ε_1 和 x_δ 即可. 因为在点 $x_0=2$ 附近，$f(x)=x^2$ 总可以取到大于 4 的函数值，于是可取 $\varepsilon_1\leqslant 4-A=4-3=1$，并在点 $x_0=2$ 附近找一点 x_δ，使 $f(x_\delta)>4$. 由此分析，证明如下：

取 $\varepsilon_1=1$，任给 $\delta>0$，取 $x_\delta=2+\dfrac{\delta}{2}\in\mathring{U}(2,\delta)$，有

$$|f(x_\delta)-A|=|x_\delta^2-3|=\left|\left(2+\frac{\delta}{2}\right)^2-3\right|>1=\varepsilon_1,$$

所以

$$\lim_{x\to 2}x^2\neq 3.$$

问题 6 无穷多个无穷小之和的极限问题.

答 我们知道，有限多个无穷小的和仍然是无穷小. 但是，把“有限多个”改为“无穷多个”，结论就不一定成立了.

例如，(1) $x_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$.

因为 $x_n=\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+(n-1))=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

在这里，无穷多个无穷小之和是常数.

(2) 若 $x_n=\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^3}$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^3}=0$.

在这里，无穷多个无穷小之和仍是无穷小.

(3) 若 $x_n=\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^{3/2}}+\cdots+\frac{n-1}{n^{3/2}}$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^{3/2}}=+\infty$.

这个例子说明，无穷多个无穷小之和还可能是无穷大.

问题 7　函数极限和数列极限之间有什么关系?

答　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或$\infty$)的充分必要条件是：对任何收敛于 x_0 的数列 $x_n(x_n\neq x_0)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$(或$\infty$)(证明略).

由此，我们可以得到数列极限在讨论函数极限时的一些应用.

(1) 为了证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，使对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大；或者找出两个收敛于 x_0 的数列 x_n、y_n，$(x_n\neq x_0$，$y_n\neq y_0)$，使 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 有不同的极限.

例　证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

证　取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=1$；取 $y_n=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{y_n}=0$. 所以，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

(2) 为了证明 $f(x)$ 在 D 上无界，常用的方法是找出数列 $\{x_n\}\subset D$，而 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大数列.

(3) 为了证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，而 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

例　证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 无界，且当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 也不是无穷大.

证　取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，有 $f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，

所以 $f(x)$ 无界.

取 $y_n=\frac{1}{n\pi}$，当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to 0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} n\pi\sin n\pi=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq\infty$.

(4) 为了求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，可以先找一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，求出 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，然后再证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

例如，先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，再用夹逼准则证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

根据函数极限与数列极限的这一关系，反过来有时也可以利用函数极限的结果去求相应的数列极限.

例如，已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，则由于 $x_n=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

事实上，求函数极限的方法比求数列极限的方法多，所以大量的求函数极限的方法能给数列极限的计算带来一些方便.

问题 8　无穷大量与无界函数有什么区别和联系？

答　无穷大量是指在自变量的某一变化过程中，对应的函数值的一种变化趋势，即绝对值无限制地增大. 其定义中的不等式 $|f(x)|>G$，要求当自变量变化到某一阶段后的一切 x 都要满足. 而无界函数是以否定有界函数来定义的，它是反映自变量在某一范围时，对应的函数值的一种性态. 其定义中的 $|f(x)|>M$，只要求自变量在此范围内有一个 x 满足即可(尽管 M 与 G 一样，都是任意大的正数).

无穷大量与无界函数的联系是：如果 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的

无穷大量，则 $f(x)$ 在点 x_0 附近一定无界；反之不一定成立. 例如，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界，但当 $x\to 0+$ 时，$f(x)$ 不是无穷大量.

问题 9 **若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，是否存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 使 $f(x)$ 在该邻域内连续？**

答 不一定. 例如令

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{当 } x \text{ 为有理数时；} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，而在点 $x=0$ 的任何一个邻域内都有间断点. 事实上，$f(x)$ 除了在点 $x=0$ 连续外，在 $(-\infty, +\infty)$ 内的其它任何点都不连续.

问题 10 **为什么不说初等函数在其定义域内连续，而说在定义区间内连续？**

答 因为初等函数的定义域可能包含孤立点. 例如，初等函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$，它的定义域 $D=\{x \mid x=2k\pi, k \text{ 为整数}\}$ 中的每一个点都是孤立点. 由于函数在孤立点的邻近是没有定义的，不具备讨论函数连续性的条件，当然也就谈不上函数在该点连续.

可以证明，如果点 x_0 不仅是初等函数 $f(x)$ 定义域内的点，而且属于 $f(x)$ 的某一定义区间，则 $f(x)$ 在该点必定连续.

二、典型例题

例 1 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 (1) $f\{f[f(x)]\}$，(2) $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

解 (1) $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}$，$(x\neq 1, x\neq 0)$，于是

有

$$f\{f[f(x)]\}=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x,$$

$$(x\neq 0, x\neq 1).$$

(2) $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f(1-x)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}$,

$$(x\neq 0, x\neq 1).$$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2;\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 (1) $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1.\end{cases}$ 现需求出使 $|g(x)|\leqslant 1$(或 $|g(x)|>1$)的 x 的范围.

由于 $|x|>2$ 时，$g(x)=2>1$，故仅当 $|x|\leqslant 2$ 时，才可能有 $|g(x)|\leqslant 1$. 而欲使 $|g(x)|\leqslant 1$，必须且只需

$$|x|\leqslant 2, \ |2-x^2|\leqslant 1$$

由此解得 $1\leqslant |x|\leqslant \sqrt{3}$.

于是有 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant |x|\leqslant \sqrt{3},\\ 0, & |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3}.\end{cases}$

(2) $g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 2,\\ 2, & |f(x)|>2.\end{cases}$

由 $f(x)$ 的定义知，对任何 x 有 $|f(x)|\leqslant 1<2$，故有

$$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}2-1^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2-0, & |x|>1.\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$