数学规划讲义

马仲蕃　魏权龄　赖炎连　编

中国人民大学出版社

数 学 规 划 讲 义

马仲蕃 魏权龄 赖炎连 编

中 国 人 民 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是作者们在中国人民大学经济信息管理系的教学讲义. 全书共分三部分. 第一部分: 线性规划. 第二部分: 非线性规划. 第三部分: 动态规划. 主要阐述有关数学规划三个分支的基础知识.

本书可以作为大专院校有关专业的高年级学生的教学用书, 以及从事于运筹学、系统工程、计算数学、应用数学和工程设计人员的参考书.

数学规划讲义

马仲蕃 魏权龄 赖炎连 编

*

中国人民大学出版社出版

(北京西郊海淀路 39 号)

外文印刷厂印刷

(北京西郊车公庄西路 19 号)

新华书店北京发行所发行

*

开本: 850×1168 毫米 32 开 印张: 7.375

1981 年 5 月第 1 版 1981 年 5 月第 1 次印刷

字数: 192,000 册数: 14,000

统一书号: 13011·19 定价: 0.92 元

前　　言

数学规划所研究的对象属于最优化的范畴，本质上是一个极值问题．极值问题是一个古老的数学问题．然而它的某些方面的较深入的探讨——特别是在算法方面，以及其广泛的应用，直到本世纪四十年代前后，方始受到应有的注意．苏联数学家康特罗维奇(Л. В. Канторович)的工作，应该说是数学规划的滥觞．他不仅考虑了线性规划的问题，而且考虑了整数规划的问题．然而这项工作长期不为人所知．希奇柯克(**F. L. Hitchcock**)的文章，亦复如此．那时已经是第二次世界大战的前夕．由于战争的需要，柯勃门(**T. C. Koopmans**)重行、独立地研究了运输问题．后来丹西格(**G. B. Dantzig**)在1947年发现了单纯形方法，并将其应用于与国防有关的诸如人员的轮训、任务的分派等问题．单纯形方法至今仍然是线性规划的实用的、最有效的算法．1956年，佛兰克(**M. Frank**)和沃尔夫(**Ph. wolfe**)研究了目标函数为正定二次型，而约束条件为线性不等式的问题，并将其化为一系列线性规划求解．1951年，寇恩(**H. W. Kuhn**)和塔凯尔(**A. W. Tucker**)二人发表了非线性规划的基本定理．此后，非线性规划的工作就日渐增多，出现了很多算法．规划问题是一个大范围极值问题，因而凸性具有特殊的意义，从而凸规划成为非线性规划的一个重要分支．

今天线性规划的应用，极为普遍．在一些实际问题中，变量数目在百万以上．任何一个计算机都无此巨大容量．针对着这种大系统问题所具有的特征，出现了线性规划的分解原则与算法．随着我国生产的发展，这种大系统的问题已经提上日程．在六十年代初期，英国教改试用的中学数学教程中，已经列入简单的线性规划问题．诚然，在中学中所讲授的数学内容一般都比较初等，简明易懂；然而不可否

认，也仅有最基本的，在教学中不可缺少的，或者应用性极为广泛的内容，方始纳入教材．数学规划的作用于此可见一斑．

一般说来，线性和非线性规划所处理的实际问题都是静态的，即与时间因素无关．显然，有不少实际问题都牵涉到时间因素，如多阶段决策过程．在五十年代，贝尔曼（**R. Bellman**）注意到，如果过程具有如此特性，即在任一时刻 t，过程在时刻 t 以后的行为，仅依赖于 t 时刻的过程状态，而与 t 之前过程如何到达这种状态的方式无关，这样的过程就构成一个多阶段决策过程．这类问题可以按某种递推方式、即称之为动态规划的最优化原则来求解．最优化原则，本质上就是说，假如对任意的时刻 t，不论过程在时刻 t 以前的历史状况如何，若按时刻 t 的状态而言，过程今后的行为是最优的，则整个过程的行为亦必是最优的．这是一个极其简朴的法则．唯其是简朴，所以比比皆是，最优化原则的应用因而极为普遍．事实上，有时一个问题，就其实际含义说，本与时间因素无关，但从数学处理上，可以认为是按阶段进行，因而成为一个动态规划问题．这就使得最优化原则也成为求解一些非线性和整数规划的有效方法．

这本书是马仲蕃、魏权龄、赖炎连三位同志于 1979 年在中国人民大学经济信息管理系讲课时所编写的讲义．线性规划由马仲蕃同志编写、非线性规划由魏权龄同志编写、动态规划由赖炎连同志编写．这三部分相互参照，例如在第三部分、即动态规划中首先讲了网络最短路问题．这个问题就其物理含义说，本与时间因素无关，但在数学处理上，可看作是多阶段决策过程．动态规划的解法仍不失是网络最短路问题的一个有效解法．因而三部分合为一起出版，以便阅读．

许国志　1979 年 10 月

我们感谢中国人民大学经济信息管理系的同志们，特别是萨师煊、魏靖宇同志，他们对本书的内容和数学规划课程的教学提出了宝贵的意见．感谢桂湘云、吴方同志，他们对本书提出了宝贵的意见．

编　者

1979 年 10 月

目　录

第一部分　线性规划

第二部分　非线性规划

第三部分 动态规划

第一部分　线 性 规 划

马　仲　蕃

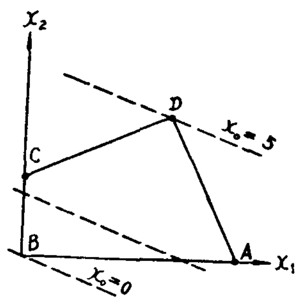
引　　言

让我们从一个简单的条件极值问题说起.

考虑问题:

求　max　$x_0=x_1+3x_2$

满足条件:
$$\left.\begin{aligned}-x_1+x_2&\leqslant 1\\ x_1+x_2&\leqslant 2\\ x_1,\ x_2&\geqslant 0\end{aligned}\right\}(p)$$



定义域(p)为右图中的多边形 $ABCD$. 线性函数 x_0 的等高线为一族平行线, 如图中虚线所示. 对多边形 $ABCD$ 中的点, x_0 的值在 0 与 5 之间变化, 最大值为 5, 在顶点 D 达到; 最小值为 0, 在顶点 B 达到.

这是线性规划问题的雏型. 最基本的性质是在顶点达到极值. 通过代数方法, 描述高维空间中多面体的顶点, 然后, 进一步求出达到极值的顶点, 这便是线性规划这一学科的主要内容。

线性规划是于1947年, G. B. Dantzig(丹西格) 提出了"单纯形"方法后, 开始形成的. 它的迅速发展, 主要由于应用的广泛性. 当然, 另一方面, 也由于它的方法的有效性. 虽然, 线性规划问题也是一类条件极值问题, 然而, 读者将看出, 线性规划中的方法和经典的分析方

法很不相同.

这一部分，主要介绍线性规划中的“单纯形”方法和“标号法”. 编者假定读者熟悉线性代数的基本知识.

第一章　线性规划的基本概念

§1.1. 线性规划问题的标准形式

从数学上说，线性规划问题是指如下的条件极值问题:

$$\text{求}\quad \max\quad x_0=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j \tag{1.1}$$

满足条件:

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j=b_i\qquad i=1,\cdots m \tag{1.2}$$

$$x_j\geqslant 0\qquad j=1,\cdots n \tag{1.3}$$

其中 c_j, a_{ij}, b_i 都是已知量, x_j 为未知量. (1.1)称为目标函数; (1.2)和(1.3)称为约束条件. 满足方程组(1.2)的解$\{x_1,\ \cdots\cdots x_n\}$, 若同时又满足非负的条件(1.3), 则称其为允许解. 满足(1.1)的允许解称为最优解.

利用矩阵和向量的符号，记:

$C=(C_1,\cdots C_n)$为一 n 维行向量.

$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots\qquad\vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$为一 m 行 n 列的矩阵.

$b=\langle b_1,\cdots b_m\rangle$　为一 m 维列向量.

$x=\langle x_1,\cdots x_n\rangle$　为一 n 维列向量.

$$A_i=(a_{i1},\cdots a_{in})\qquad i=1,\cdots m.$$
$$P_j=\langle a_{1j},\cdots a_{mj}\rangle\qquad j=1,\cdots n.$$

A_i 为 n 维行向量, P_j 为 m 维列向量, 则问题可写为:

$$\begin{aligned}&\text{求}\quad \max\quad x_0=Cx\\&\text{满足}\qquad A_ix=b_i\qquad i=1,\cdots m\\&\qquad\qquad x\geqslant 0\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}&\text{求}\quad \max\quad x_0=Cx\\&\text{满足}\qquad \sum_{j=1}^{n}x_jP_j=b\\&\qquad\qquad x_j\geqslant 0\qquad j=1,\cdots n\end{aligned}$$

或者 $\max\{Cx\,|\,Ax=b,x\geqslant 0\}$

若给的目标函数是求 $\min Cx$, 则可化为求 $\max(-Cx)$。

若给的约束条件中, 含有不等式:

$$A_ix\leqslant b_i\quad \text{或}\quad A_ix\geqslant b_i.$$

则可等价地化为:

$$A_ix+x_{n+i}=b_i\qquad x_{n+i}\geqslant 0.$$

或

$$A_ix-x_{n+i}=b_i\qquad x_{n+i}\geqslant 0.$$

称新增加的变量 x_{n+i} 为松弛变量.

§1.2. 实 际 例 子

例 1 下料问题

要利用某类钢板(或钢筋)下 1, 2, …, m 种零件的毛料. 根据既省料又容易操作的原则, 设人们在一块钢板上, 已经设计出 n 种不同的下料方式. 设第 j 种下料方式中, 可下得第 i 种零件 a_{ij} 个. 设第 i 种零件的需要量为 b_i. 问应该采用那些下料方式, 使既满足需要又用的钢板总数最少?

设采用第 j 种方式下料的钢板总数为 x_j，则上述问题可归结为如下的数学问题:

求一组变量 $x_1, \cdots x_n$ 使得满足:

$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \geqslant b_i \qquad i=1, \cdots m$

(所下的第 i 种零件总数不少于 b_i)

$x_j \geqslant 0 \qquad j=1, \cdots n$

(钢板数目不能是负数)

且使 $x_1+\cdots+x_n$ 达到最小值

(用的钢板数最少)。

例 2 运输问题

某种物资有 m 个产地，n 个销地. 第 i 产地的产量为 $a_i(i=1, \cdots m)$；第 j 销地的需要量为 $b_j(j=1, \cdots n)$，其中 $\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$. 设由产地 i 到销地 j 的距离为 d_{ij}. 问如何分配供应，使既满足各地的需要，又花的总运输力(吨公里)最少?

用双指标变量 x_{ij} 表示由产地 i 供给销地 j 的物资数量. 则上述问题可归结为如下的数学问题:

求一组非负的变量:

$$x_{11}, \cdots x_{1n}, x_{21}, \cdots x_{2n}, \cdots x_{m1}, \cdots x_{mn}$$

使得满足:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \qquad j=1, \cdots n$$

(满足各销地的需要量)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad i=1, \cdots m$$

(各产地的发出量等于产量)

且使 $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$ 最小

(所化的总吨公里数最少)

§1.3. 单纯形表

对线性规划问题:

$$\max\{x_0 \mid x_0 = Cx, Ax = b, x \geqslant 0\}$$

设系数矩阵 A 的秩为 m. 称 A 的任一 $m\times m$ 的非奇异子矩阵 $B(|B|\neq 0)$ 为线性规划问题的一个基. 变量 x_j, 若所对应的列 P_j 包含在基 B 中, 则称其为 B 的基变量. 否则, 称 x_j 为 B 的非基变量.

设有一基 $B=(P_{J_1}, P_{J_2}, \cdots P_{J_m})$, 对应地, 记:

$C_B=(C_{J_1}, C_{J_2}, \cdots C_{J_m})$　　为一 m 维行向量,

$x_B=\langle x_{J_1}, x_{J_2}, \cdots x_{J_m}\rangle$　　为一 m 维列向量。

由方程组 $Bx_B=b$, 可解得 $x_B=B^{-1}b$. 记:

$$B^{-1}b=\langle b_{10}, b_{20}, \cdots, b_{m0}\rangle$$

则称方程组 $Ax=b$ 的解:

$$x_{J_1}=b_{10}, \cdots, x_{Jm}=b_{m0}\qquad \text{其余 } x_j=0 \tag{1.4}$$

为对应于 B 的基本解; 若满足 $B^{-1}b\geqslant 0$(即所有的 $b_{i0}\geqslant 0$), 则称其为基本允许解, 而这时的 B 称为允许基.

让 $\pi=(\pi_1, \cdots\pi_m)$ 表示 m 维的行向量, 由方程组 $\pi B=C_B$, 可解得:

$$\pi=C_BB^{-1} \tag{1.5}$$

我们称其为对应于 B 的单纯形乘子.

用 π 乘方程组 $Ax=b$ 的两边, 可得方程:

$$\pi Ax=\pi b, \text{即 } C_BB^{-1}Ax=C_BB^{-1}b \tag{1.6}$$

由方程式 $x_0=Cx$ 的两边减(1.6)可得:

$$x_0-C_BB^{-1}b=Cx-C_BB^{-1}Ax$$

即

$$x_0+(C_BB^{-1}A-C)x=C_BB^{-1}b \tag{1.7}$$

将基本解(1, 4)代入(1, 7), 得:

$$x_0+(\pi P_{J}-C_{J_1})b_{10}+\cdots+(\pi P_{Jm}-C_{Jm})b_{m0}$$
$$=C_BB^{-1}b$$

由 $\pi B=C_B$, 即得:

$$x_0=C_BB^{-1}b$$

[判别定理] 对基 B, 若 $B^{-1}b\geqslant 0$, 且 $C_BB^{-1}A-C\geqslant 0$, 则对应于 B 的基本解(1, 4), 便是最优解. 我们称其为基本最优解, 而这时的基 B 称为最优基.

证明: 由 $B^{-1}b\geqslant 0$, 可知解(1, 4)为基本允许解. 由 $C_BB^{-1}A-C\geqslant 0$, 则对一切允许解 x, 根据(1. 7), 必有 $x_0\leqslant C_BB^{-1}b$. 但是允许解(1. 4)使等式成立, 因此是最优解. 定理证毕.

将 $Ax=b$ 化为等价地方程组:

$$B^{-1}Ax=B^{-1}b$$

再由(1, 7), 可得:

$$\begin{pmatrix}1 & C_BB^{-1}A-C\\ 0 & B^{-1}A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_BB^{-1}b\\ B^{-1}b\end{pmatrix}\tag{1.8}$$

我们称(1, 8)的系数矩阵:

$$\begin{pmatrix}C_BB^{-1}b, 1, C_BB^{-1}A-C\\ B^{-1}b, 0, \quad B^{-1}A\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}C_BB^{-1}b, C_BB^{-1}A-C\\ B^{-1}b, \quad B^{-1}A\end{pmatrix}\tag{1.9}$$

为对应于基 B 的单纯形表, 记作 $T(B)$.

现在, 我们记:

$$C_BB^{-1}b=b_{00}\tag{1.10}$$
$$B^{-1}b=<b_{10}, \cdots b_{m0}>\tag{1.11}$$
$$B^{-1}P_j=<b_{1j}, b_{2j}, \cdots b_{mj}>\tag{1.12}$$
$$C_BB^{-1}P_j-C_j=b_{0j}\tag{1.13}$$

$(j=1, \cdots, n)$ 则

$$T(B)=(b_{ij})=\begin{pmatrix}b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0n}\\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

概括地说，单纯形表是在方程组(1, 2)中，把非基变量看作参变量，表出基变量和目标函数 x_0 时的系数矩阵.

对任意的基 $B=(P_{J_1},\cdots P_{J_m})$，设 $T(B)=(b_{ij})$. 对应于每一非基变量 x_j，我们定义向量 Y_j 如下：

$$Y_j=\langle y_{1j}\cdots y_{nj}\rangle \tag{1.14}$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll} y_{J_ij}=-b_{ij} & 1\leqslant i\leqslant m \\ y_{jj}=1 & \\ y_{lj}=0 & \text{对其余分量} \end{array}\right\} \tag{1.15}$$

由(1. 12)可得：

$$-b_{1j}P_{J_1}-b_{2j}P_{J_2}\cdots-b_{mj}P_{J_m}+P_j=0$$

因此，有性质：

$$AY_j=0 \qquad (j=1,\cdots n) \tag{1.16}$$

由(1. 13)及 Y_j 的定义，可得性质：

$$CY_j=-b_{0j} \qquad (j=1,\cdots n) \tag{1.17}$$

1. 3. 1. 引理 对任意的单纯形表(b_{ij})，若有某 j 使得 $b_{0j}<0$，$b_{ij}\leqslant 0$，$i=1,\cdots m$，则对应的线性规划问题或者无允许解；或者 x_0 无上界，因此无最优解.

证明：根据假设及 Y_j 的定义，立即可得：

$$Y_j\geqslant 0 \qquad CY_j>0 \tag{1.18}$$

现在，若问题有允许解 x，则由(1. 16)和(1. 18)，对任何实数 $\lambda>0$，$x+\lambda Y_j$ 也是允许解，且当 $\lambda\to+\infty$ 时，$x_0=C(x+\lambda Y_j)\to+\infty$，引理证毕.

今后，我们称由(1. 14)，(1. 15)所定义的向量 Y_j 为对应于非基变量 x_j 的(对 B 而言)极方向. 称满足 $Y_j\geqslant 0$ 的极方向为极射向.

例子(1)

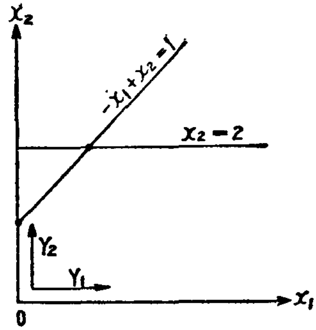
求 max $\quad x_0=x_1-x_2$

满足 $\quad -x_1+x_2\leqslant 1$

$\qquad\qquad x_2\leqslant 2$

$$x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 \geqslant 0$$

定义域如右图所示.



化成标准形式为:

求 max $x_0 = x_1 - x_2$

满足 $-x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_2 \quad + x_4 = 2$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0$

基 $B=(P_3P_4)$的单纯形表为:

$$\begin{array}{cccccc} & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

对应于B的基本解为: $x_1=0, x_2=0, x_3=1, x_4=2$. 对应于非基变量 x_1 的极方向 Y_1 为:

$$Y_1 = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle \geqslant 0 \qquad CY_1 = 1 > 0$$

因此, Y_1 为极射向. 对应于 x_2 的极方向 Y_2 为:

$$Y_2 = \langle 0, 1, -1, -1 \rangle \qquad CY_2 = -1 < 0$$

由引理1. 3. 1 问题无最大值.

对单纯形表 $T(B)=(b_{ij})$中某元素 $b_{rs} \neq 0, r, s \geqslant 1, J_r \neq s$, 将矩阵$(b_{ij})$作如下的初等变换:

$$\bar{b}_{rj} = b_{rj}/b_{rs} \quad (0 \leqslant j \leqslant n) \tag{1.19}$$

(即用 b_{rs} 除(b_{ij})的第 r 行)

$$\bar{b}_{ij} = b_{ij} - b_{rj}b_{is}/b_{rs}$$
$$(0 \leqslant i \neq r \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n) \tag{1.20}$$

(即从(b_{ij})的第 i 行减去第 r 行的 b_{is}/b_{rs} 倍).

可得矩阵$(\bar{b}_{ij})$. 就方程组(1. 8)来说, 上述变换就是从第 r 个方程中解出变量 x_s(这时, x_{J_r}变为参变量), 然后, 将其代入其他各方程. 也就是说, 用 x_s 代替基变量 x_{J_r}. 因此, 我们有:

1. 3. 2. 引理 由(1. 19), (1. 20)所确定的矩阵$(\bar{b}_{ij})$是基

$$\bar{B}=(P_{J_1}\cdots P_{J_{r-1}}P_s\ P_{J_{r+1}}\cdots P_{J_m})$$

的单纯形表.

我们称变换(1.19), (1.20)为$\{r, s\}$旋转变换. 称 b_{rs} 为旋转元, s 为旋转列, r 为旋转行, 非基变量 x_s 为旋入变量, 基变量 x_{J_r} 为旋出变量.

例子(2)

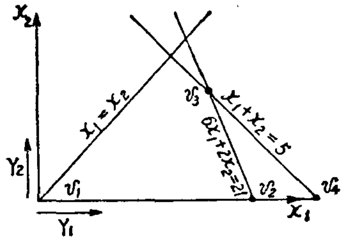
求 max $x_0=2x_1+x_2$

满足 $x_1+x_2\leqslant 5$

$x_1\geqslant x_2$

$6x_1+2x_2\leqslant 21$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$



定义域如右图所示. 化成标准形式为:

求 max $x_0=2x_1+x_2$

满足
$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &=5\\
-x_1+x_2 \quad +x_4 \qquad &=0\\
6x_1+2x_2 \qquad\quad +x_5 &=21\\
x_1,\ \cdots,\ x_5\geqslant 0 &
\end{aligned}$$

基 $B_1=(P_3, P_4P_5)$所对应的单纯形表为:

$$T(B_1)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & & 1 & \\ 21 & 6 & 2 & & & 1 \end{pmatrix}$$

对应于 B_1 的基本解为: $x_0=0, x_1=x_2=0, x_3=5, x_4=0, x_5=21$

在 $T(B_1)$中, 两个极方向 Y_1, Y_2 为:

$$Y_1=\langle 1, 0, -1, 1, -6\rangle \qquad Y_2=\langle 0, 1, -1, -1, -2\rangle$$

在 $T(B_1)$中, 若以 b_{11} 为旋转元进行旋转变换, 则可得基 $B_2=(P_1P_4P_5)$的单纯形表 $T(B_2)$: