PUTONGWULILIXUEREXUESHIYAN

普通物理力学热学实验

里佐威 刘铁成

吉林大学
出版社

普通物理力学热学实验

里佐威 刘铁成

出版社

前　言

普通物理实验是高等学校理工科学生的主要基础课程之一，是学生进入大学后接触较早的一门独立的必修课。力学、热学实验是普通物理实验的重要组成部分。该课程既要有独立的基本内容，也要与后继课程相配合，还要适应教学改革发展的形势及各专业不同培养目标的不同需求。为此，本书安排以下内容：

首先，精选了52个基础实验，按物理规律编排在8个单元中。每个单元中的实验题目并不是简单并列，而是考虑到不同教学层次的需要，选编了具有不同难度或者对相近物理内容使用不同方法、不同设备的若干个实验。这样，就可根据不同专业的不同培养目标以及设备情况，在实际教学中从每个单元选择几个实验题目作为必修内容。特别要说明的是，尽管有些实验中附有一些较深的内容，也力求深入浅出地阐明其物理意义，目的是供学有余力者作进一步的钻研。这部分内容可由教师灵活掌握或作为选做内容。

其次，考虑到教学改革的需要，为进一步培养学生分析问题、解决问题的能力，编排了15个设计性实验和4个综合实验。

为保持各单元物理内容的完整性、系统性，避免在不同的题目中重复相同的内容，把各题目中具有共性的内容，如对长度、时间、温度等基本测量和基本测量仪器的使用等内容单独编为一章，放在了基础实验的前面。

作为物理实验不可缺少的内容，在本书的前面，编写了“实验误差及数据处理”一章。在本课程必须掌握的内容的基础上，稍有扩充，并编入了“不确定度”的基本知识，以适应教学发展的需要。

实践证明，对教材作这样的编排，既增加了教学选择上的灵活性，又不失物理内容的完整性，适合不同教学单位对不同专业学生的培养之需要。本书可作为物理类各专业及非物理类理工科学生的实验教材。

本书的出版，虽然由编者执笔，但实际上是一项集体工作的累积，是在本实验室工作过的许多同志几十年教学实践经验的总结，特别是1989年以来教学改革的经验总结，是大家辛勤劳动和智慧的结晶。这些同志包括李洪泽副教授、袁祖奎副教授、王树春高级工程师、张玮高级工程师、常铁军博士等。孙成林同志为本书出版也做了大量工作；吉林大学出版社的有关同志对本书出版给予了大力支持，编者在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平、时间所限，书中错误疏漏之处一定不少。敬请读者批评指正。

编者

2000年5月1日

目　　录

绪　论

一、物理实验课的目的

物理学是建立在实验基础上的科学.物理实验是自然界中物质的各种基本运动形态,按照人们的意志支配下的再现.人们可以在实验室里,用适当的仪器和装置,在受控制的条件下,对某些物理现象或过程进行细致的观察和研究.把原来极其复杂的自然现象加以典型化,从而把有待研究的那一部分问题中的最基本的东西突出出来,分别研究,加以概括和提高,找出带有普遍意义的规律,上升到理论高度.在物理学中,每个概念的确立,每个原理和定律的发现,无不有它坚实的实验基础.而提出的新理论也必须经实验验证,才被公认为成立.因此,可以说物理实验是带有一定目的的对自然现象的观测,既为物理学提供了丰富的资料源泉,同时又是检验理论正确与否的惟一依据.

因此,要学好物理学,必须实验与理论并重,特别是在低年级学习普通物理阶段,更应认识到实验的重要性.通过实验,给学生以实验方法和实验技能的基本训练;培养并逐步提高学生观察和分析问题的能力以及理论联系实际的独立工作能力;培养学生实事求是的科学态度,严肃认真的工作作风和积极探索的精神;培养学生爱护国家财产,遵守纪律的优良品德.

通过多年的实验教学,我们认为,应该让学生主动去做实验,在实验中,在使学生掌握了实验的基本方法和基本技能的基础上,给学生以更大的自主权,充分调动起学生们的积极性、主动性和灵活性.为此,我们在实验课的编排上做了适当的调整.

二、物理实验课的基本程序

物理实验是学生在教师指导下独立进行实验的一种实践活动,无论实验内容的要求或研究的对象如何不同,无论采用什么方法,其基本程序大致相同,一般都有三个环节:

1. 实验前的预习

(1)预习实验教材.由于实验课的时间有限,测量工作量大,实验中还可能遇到各种各样的问题,应在课前就对实验的目的、原理和内容作全面了解,还应预习有关仪器的使用说明书及参考资料等.对于一些设计性实验,还应在课前设计出实验方法及步骤,列出实验所用的仪器.

(2)写好预习报告.预习报告应包括:

a. 实验名称;

b. 实验条件;

c. 计算公式、记录待测量和计算量的数据表格;

d. 注意事项.

2. 进行实验

实验时应遵守实验室的规章制度;仔细阅读有关仪器使用的注意事项和仪器说明书,在教师指导下正确使用仪器.实验进行时,应合理操作,认真思考,仔细观察,记录数据.记录数据应包括以下几个方面:

(1)实验条件.记录下与实验结果有关的条件.

(2)仪器的规格、型号等.

(3)实验数据.每次测量后要立即把数据记录在数据表格中,注意有效数字和单位.

(4)实验现象记录.在实验过程中出现的一切不正常的或自己认为有意义的现象,记录下来并在写实验报告时进行讨论.

(5)原始记录应由指导教师签字.

3.实验报告

实验报告的内容一般包括:

(1)实验名称、实验者姓名、实验日期.

(2)实验目的.

(3)实验仪器及装置,包括型号、规格.

(4)实验原理和方法.要用自己的语言简要叙述,不要照抄书本.

(5)实验数据及数据处理.将数据用简单明了的方式从预习报告上转记下来,并进行认真地计算、作图等.原始记录要附在报告上.

(6)实验结果及讨论.

第一章　实验误差及数据处理

§1.1　测量与误差

物理实验离不开对物理量的测量，它主要涉及到测量仪器、测量方法、测量条件、测量人员等因素．由于这些因素，对一物理量的测量不可能是无限精确的，测量结果只能是一个近似值．测量值与其客观上具有的真实数值（真值）之差称为误差．测量误差存在于任何测量中并贯穿始终．而测量误差的大小反映我们认识接近于真值的程度，即可靠性．

一个测量数据不同于一个数值，它是由数值和单位两部分组成的．而且这个数值的位数是有其物理意义的，表示测量误差的大小．

测量可分为直接测量和间接测量．用仪表直接读出测量值的，称为直接测量，相应的物理量称为直接测量量．但对于大多数物理量来说，没有直接读数用的仪表，只有用间接的方法，由几个直接测量量经过物理公式计算得出待测量，这种测量方法称为间接测量，相应的物理量称为间接测量量．无论是直接测量量还是间接测量量都有误差．

测量结果应包括数值、误差和单位．

一、误差

在测量中，由于各种原因测量值与真值总是存在差异，

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1-1}$$

x_0 为真值，x 为测量值，其差 Δx 就称为误差．误差存在于一切测量之中，而且贯穿测量过程的始终．

但是这里有一个问题需要注意，真值 x_0 是客观存在且又不可测知的，因此，在实际测量中，误差并不能由(1-1)式简单地计算出来．建立在统计学基础上的误差理论，是我们在实际测量中处理误差问题的理论基础．

在处理误差问题时，还经常出现偏差这一名词．误差是指测量值与真值的差别，偏差是指测量值与平均值的差别．

二、误差与分类

从误差的性质上可分为两大类：偶然误差和系统误差．

（一）*系统误差*

在同样的条件下，对同一物理量进行多次测量时，误差的大小和正负总保持不变，或按一定规律变化，或是有规律地重复，这种误差称为系统误差．

系统误差主要来自三个方面：

(1)仪器误差．这是由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用而引起的．如仪器零点不准，尺子长了或短了一点，天平不等臂或使用的砝码有误差等等．

(2)理论（方法）误差．这是由测量所依据的理论公式本身的近似性，或实验条件不能达到

理论公式所规定的要求，是测量方法所带来的误差. 如单摆的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 成立的条件是摆角趋于零，这实际上是达不到的，因此用此公式计算出的重力加速度 g 就总是偏大.

(3)个人误差. 这是由于观测人员生理或心理特点所造成的，这通常与观测人员的固有习惯和反应速度等有关，其结果是使测量数据总往一个方向偏. 如用米尺量一物体长度，有人就不是正视测量，而总是偏一方斜视.

另外，环境的有规律变化也是系统误差产生的原因.

系统误差有些是定值的，如某些仪器的零点不准；有些是积累性的，如用受热膨胀的钢尺进行测量，其指示值就偏小，且误差值随待测长度成比例增加；有些是周期性或按一定规律变化的.

要减小系统误差，一般要在实验前对测量仪器进行校正，在实验时找出系统误差产生的原因，采取一定的方法去消除或部分消除，或对测量结果进行修正.

系统误差是有规律的，因此多次测量取平均值并不能减小系统误差.

(二)偶然误差

如果实验中已理想地消除了系统误差，在相同条件下多次测量同一物理量时，还会发现各次测量值之间有差异，这种误差是由于人的感官灵敏程度和仪器精密程度有限，周围环境的干扰以及随测量而来的其他不可预测的偶然因素造成的. 这些由于偶然的或不确定的因素所造成的每一次测量值的无规则的涨落，称为偶然误差，也叫随机误差.

尽管这种误差是随机的，每次测量值时而偏大，时而偏小，但它服从一定的统计规律，常见的统计规律是比真值大和比真值小的测量值出现的几率相等；误差小的数据比误差大的数据出现的几率大；误差越大出现的几率越小，出现很大误差的几率趋于零. 因此增加测量次数，可以减小偶然误差. 但是偶然误差是不能完全消除的.

偶然误差主要来自下列三个方面：

(1)主观因素. 由于观测人员的感官灵敏程度和操作熟练程度的限制，使得主观判断出现不确定性.

(2)测量仪器的影响. 测量仪器精度不够高或工作状态不正常，使得示数不重复，不固定.

(3)环境的影响. 气流扰动，温度起伏、电磁场的不规则干扰等均会影响测量结果.

除了上述两类误差以外，还可能发生由于读数、记录上的错误，由于突发的不正常的条件变化，仪器工作不正常等因素造成的错误，而使数据序列中出现“坏值”. 错误不同于误差，必须剔除. 这种剔除要遵守一定的规则，而不能不恰当地、人为地把一组数据中离散较大的数据都去掉，那样就会使测量结果的可靠性失去标准.

总之，系统误差与偶然误差性质不同，来源不同，处理方法也不同.

(三)测量结果的表示，绝对误差和相对误差

一个测量结果，无论是直接测量的结果，还是间接测量的结果都应包括测量结果及这个结果的可信程度. 我们通常把测量结果及其绝对误差表示成 $x \pm \Delta x$ 的形式，x 是测量值，Δx 是绝对误差.

误差还有一种表示称为相对误差，定义为：

$$E(x) = \frac{\Delta x}{x} \times 100\%$$

三、偶然误差的处理

我们这里先不考虑系统误差的存在，而只考虑偶然误差的处理.

(一)直接测量与误差估算

1. 单次测量与误差估算

在实验中，若对某一物理量的测量精确度要求不高，只需进行单次测量，或被测物理量所处的物理状态不能重复，只能进行单次测量时，可按仪器出厂检定书或仪器上注明的误差作为极限误差. 如果没有注明，只能根据实际情况，对误差进行合理估算. 读数极限误差的估算也不统一，因人、因仪器而不同. 这里只提出一个供参考的原则：如观测者对测量数据能够清晰地读到仪器最小分度的 1/10、1/5、1/2 等，那么读数的极限误差就取仪器最小分度的 1/10、1/5、1/2…，一般情况下，数据的极限误差就取仪器最小分度的一半.

还应强调指出，在仪器的使用中不引起其他附加误差时，上述误差估算才是可行的，反之则不能.

2. 多次测量与误差计算

如前所述，增加测量次数，可以减小偶然误差，如果仪器选择适当，这种测量将不会得到完全相同的数据. 如果当测量读数不引进其他附加误差时，进行多次测量的精密度一般应当高于仪器的精密度.

在相同条件下，对某物理量 x 进行 k 次测量，如每次测量值分别为 $x_1, x_2, x_3, \cdots x_k$，用 $\bar{x}$ 表示算术平均值，则

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k)/k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \tag{1-2}$$

根据误差理论，算术平均值 $\bar{x}$ 最接近真值，当测量次数无限增加时，算术平均值无限接近于真值.

估算偶然误差的方法有许多种，最常用的是以标准偏差来表示偶然误差. 标准偏差定义如下：

有限次(k 次)观测中的某一次测量结果的标准偏差 σ 为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2}{k-1}} \tag{1-3}$$

有限次(k 次)观测中算术的平均值 $\bar{x}$ 的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$ 为

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2}{k(k-1)}} \tag{1-4}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} \tag{1-5}$$

(1-5)式表示多次测量可以减少偶然误差.

估计偶然误差的另一方法是以算术平均偏差 δ 来表示，即

$$\delta = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} | x_i - \bar{x} | \tag{1-6}$$

在测量次数很多时 δ 与 σ 有如下关系：

$$\sigma = 1.25\delta \tag{1-7}$$

在实际测量中，若计算出的标准偏差

$$\sigma \geq \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$$

标准偏差 σ 用式(1-3)计算. 若计算出的标准偏差

$$\sigma < \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$$

标准偏差用

$$\sigma = \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$$

$\Delta_{仪}$ 称为灵敏阈，所谓灵敏阈是指在正确使用仪器条件下，能够分辨的最小区域.

3. 偶然误差基本理论简介

(1)随机误差的正态分布. 对一个物理量进行一次测量，随机误差(偶然误差)的出现没有规律性，但在相同条件下，对同一物理量进行多次测量时，随机误差的分布就表现出统计规律性.

表 1-1　测量某一物体长度所得的数据，测量次数 $N = 150$

观察值 x_i/cm	频数 n_i	相对频数	
		n_i/N	$n_i/N \times 100\%$
7.31	1	0.007	0.7%
7.32	3	0.020	2.0%
7.33	8	0.058	5.8%
7.34	18	0.120	12.0%
7.35	28	0.187	18.7%
7.36	34	0.227	22.7%
7.37	29	0.197	19.7%
7.38	17	0.113	11.3%
7.39	9	0.060	6.0%
7.40	2	0.013	1.3%
7.41	1	0.007	0.7%

作 $n_i \sim x_i$ 或$(n_i/N) \sim x_i$ 直方图(如图 1-1)，所谓直方图是指将 x_i 分成几组，每一组对应的是同一个值，在这里，我们按 $\Delta x = 0.01$ 分组，比如 7.34 出现的次数是 18，是指 7.335 与 7.345 之间出现的次数为 18. 当测量次数少或误差较大时，组数可以少些，间隔可以大些，每个间隔内可以包括几个读数，当 $N \to \infty$，$\Delta x \to \mathrm{d}x$，直方图的上边缘折线就会转化成一条光滑的曲线，称为随机误差的概率密度分布曲线. 曲线峰值处的横坐标相应于平均值；在横坐标上，任一点与平均值间的距离即表示其相应的随机误差，任一观测值 x_i 位于 x_i 与 $x_i + \mathrm{d}x$ 之间的或然率为

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{N} = \frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = y_i \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \mathrm{d}x = 1 \tag{1-8}$$

式(1-8)称为或然率归一化条件.

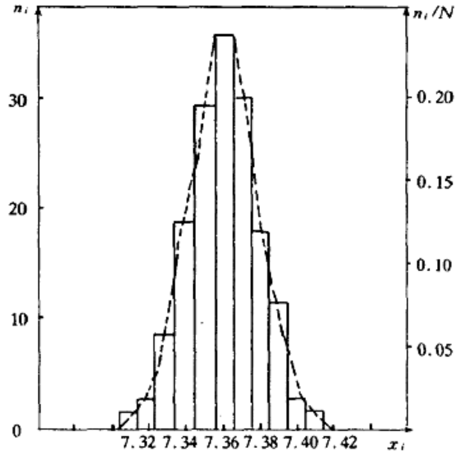

图 1-1

在多数情况下，随机误差服从正态分布（亦称高斯分布），其概率密度函数 $\varphi(x)$ 由下式给出：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-[x])^2/2\sigma^2} \tag{1-9}$$

式中 x 为随机变量，$[x]$ 是正态分布曲线峰值的横坐标，即为前面讲过的平均值. 如果已知 $[x]$ 和 σ，由(1-9)式可计算出实验值落在某特定区间的几率. 实验值落在 (a,b) 范围内的几率

$$P(a,b)=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{1-10}$$

即等于 $x=a$，$x=b$ 两直线与横坐标轴及曲线所包围的面积（图 1-2）.

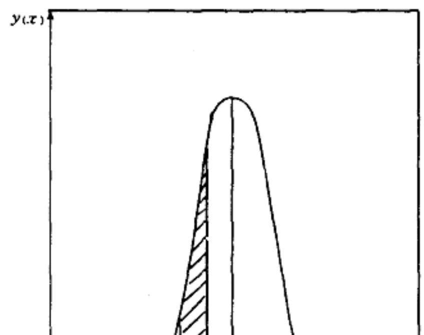

图 1-2

利用(1-10)式可计算出 x 落在 $[x]-\sigma$，$[x]+\sigma$ 间的几率是 68.3%，落在 $[x]-2\sigma$，$[x]+2\sigma$ 内的几率为 95.4%，落在 $[x]-3\sigma$，$[x]+3\sigma$ 内的几率为 99.7%. 正态分布函数中有两个参数 $[x]$ 和 σ，$[x]$ 决定了曲线中心的位置，σ 决定了曲线的形状，σ 越大，曲线越平坦，曲线峰值越

低：σ 越小，曲线越陡峭，峰值越高.

对于随机误差的分布，有以下几条重要性质：

〈1〉小误差比大误差出现的机会大，与平均值之差越大，出现的机会越小(单峰性).

〈2〉大小相等、符号相反的正负误差出现的机会大致相等(对称性).

〈3〉极大正误差与负误差出现的机会很小，误差不会超过某一范围(有界性).

(2)精密度、准确度和精确度.

精密度表示同一物理量进行多次测量时所得结果彼此互相接近的程度，即测量结果的重复性.精密度是随机误差的反映，$h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$称为精密度指数，$\sigma$ 的大小决定了精密度的大小.

准确度表示结果与真值接近的程度，是系统误差的反映.

精确度是精密度和准确度、偶然误差与系统误差的综合反映.

图 1-3 用打靶的例子来说明精密度，准确度和精确度.

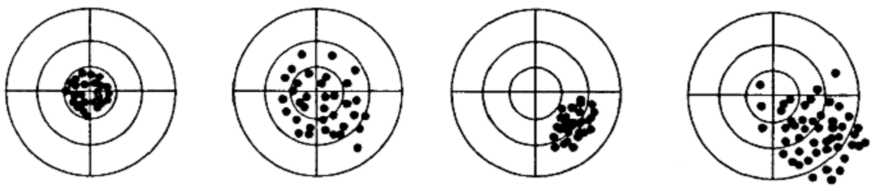

图 1-3

4．非等精度测量简介

前面讲的都是等精度测量，但在一些测量中，因为条件不同，其精度不等，一些测量值比另一些更可靠些.信赖程度不同，对精度高的数据，应给予较大的信赖，习惯上给这些测量值以不同的“权”来表示对测量值的信赖程度.若不考虑系统误差，权与方差成反比.

在一组测量中的测量值为 $x_1, x_2, \cdots x_n$，对应的权数为 $p_1, p_2, \cdots p_n$，此时相当于我们有 $(p_1+p_2+\cdots+p_n)$个等精度的测量值，其平均值为

$$\bar{x}_p=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{1-11}$$

式中的 $\bar{x}_p$ 为加权平均值.加权平均值的标准偏差为

$$\sigma(\bar{x}_p)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x}_p)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i}} \tag{1-12}$$

这里只是简单地介绍一下非等精度测量，对这个问题的详细讨论可参看有关参考书.

5．坏值的剔除

前面已经讲过，对于坏值应当剔除，才能使实验结果符合实际情况.但另一方面，由于偶然误差的存在，测量数据具有一定的离散程度是符合统计规律的，可以存在个别或少量偏离平均值较大的数据.因此也不能把一组数据中离散较大的数据都归于坏值而剔除.

剔除坏值要规定一个判别规则，规定一个限度.超出这个限度，就认为是坏值而予以剔除.

下面介绍几个常用的判断规则：

(1)3σ 准则(Pauta 准则). 如果测量数据与平均值之差大于标准偏差的 3 倍, 即 3σ, 就剔除这个数据. 这是一个很粗略的方法, 当 $n \to \infty$, 数据为正态分布时, 数据落在 $x \pm 3\sigma$ 中的几率为 99.70% . 但当 n 较小时, 这个标准就不可靠了.

(2)肖维勒准则. 前面讲过的 3σ 标准不适用于测量次数较少的情况. 用肖维勒准则时, 要考虑测量次数的影响. 对某一测量数据, 如果有

$$\mid x_i - \bar{x} \mid > \omega_n \sigma$$

则 x_i 就予以剔除. ω_n 为与测量次数有关的系数, 由表 1-2 给出, 从表中可以看出. 当 n 为 200 时, 此准则与 3σ 准则相当.

表 1-2　肖维勒系数表

n	ω_n	n	ω_n	n	ω_n
5	1.65	18	2.20	35	2.45
6	1.73	19	2.22	40	2.50
7	1.70	20	2.24	50	2.53
8	1.86	21	2.26	60	2.64
9	1.92	22	2.28	80	2.74
10	1.96	23	2.30	100	2.81
11	2.00	24	2.32	150	2.93
12	2.04	25	2.33	200	3.02
13	2.07	26	2.34	500	3.29
14	2.10	27	2.53	1000	3.48
15	2.13	28	2.37	2000	3.66
16	2.16	29	2.38	5000	3.89
17	2.18	30	2.39		

6. 误差的取位

从误差的定义可以看出, 由于真值不可能严格准确测出, 所以误差也就无法严格运算, 而只能估算, 那么误差的取位也就成了误差理论中的一个问题. 由于多次测量的结果随着测量次数的增加, 其平均值无限趋近于真值, 那么一般情况下误差的取位就要受到测量次数的影响, 如果测量次数很多(如 100 次以上), 标准偏差可以取两位或三位, 测量次数少时取一位. 在我们的实验中, 一般测量次数较少, 为了减少计算量, 便于进行误差分析, 我们规定: 绝对误差只取一位, 相对误差小于 10% 取一位, 大于 10% 取两位.

(二)间接测量的误差传递与合成

所谓间接测量就是将一些直接测量量, 通过计算公式计算出待测量. 由于每次直接测量都有误差, 因此, 间接测量的结果也一定会有误差, 这就是误差的传递与合成.

设待测量 N 和各直接测量量 $x, y, z \cdots$ 有关系

$$N = f(x, y, z \cdots)$$

有

$$dN = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots$$

设在实验中对各直接测量量 $x, y \cdots$ 作了 k 次测量, 可算出 k 个待测量,

$$N_i = f(x_i, y_i, z_i, \cdots), \qquad i = 1, 2, \cdots k$$

$$dN_i = \frac{\partial f}{\partial x}dx_i + \frac{\partial f}{\partial y}dy_i + \cdots$$

$$dN_i^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dx_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dy_i^2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_i dy_i + \cdots$$

$$\sum_{i=1}^{k} dN_i^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} dx_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} dy_i^2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\sum_{i=1}^{k} dx_i dy_i + \cdots$$

若 $x, y\cdots$ 的误差彼此无关，则各测量值的 $dx_i, dy_i\cdots$ 可正可负，可大可小，其各交叉项的和等于零，如 $\sum_{i=1}^{k} dx_i dy_i = 0$，那么

$$\sum_{i=1}^{k} dN_i^2 \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} dx_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} dy_i^2 + \cdots$$

两边乘 $\frac{1}{k}$，则有

$$\sigma_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \cdots} \tag{1-13}$$

$$E(N) = \frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\sigma_x^2}{N^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\sigma_y^2}{N^2} + \cdots} \tag{1-13}$$

(1-13)，(1-14)式即为误差传递公式. 常用的误差传递公式如表 1-3.

表 1-3　常用函数的标准偏差传递公式

测量关系式 $N=f(x,y,\cdots)$	标准误差传递公式
$N=x+y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x-y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=kx$	$\sigma_N=k\sigma_x, \frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\sqrt[k]{x}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{k}\frac{\sigma_x}{x}$
$N=xy$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{k^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$N=\sin x$	$\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\sigma_x$
$N=\ln x$	$\sigma_N=\frac{\sigma_x}{x}$

在误差合成时，起主要作用的常常是少数几项分误差，当误差占总合成误差的 1/10 以下时，就可略去不计，由于总误差来自各项分误差平方相加，所以通常某一项分误差小于最大分误差的 1/3 以下时就可略去不计，这一点在分析误差、计算误差时有很大实际意义，可以大大简化计算，在分析误差时，常常不必一上来就把误差的分析表达式全部写出而陷入繁锁的数学运算，而是根据实际情况，在每一步计算中都可略去小项，分析主要因素的影响.

应当指出的是，标准偏差及其传递公式是建立在统计理论基础上. 也就是说，是适用于多次测量.

在粗略估算误差范围时，或者在设计实验考虑误差的分配时，可以用

$$\Delta N = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \cdots \tag{1-15}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right|\Delta z + \cdots \tag{1-16}$$

作为误差传递公式．叫做误差的算术合成．

（三）偶然误差分析举例

例 1 用分度值是0.02mm的游标卡尺对某一长度 l 进行五次测量，测量值分别为：5.20，5.24，5.28，5.21，5.25mm．求测量结果．

解 平均值

$$\bar{l} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} l_i = \frac{1}{5}(5.20 + 5.24 + 5.28 + 5.21 + 5.25) = 5.236(\mathrm{mm})$$

平均值的标准偏差

$$\sigma_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(l_i - \bar{l})^2}{5(5-1)}} = 0.01(\mathrm{mm})$$

单次测量值的标准偏差

$$\sigma_l = \sqrt{5}\sigma_{\bar{l}} = 0.03(\mathrm{mm})$$

$$l = \bar{l} \pm \sigma_{\bar{l}} = (5.23 \pm 0.01)\mathrm{mm}$$

例 2 用单摆测定重力加速度的公式为 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$，测得 $T = 2.000 \pm 0.002\mathrm{s}$，$l = 100.0 \pm 0.1\mathrm{cm}$．试求重力加速度 g 及其标准误差 σ_g 与相对误差 $E(g)$．

解 已知

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

按误差传递公式

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 {\sigma_T}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 {\sigma_l}^2}$$

因 $\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{8\pi^2 l}{T^3}$，$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2}$，故

$$\begin{aligned}
{\sigma_g}^2 &= \frac{64\pi^4 l^2}{T^6}{\sigma_T}^2 + \frac{16\pi^4}{T^4}{\sigma_l}^2 \\
&= \frac{16\pi^4}{T^4}\left(\frac{4l^2}{T^2}{\sigma_T}^2 + {\sigma_l}^2\right) \\
\sigma_g &= \frac{4\pi^2}{T^2}\sqrt{\left(\frac{4l^2}{T^2}{\sigma_T}^2 + {\sigma_l}^2\right)} \\
&= \frac{4 \times 3.142^2}{2.000^2}\sqrt{\frac{4 \times 100.0^2}{2.000^2} \times 0.0002^2 + 0.1^2} \\
&= 2(\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}) \\
g &= \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4 \times 3.142^2 \times 100.0}{2.000^2} = 987.2(\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2})
\end{aligned}$$