

随机函数理论

及其在自动控制中的应用

科学出版社

随机函数理论及其在自动控制中的应用

田欣为 等 译

内部资料·注意保存

科 学 出 版 社

1 9 6 6

В. С. Пугачев
Теория случайных функций и ее применение
к задачам автоматического управления
Физматгиз, 1962, 第三版

內容簡介

本書系統地介紹隨機函數應用理論，詳細地探討了在任意隨機擾動作
用下工作的一維及多維綫性系統和非綫性系統準確度的研究方法。書中對
于有干擾時，探測和再現信號的現代統計理論給予了特別的注意。這種理
論給出求統計解的有效的一般性方法，理論嚴密完整，而計算方法較切合工
程實際。應用範圍廣，適用於自動學、遠動技術、無線電技術、火箭動力學、
宇宙航行理論、地震學、氣象學及其他應用科學領域。

著者以隨機函數的規範表示法作為闡述系統準確度理論的基本方法。
規範表示法是隨機函數應用理論的基本的一般性方法，它將研究系統的一
切統計方法統一起來，以求解所有系統的統計分析及綜合的問題。

書中前面部分論述必要的概率論基礎，因此具備有微積分知識的讀者
可以閱讀本書。

本書的對象是在自動學、無線電技術及其他應用技術部門工作的科學
工作者、工程技術人員及有關專業的高年級大學生。

隨機函數理論及其在自動控制中的應用

只限國內發行

科學出版社出版

北京朝陽門內大街137號

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

中國科學院印刷廠印刷

新華書店北京發行所發行 各地新華書店經售

*

1966年5月第一版

開本：850×1168 1/32

1966年5月第一次印刷

印張：25 6/16 插頁：4

印數：0001—4,700

字數：670,000

統一書號：15031·236

本社書號：3490·15—8

定價：3.80元

初版序摘要

战后时期是以自动学的蓬勃发展及其在一切技术部門中广泛的运用而著称。由于自动学和计算机的发展及其在各技术部門的广泛应用，要求加紧对自动调整理論及更普遍的技术科学分支——自动控制理論的研討。特别是，由于自动调整理論的古典方法，已經不足以用之来计算现代化的复杂的自动装置，因而，必将現代科学的另一些方法，吸收到自动控制理論中来。在自动控制理論中利用概率方法，是自动控制理論发展的必然阶段，因为用概率方法，能够计算各种随机扰动和随机干扰对于自动装置工作的影响。

由于任何自动控制系统，实际上恒在随机扰动和随机干扰作用下运行，因此，不用概率方法，便无法研究自动控制系统在真实条件下的工作情况。比如說，假定一架飞机起始受到某一扰动，随后又在理想化的均质大气中继续飞行，如果不用概率方法，我們就不可能较为全面地研究該飞机的稳定性和操纵性。实际上，飞机是处于风速和其他大气状态参数随机变化的不断作用下，在大气扰流中飞行的。因此，只有利用能计算随机因素对飞行影响的概率方法，才有可能研究飞机的真实动态及其操纵系統的工作情况。所以概率方法在自动控制理論中得到了迅速的发展，目前已成为自动控制理論中最有前途的发展方向之一。

所有作用在自动控制系统上的随机扰动和随机干扰，都是随时间而不断变化的，有时还受該瞬时决定系統状态的某些量的影响，亦即它們都是随机函数。因此，随机函数理論是概率論中能作为自动控制理論概率方法基础的唯一分支；同时，如科学发展中常見的那樣，技术科学——自动控制理論——的发展，也要求随机函数理論本身有所发展，特别是要求建立这一理論的各个新分支。

本书是供自动学和远动学领域中的广大科学工作者和工程师阅读的。因此,本书写作时,是按凡具有一般高等学校高等数学课程范围内的数学知识的读者均能阅读本书来考虑的。为此,在讲随机函数理论基础之前,不得不先介绍概率论方面的某些必要的知识。这样做之所以必要,还因为目前所有谈概率论的书籍中,还没有一本可以使工程师读者不过多钻研某些不必要的材料和数学细节,不使用超出工程师的一般数学水平的数学工具,而能获得所需要的概率论知识。由于本书中载有必要的概率论知识,就没有专门数学素养的工程师读者,可以不必先钻研其他概率论书籍,便能直接阅读本书;这样,便可大大缩短自动学领域中的工程师和专家们研究和掌握自动控制理论中概率方法所需的时间。

作者希望本书对推广及实际运用自动控制理论中的概率方法能有所裨益。

再 版 序

本书再版时曾作重大修改补充。近年来，在干扰作用下检测和再现信号的统计理论有了巨大发展。在这一领域中，已经研究了适用于各个技术部门，如自动学、无线电技术（包括电视）、火箭动力学、宇宙航行理论、气象学、地震学及其他应用科学的，按各种准则来确定最佳系统的有效的一般方法。在这一领域中新建立起来的上述方法，已经形成一种以随机函数规范表示法为基础的、统一的严格的理论。因此，初版中讲述最佳系统理论的有关章节，必须重新改写。在再版中，用最后三章来讲述最佳系统理论，以代替初版中的第十六章。这样一来，讲线性系统理论的第十二章也必须改写。此外，本版中还增添了大量的范例，用以说明这些方法在自动学和无线电技术中如何应用。其他修改部分，则是为了阐述得更加完善，并在不损害叙述的明确性的情况下，稍予压缩。

自动控制理论中应用的概率方法按其性质来说是复杂的，并需要采用现代化的计算技术。但是，现今，这一点不是广泛应用概率方法来计算自动系统的障碍。如果说从前只把工程实践中常用的、只要计算尺而不要任何计算装置的计算方法，叫做工程计算方法；那么在目前自动学和计算技术的世纪，则一切要求应用早已由工业部门试制成功并正在生产的各设计机构、工厂、科研单位均能使用的标准计算机的方法，都应算作工程计算方法。

自动装置和计算机的不断发展，单个设备自动化和单一过程自动化过渡到整个生产过程控制的全盘自动化，就使得自动控制系统及其职能日益复杂。简易的调整器正在被复杂的自动调整系统和自动组织系统所替代。从前自动装置不可能进行的运算，今天已可能运算；今天还不可能用于自动控制系统中的某些数学运算和逻辑运算，明天就可能成为实际系统工作的基础。因此，在评

价某种科学理論及其在技术中采用的可能性时，必須結合它的发展前景来考虑。例如，在评价本书的理論中所介紹的对加入系統中的信息作最佳处理的算法时，必須注意到这些算法在不久的将来，可能成为自动控制系统工作的基础，虽然目前的技术水平暂时还不足以实现这一可能。因此，不应该把由于采用統計理論，而使得数学运算较为复杂，看作是統計理論的一个缺点。

本书中随机函数理論及自动控制理論中应用的概率方法，基本上是根据作者各項著作 [47—63, 65—67] 讲述的。在这些著作中，针对自动学的任务，发展了随机函数应用理論的一般方法。书中，讲述自动控制系统准确度理論的基本方法，是随机函数的规范表示法。规范表示法是随机函数应用理論的基本的一般理論分析法，能用它解决一切关于自动控制系统統計分析和統計綜合的問題。因此，规范表示法能将用一般观点和普遍見解求解各种問題的所有研究自动控制系統的統計方法結合起来，所以，规范表示法可以作为构成自动控制系统严格統計理論的基础。

本书包括正文十八章，外加有补充材料及附录。前七章中介绍必要的概率論知識，在第七章中，还讲述了目前别的概率論教程中从未讲述过的关于信息論的基本知識。第八、九、十及十一諸章叙述随机函数理論基础。十二章以下的三章讲述自动控制系统准确度研究法。其中第十二章讲述綫性系統一般理論，十三章讲述随机函数綫性变換理論及綫性变換理論在研究綫性系統准确度方面的应用，十四章中探討了研究非綫性系統准确度的方法。第十五章論述按試驗結果确定随机变量和随机函数概率特性的基本方法。最后三章阐述最佳系統理論。其中第十六章讲述“按各种准则确定最佳系統”这个問題是怎样提出的，并导出了必要的方程。第十七章介绍确定最佳綫性系統的方程的解法。第十八章研究确定最佳非綫性系統的方法。补充材料中簡要叙述了綫性变換理論和积分方程理論的一些知識，以及应用最速下降法来求函数及泛函数极小值的方法。附录中载有自动控制理論概率方法实用中需要查用的公式和函数表。

为使对随机函数理論及自动控制理論中应用的概率方法能讲述得更全面和論証性更强,在书中的某些地方,作者不得不稍許超出一般高等学校高等数学課程的范围,利用了部分矩陣代数和积分方程理論. 这部分材料大都用小号鉛字排印,在閱讀时如略去不看,对实际掌握书中所述概率方法也无所影响.

鉴于有些讀者只希望尽快掌握如何在自动控制理論中实际应用概率方法,而不想深入钻研其詳細論証,因此作者认为,有必要对如何使用本书稍加介紹. 如果讀者只想了解(或在初讀时只想了解)最必需的起碼的概率論和随机函数理論知識,和尽快地学会如何将随机函数理論应用到自动学和无线电技术中去,那么,他可以先讀前三章(§ 13 及 § 23 除外),第八章(§ 55 除外),第九章(§ 62 及 § 64 除外),第十一章(§ 73、§ 75、§ 78、§ 79 及 § 80 除外),第十二章(§ 85 除外);然后,直接学习第十三章 § 88、§ 90—§ 94 及 § 97 中所讲的一維綫性系統准确度研究法,继而閱讀第十六章 § 118—§ 120、§ 122、§ 124、§ 125 及第十七章 § 127—§ 132、§ 134 中按最小均方誤差准則确定最佳一維綫性系統的方法. 接着可閱讀第十四章 § 99—§ 105 中讲述的利用綫性化方法研究非綫性系統的准确度,第十五章中讲述的按實驗結果确定随机变量和随机函数的特性的方法,及第十八章 § 140、§ 141 及 § 143 中所讲确定最佳非綫性系統的方法. 对于想探討多維綫性系統准确度研究方法的讀者,則除上述章节外,还需閱讀第九章的 § 62,第十章,第十一章的 § 73、§ 78 及 § 79,第十二章的 § 85,第十三章的 § 89、§ 95 及 § 96 及第十七章的 § 135. 最后,对于想較全面地钻研非綫性系統准确度研究方法和确定最佳系統的方法的讀者,則除小号鉛字排印的各节外,书中全部材料都必須閱讀. 小号字排印的各节,是供想了解书中所述随机函数理論和自动控制系統統計动力学方法的数学論証的讀者閱讀的.

作者希望本书对各技术部門自动装置及生产自动化方面的科学工作者和工程师,及在工作中可能要研究由于随机扰动和随机干扰而引起畸变过程的无线电及其他部門的专家,均能有所裨益.

三 版 序

本书第三版中未作重大修改。只对发现的刊誤作了更正，和作了一些零星修改。此外，修改了 § 60 和 § 62 末对规范展开式收敛的证明，以使其更为完善，并改写了阐述平稳随机函数分谱論的 § 76、§ 77、§ 78 及 § 79 諸节。

目 录

初版序摘要	(iii)
再版序	(v)
三版序	(viii)
第一章 事件的概率及其性质	(1)
§ 1. 随机现象, 概率论研究的对象	(1)
§ 2. 概率论的实验基础, 事件的频率及概率	(5)
§ 3. 频率加法定理, 概率加法原理	(8)
§ 4. 条件频率和条件概率, 不独立事件和独立事件	(10)
§ 5. 全概率公式, 贝叶斯公式	(12)
§ 6. 重复实验	(14)
第二章 随机变量	(17)
§ 7. 分布函数	(17)
§ 8. 概率密度	(21)
§ 9. 脉冲函数的应用及概率密度概念的推广	(22)
§ 10. 随机变量的矩, 数学期望、方差及均方差	(30)
§ 11. 正态分布律	(34)
§ 12. 泊松分布律	(38)
§ 13. 分布律的近似解析表示式	(43)
第三章 随机矢量	(48)
§ 14. 随机矢量的分布函数	(48)
§ 15. 随机矢量的概率密度	(51)
§ 16. 条件分布函数及条件概率密度	(55)
§ 17. 二维随机矢量的矩, 相关矩及相关系数	(62)
§ 18. 多维随机矢量的矩, 随机矢量的相关矩阵	(66)
§ 19. 复随机变量的数学期望, 数学期望的性质	(69)
§ 20. 复随机变量的方差及相关矩, 方差及相关矩的性质	(71)
§ 21. 化随机矢量为具有不相关分量的随机矢量	(76)

§ 22.	二維正态分布律	(78)
§ 23.	多維正态分布律	(80)
§ 24.	随机变量的平方次逼近	(89)
第四章	随机变量的特征函数	(96)
§ 25.	随机标量的特征函数	(96)
§ 26.	用特征函数列写的概率密度表示式	(99)
§ 27.	特征函数与随机变量各阶矩間的联系	(102)
§ 28.	随机矢量的特征函数	(104)
§ 29.	随机矢量特征函数与矩的联系	(107)
第五章	随机变量的函数	(110)
§ 30.	随机变量函数的矩的确定	(110)
§ 31.	用綫性化方法近似計算随机变量非綫性函数的矩	(112)
§ 32.	随机变量的函数的分布律	(114)
§ 33.	随机变量函数分布律的另一求法	(118)
§ 34.	随机变量之和的分布律	(124)
§ 35.	应用特征函数求随机变量函数的分布律	(126)
第六章	大数定律	(129)
§ 36.	車貝雪夫不等式	(129)
§ 37.	馬尔可夫定理及車貝雪夫定理. 概率收斂的形式	(130)
§ 38.	泊松定理及伯努里定理	(134)
§ 39.	雅普諾夫定理及拉普拉斯定理	(135)
§ 40.	雅普諾夫定理的証明	(138)
第七章	信息論的基本概念	(144)
§ 41.	关于随机現象观察結果不定性的量度	(144)
§ 42.	离散型随机变量的熵	(148)
§ 43.	連續型随机变量的熵	(150)
§ 44.	信息及其量度	(157)
§ 45.	均匀分布的熵及正态分布的熵	(162)
§ 46.	离散型随机变量熵的唯一性的确定	(166)
§ 47.	有限随机序列的熵	(169)
第八章	随机函数	(177)
§ 48.	随机函数的定义. 随机函数的分布律	(177)

§ 49. 随机函数的数学期望及相关函数. 二个随机函数的互相关函数	(188)
§ 50. 随机函数的矩	(196)
§ 51. 相关函数的性质	(198)
§ 52. 随机函数的加法	(201)
§ 53. 随机函数的微分	(203)
§ 54. 随机函数的积分	(209)
§ 55. 随机函数平均值的极限定理. 埃尔古德定理	(213)
第九章 随机函数的规范展开式	(217)
§ 56. 随机函数的两种形式的规范展开式	(217)
§ 57. 坐标函数的一般公式	(219)
§ 58. 离散点系随机函数的规范展开式	(222)
§ 59. 离散点系随机函数的规范展开式的实际构成法	(226)
§ 60. 随机函数在自变量给定变化区域内的规范展开式	(230)
§ 61. 随机函数在自变量给定变化区域内的规范展开式的实际构成法	(240)
§ 62. 随机函数规范展开式的一般形式	(245)
§ 63. 按相关函数规范展开式来构造随机函数的规范展开式	(249)
§ 64. 相关函数规范展开式的一些构造法	(252)
§ 65. 获得随机函数近似规范展开式的方法	(256)
§ 66. 随机函数的级数展开式	(258)
§ 67. 随机函数的积分规范表示式	(263)
第十章 矢量随机函数	(269)
§ 68. 化矢量随机函数为标量随机函数	(269)
§ 69. 矢量随机函数的数学期望及相关函数	(270)
§ 70. 矢量随机函数的规范展开式	(273)
§ 71. 矢量随机函数的积分规范展开式	(278)
第十一章 平稳随机函数	(280)
§ 72. 平稳随机函数的定义	(280)
§ 73. 平稳矢量随机函数	(285)
§ 74. 平稳随机函数的埃尔古德性	(286)
§ 75. 对相关函数埃尔古德的平稳随机函数	(288)

§ 76. 平稳随机函数的积分规范表示式, 平稳随机函数的谱密度	(290)
§ 77. 平稳随机函数的近似规范展开式	(299)
§ 78. 平稳矢量随机函数的积分规范表示式	(301)
§ 79. 平稳矢量随机函数的近似规范展开式	(307)
§ 80. 可化为平稳的随机函数	(309)
第十二章 动力系统的特性	(316)
§ 81. 函数经动力系统的变换, 运算子的概念	(316)
§ 82. 作为动力系统一般特性的运算子	(320)
§ 83. 一维线性系统的权函数	(325)
§ 84. 由微分方程描述的一维线性系统	(335)
§ 85. 多维线性系统的权函数	(347)
§ 86. 线性系统的其他特性	(356)
§ 87. 平稳线性系统	(362)
第十三章 线性系统准确度的研究	(368)
§ 88. 随机函数的线性变换	(368)
§ 89. 矢量随机函数的线性变换	(372)
§ 90. 研究线性系统准确度的一般方法	(374)
§ 91. 计算平稳线性系统稳态系统误差的方法	(387)
§ 92. 具有一个平稳随机扰动的一维平稳线性系统准确度的研究	(389)
§ 93. 具有一个非平稳随机扰动的一维平稳线性系统准确度的研究	(398)
§ 94. 近似于平稳的一维线性系统准确度的研究	(400)
§ 95. 多维平稳线性系统准确度的研究	(408)
§ 96. 近似于平稳的多维线性系统准确度的研究	(410)
§ 97. 随机输入扰动的一类积分规范表示式	(412)
§ 98. 随机函数经随机线性积分运算子的变换	(418)
第十四章 非线性系统准确度的研究	(422)
§ 99. 非线性系统准确度的研究方法	(422)
§ 100. 运算子线性化方法的一般原理	(425)
§ 101. 非线性系统方程的直接线性化	(427)
§ 102. 非线性系统方程借助于规范展开式的线性化	(430)
§ 103. 统计线性化方法	(442)

§ 104.	应用統計綫性化方法研究平稳系統的准确度	(445)
§ 105.	应用統計綫性化方法研究非平稳系統的准确度	(457)
§ 106.	可化为綫性的、随机函数的变换	(461)
§ 107.	随机函数的非綫性积分变换	(471)
§ 108.	应用规范展开式方法研究随机函数的非綫性变换	(478)
第十五章 按实验結果确定随机变量和随机函数的特性 .. (484)		
§ 109.	按实验結果确定概率特性問題的性質	(484)
§ 110.	事件概率、分布函数及概率密度的确定	(485)
§ 111.	随机变量的数学期望和方差的确定	(487)
§ 112.	随机变量相关矩的确定	(491)
§ 113.	对用实验方法确定概率特性的准确度的估計	(496)
§ 114.	埃尔古德平稳随机函数数学期望及相关函数的确定	(499)
§ 115.	平滑随机函数的实现来确定随机函数的数学期望	(506)
§ 116.	估計理論的基本概念	(516)
§ 117.	用最大似然方法求随机函数数学期望的估計	(527)
第十六章 最佳系統理論的任务 .. (533)		
§ 118.	确定最佳系統的任务	(533)
§ 119.	最佳准則	(541)
§ 120.	最小均方誤差的一般条件	(550)
§ 121.	誤差数学期望和方差給定函数取极值的一般条件	(552)
§ 122.	确定最佳綫性运算符的方程式	(559)
§ 123.	确定最佳非齐次綫性变换的方程式	(568)
§ 124.	确定最佳綫性运算符方程的一般分析	(570)
§ 125.	确定最佳綫性系統权函数的方程式	(578)
§ 126.	确定最佳非綫性积分运算符的方程式	(587)
第十七章 确定最佳綫性系統的方法 .. (593)		
§ 127.	在白噪声作用下最佳一維綫性系統的确定	(593)
§ 128.	确定最佳一維綫性系統权函数的一般公式	(598)
§ 129.	确定观察区間为无限大和輸入为平稳随机函数时的最佳綫性系統的公式	(603)
§ 130.	当輸入扰动与干扰以綫性微分方程联系时最佳綫性系統的确定	(611)

§ 131.	当輸入扰动与白噪声之間成綫性微分方程关系时确定最佳綫性系統方法的其他方案	(626)
§ 132.	輸入扰动是具有有理分式譜密度的平稳随机函数的情况	(637)
§ 133.	用积分规范表示法确定一般情况下最佳綫性运算符	(648)
§ 134.	用规范展开式法确定最佳一維綫性系統	(654)
§ 135.	用规范展开式方法确定一般情况下最佳綫性运算符	(664)
§ 136.	在一些特殊情况下确定最佳綫性运算符	(671)
§ 137.	对最小均方誤差准则解的唯一性和逼近最佳綫性运算符的估計	(677)
第十八章	确定最佳非綫性系統的方法	(680)
§ 138.	确定可化为綫性类中的最佳运算符	(680)
§ 139.	求最佳非綫性积分运算符	(685)
§ 140.	按最小均方誤差准则确定所有可能运算符类中的最佳运算符	(690)
§ 141.	按最小平均风险准则确定任意亏损函数时的最佳运算符	(697)
§ 142.	按最小平均风险准则确定某些特殊情况下的最佳运算符	(715)
§ 143.	信号和干扰为正态分布时的情况	(719)
§ 144.	按最小平均风险准则确定最佳运算符的一般方法	(726)
§ 145.	亏损函数是泛函,而信号和干扰为正态分布时的情况	(741)
补充材料		(746)
I.	綫性变换理論的一般知識	(746)
II.	具有对称核的綫性积分方程理論的一些知識	(752)
III.	用最陡下降法求函数或泛函的极小值	(771)
附录		(779)
	公式表及函数表	(779)
参考文献		(792)

第一章 事件的概率及其性质

§1. 随机现象. 概率论研究的对象

人們在自己的实践活动中到处都会碰到随机现象。例如，从远处射击一个较小目标时，有可能命中目标，也有可能击不中目标。每次射击结果就是随机的。人們乘坐飞机时，常感到所谓“颠簸”，产生这种“颠簸”的原因，是由于在飞机上有不平稳大气的随机作用。任何测量恒带有不同程度的误差，因为绝对准确地测量是不存在的。如对某一现象进行实验研究，并将其结果整理为图解关系曲线，就能看出，如果实验的点相当多的话，诸实验点永远不会落在同一条曲线上，而总是充满某一区域，也就是说，将发生实验点的随机散布现象。

在各个科学部门都极为发达的现阶段，必须研究随机现象，以期学会预见随机因素的作用，并在实践活动中考虑到它们的影响。例如，为了能正确组织射击，使得虽然有許多次射不中目标，但一定有一次能够准确命中目标，而且弹药消耗量最少，就必须计算随机因素的影响。研究不平稳大气对飞机的随机作用，可使我们在设计飞机时，能正确选择飞机和飞机操纵机构的各个参数，从而使“颠簸”现象对飞行的影响减至最小。概率论就是撇开各种随机现象的具体属性，来研究各种随机现象的普遍规律性，并给出定量地估算随机因素对各种现象影响的方法的一门数学学科。为了解概率论方法的实质和明确概率论方法所解决的问题的范围，需要弄清下面两个问题：第一个问题是确定什么样的现象叫随机现象；第二个问题是在所有随机现象中，确定属于概率论所研究的随机现象的范围。

辩证唯物主义认为，无原因的现象是不存在的。人类世界中

一切事物和現象都是相互联系而又相互制約的。这就是辯証唯物主义的基本規律之一——現象普遍联系規律。按照这个規律，每一被观察的現象，都是和无数多的其他現象有因果联系的，因而它的发展也就取决于无数多的因素。所以，从原則上讲，是不可能探溯出决定着被研究的現象发展过程的全部原因，及建立起該現象和与其关系越来越远的各个因素之間的全部联系。人們只可能弄清和探溯出被研究現象的有限个联系。任何时候，总是有无数无法加以考虑的、对被研究現象的发展有某种影响的因素存在。因此，在对同一現象进行多次观察时，我們將发现在这現象中，除每次观察时都同样出現的共性特征外，还会出现每次观察該現象时所独具的、在其他各次观察时不会重复出現的个性特征。被研究的現象每次都以不同方式进行着，并且每次观察的結果与其他各次观察的結果略有出入。

在研究每一給定的現象时，很自然的是将其全部联系分为两类：一类是主要联系，即在多次观察給定現象时，决定着該現象进行过程中共性特征的联系；另一类是次要联系，即在每次观察給定的現象时，对該現象的进行有着不同影响的那些联系。主要联系决定着給定現象任何时候都固有的、在每次观察中都表現出来的規律性；次要联系則决定各次观察时給定現象发展的相异性，由于这种相异性，使得多次观察該現象的結果中产生某种差异，使得規律性有某种偏差。这种由于被研究現象的无数次要联系而引起的离开規律性的偏差，我們就叫做**随机現象**。

每一单个次要联系对于給定現象发展的影响可能是极为微小的，但是，由于这些次要联系总是无数多的，因而，它們总的影响就往往很大。在某些場合下，无数次要联系的总和影响，常常大到决定現象的整个发展，結果使現象的整个发展沒有了任何可見的規律性。悬浮于液体中的小固体质点的运动，即所謂布朗运动就是一个例子。在大量运动着的液体分子的撞击作用下，质点的运动完全陷入混乱，沒有任何明显的規律性。在类似的現象中，随机性本身就是規律性。