同济大学数学辅导系列丛书

概率统计复习和解题指导

GAILU TONGJI FUXI HE JIETI ZHIDAO

（供本科生和硕士研究生入学考试复习使用）

同济大学工程数学教研室 编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计复习和解题指导/同济大学工程数学教研室编著.—上海:同济大学出版社,2000.6 (2001.2 重印)

(同济大学数学辅导系列丛书/徐建平主编)

ISBN 7-5608-2152-9

Ⅰ.概… Ⅱ.同… Ⅲ.①概率论-高等学校-解题 ②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 26261 号

同济大学数学辅导系列丛书

概率统计复习和解题指导

同济大学工程数学教研室 编著

同济大学出版社出版发行

(上海四平路 1239 号)

(邮编 200092 电话 65981474)

全国新华书店经销

苏州市望电印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:10.375 字数:300 千字

2000 年 6 月第 1 版 2001 年 2 月第 2 次印刷

印数:6 001—12 000 定价:16.00 元

ISBN 7-5608-2152-9/O·180

前　　言

概率论是一门研究随机现象统计规律性数量关系的数学学科，而数理统计是研究如何有效地收集整理和分析受随机影响的数据，并作出统计推断、预测或者决策的一门学科，它是以概率论为基础的.

由于“概率论和数理统计”在解决实际问题上呈现出来的日益重要性，目前在高等学校普遍设立了这一门课程，而且作为理、工、医、农等许多学科研究生数学入学考试的一个重要组成部分.因此，帮助学员掌握和应用这门学科的知识是一个十分有意义的工作.本书是为正在学习该课程的学生及准备报考研究生的学员复习和提高概率论与数理统计解题能力的需要而编写的.

与其他数学学科有所不同的是，在概率论中，基本概念的深入理解占有极大的比重，而其中解题的方法和技巧并不多.其涉及的计算难点除了古典概率、几何概率以外，就是有关积分中积分限的选定.因此，在本书中专门设立了“概念的引入，背景和内涵”这一部分内容，以帮助读者深入理解基本概念.事实上，在学习过本课程的读者中，对“什么是随机变量”，“为什么要引入随机变量”不知所云的人仍不在少数，如何利用随机变量解决实际问题就更困难了.为了更进一步理解概念，我们通过“基本例题及其分析”以达到这一目的.而“综合例题及其分析”涉及多个概念的综合运用，目的在于提高读者的解题能力.为了使读者能在今后进一步学习或在工作中运用概率论的知识，我们尽量选用一些有实际背景的例题，以拓宽学员的知识面.

数理统计是一门应用性十分强的学科，学好这部分知识的目的在于培养读者以“统计思想”去思考和用“统计方法”去处理在工作中遇到的随机数据.因此，在学习数理统计时一定要理解常用统

计方法所依据的“统计思想”，而决不是背几个公式代入数据那么简单.只有正确理解了“统计方法”的背景和内涵才会正确地运用公式，以得到正确的统计推断.

本书还附有不少习题并附有简答.其中许多例题和习题是选自近年来数学一、数学三、数学四的硕士研究生入学考试试题，还有一些是平时教科书中难度较高和解题中易犯错误的习题，也有一些是编者根据大纲要求和实际生活的问题自编的习题.

对于参加“数学四”的硕士研究生入学考试的考生统计部分可忽略.但对于“数学一”，“数学三”，“数学四”的考生而言，概率论的考试大纲是相近的，都可以把本书作为参考书用以复习及提高解答“概率论和数理统计”习题的能力.

本书的主要内容曾多次在考研复习班上讲授，根据学员的意见又作了详尽的修改，补充了大量的例题和习题.

本书由同济大学工程数学教研室陈兰祥主编，参加编写的有陈兰祥、钱志坚同志，此外，赵宏、马逸也参加了部分初稿的撰写工作.

在编写该书的过程中得到了广大同仁和同济大学出版社的大力支持，李炳钊副编审对本书的编排提出了许多建议，特此表示感谢.

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请读者指正.

编者

2000年3月于同济大学

目　　录

第一部分　基本概念及基本例题分析

第二部分 综合例题及其解答

第三部分　习题及其简答

第一部分　基本概念及基本例题分析

第一章　随机事件及其概率

§1.1　复习及考试要求

1）理解随机试验，样本空间和随机事件的概念，掌握随机事件间的关系及运算.

2）理解概率的定义，掌握概率的基本性质，能计算古典概型和几何概型的概率，能用概率基本性质计算随机事件的概率.

3）理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式.

4）掌握全概率公式和贝叶斯公式，能计算较复杂随机事件的概率.

5）理解随机事件独立性的概念，能应用事件独立性进行概率计算.

6）理解随机试验独立性的概念，掌握 n 重贝努里试验中有关随机事件的概率计算.

§1.2　内容提要及有关公式

一）基本法则和排列组合

1）加法法则

如果完成某项事件有 m 种不同的途径，而每条途径有 n_i $(i=1,\cdots,m)$种不同方法，那么，完成该事件共有 $n_1+\cdots+n_m$ 种

不同的方法.

2）乘法法则

如果完成某一事件必须经过 m 个阶段才能完成，而每一阶段有 n_i 种不同的方法，那么，完成该事件共有 $n_1 \times \cdots \times n_m$ 种不同的方法.

3）排列

从 n 个不同元素中，任意取出其中 r 个（$0 \leqslant r \leqslant n$）不同元素按照一定顺序排成一列，则该列称为从 n 个不同元素中取 r 个不同元素的一个排列. 所有不同排列的总数为

$$P_n^r = n! / (n-r)!$$

若参加排列的元素允许重复，则称为重复排列，所有重复排列的总数为 n^r.

4）组合

从 n 个不同元素中任意抽取 r 个元素（$0 \leqslant r \leqslant n$）构成一组（不考虑组内 r 个元素的排列次序），称为从 n 个元素中取出 r 个元素的一个组合，所有不同组合的总数为

$$C_n^r = n! / r!(n-r)!$$

二）随机试验和样本空间

具有下列三个特征的试验称为随机试验 E：

1）在相同的条件下，试验可以重复地进行；

2）试验的结果不止一种，而且事先可以确知试验的所有结果；

3）在进行试验前不能确定出现哪一个结果.

称试验的结果为基本事件或样本点，用 ω 表示；由全体基本事件构成的集合为基本事件空间或样本空间，记为 U.

三）随机事件

在随机试验中，把一次试验中可能出现也可能不出现，而在重

复独立试验中具有某种统计规律性的事情称为随机事件(简称事件). 它是样本空间的一个子集,随机事件 A 发生当且仅当该子集中的某一样本点 ω 发生.

通常把必然事件(记为 U)和不可能事件(记为 ϕ)看作特殊的随机事件.

四)随机事件的关系及运算

随机事件之间有下列关系及运算:

1)包含关系　如果事件 A 发生则事件 B 一定发生,即属于事件 A 的每一样本点都属于事件 B,称事件 B 包含事件 A,记为:$B \supset A$.

2)相等关系　如果事件 A 和事件 B 满足 $A \supset B$ 和 $B \supset A$,即事件 A 和事件 B 同时发生和不发生,称事件 A,B 相等,记为 $A=B$.

3)互不相容　如果事件 A 和 B 不能同时发生,即它们的积事件是不可能事件,称事件 A 与 B 互不相容(或互斥),记为 $AB=\phi$.

4)互逆　如果事件 A 发生必然导致事件 B 不发生,反之亦然,称事件 A 和 B 互逆(或互余),此时称 B 是 A 的逆事件,记为 $B=\bar{A}$.

5)事件的和　"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与 B 的和事件(或并事件),记为 $A\cup B$. 它可推广到 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

6)事件的积　"事件 A 和 B 同时发生"的事件称为事件 A 与 B 的积事件(或交事件),记为 $A\cap B$(或 AB). 它可推广到 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

7)事件的差　"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称事件 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$(或者 $A\bar{B}$).

事件的运算满足德摩根法则，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad （和之逆 = 逆之积）$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad （积之逆 = 逆之和）$$

事件的运算还满足下列规则：

1）$A \cup B = B \cup A$（交换律）；

2）$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$（结合律）；

3）$A \cup A = A$； 4）$A \cup \overline{A} = U$；

5）$AB = BA$（交换律）； 6）$(AB)C = A(BC)$（结合律）；

7）$AA = A$； 8）$A\overline{A} = \phi$；

9）$A(B \cup C) = AB \cup AC$（分配律）；

10）$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$（分配律）.

五）概率和条件概率的定义

1）概率的古典定义

我们把具有：ⅰ）试验的结果总数是有限的；ⅱ）每个试验结果出现的可能性是相同的这两个特点的随机试验称为古典概型的随机试验.

定义 在古典概型随机试验中，随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{U\text{ 中包含的基本事件总数}} \tag{1.1}$$

2）概率的几何定义

我们把具有：ⅰ）样本空间 U 是一个几何区域（直线上的区间，平面或者立体上的区域）；ⅱ）每个试验结果出现的可能性是相同的（即试验结果落在 U 中任一区域的可能性与该区域的几何测度成正比）这两个特点的随机试验称为几何概型的随机试验.

定义 在几何概型随机试验中，随机事件 A 发生的概率定义

为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何测度}}{U\text{ 的几何测度}} \tag{1.2}$$

其中,几何测度可以是长度、面积或体积.

3) 概率的统计定义

独立地重复进行 n 次随机试验,设随机事件 A 发生的次数为 m,称 $f_n=\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

定义 在 n 次重复独立试验中,事件 A 发生的频率具有稳定性,即它在某一数 p 附近波动,且当 n 越大时,波动幅度越小,则定义频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率,即 $P(A)=p$.

4) 概率的公理化定义

定义 设 E 是一个随机试验,U 为它的样本空间,以 E 中所有随机事件组成的集合为定义域,对于任一随机事件 A,规定一个实数 $P(A)$,如果 $P(A)$满足下列三个公理:

(1) $P(A)\geqslant 0$ (非负性);

(2) $P(U)=1$ (规范性);

(3) 如果事件 $A_1,A_2\cdots$互不相容,那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \quad \text{(可列可加性)} \tag{1.3}$$

则称 $P(A)$是事件 A 的概率.

5) 条件概率的定义

设 A 与 B 是两个随机事件,其中 $P(B)>0$,规定

$$P(A|B)=P(AB)/P(B) \tag{1.4}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

在同一条件下,条件概率具有概率的一切性质.

六) 概率的计算公式

利用概率的公理化定义可推出下列概率计算公式:

1) 加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.5}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.6}$$

一般地

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\sum\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n) \tag{1.7}$$

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\quad\text{(有限可加性)}$$

2) 乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \tag{1.8}$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB) \tag{1.9}$$

当 A,B,C 相互独立时,$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

3) 求逆公式

$$P(\bar{A})=1-P(A) \tag{1.10}$$

4) 求差公式

$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.11}$$

当 $B\subset A$ 时,$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

关于条件概率有相同的计算公式,如

$$P(\bar{A}|D)=1-P(A|D) \tag{1.12}$$

$$P(A-B|D)=P(A|D)-P(AB|D) \tag{1.13}$$

$$P(A\cup B\cup C|D)=P(A|D)+P(B|D)+P(C|D)-P(AB|D)$$
$$-P(AC|D)-P(BC|D)+P(ABC|D)\quad(1.14)$$

七）全概率公式和贝叶斯公式

如果事件组$[A_1\cdots A_n]$满足：

1）$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=U$；

2）$A_iA_j=\phi(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$.

则称事件组$\{A_i\}$构成了 U 的一个划分.

定理 如果事件组$\{A_i\}$构成 U 的一个划分，则对任一事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)\tag{1.15}$$

该公式称为**全概率公式**.

定理 如果事件组$\{A_i\}$构成 U 的一个划分，则对任意事件 B（$P(B)>0$），在事件 B 发生条件下事件A_i 发生的条件概率为

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\tag{1.16}$$

该公式称为**贝叶斯公式**.

八）随机事件的相互独立性

定义 如果随机事件 A，B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B)\tag{1.17}$$

称**事件 A 和 B 相互独立**.

如果事件组$\{A_i\quad i=1,\cdots,n\}$满足对任意两个事件 A_i，A_j 有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad(i\neq j,\quad i,j=1\cdots n)\tag{1.18}$$

称事件组$\{A_i\}$**两两相互独立**.

如果事件组$\{A_i \quad i=1,\cdots,n\}$,对任意 $k(1<k\leqslant n)$,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$.则

$$P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.19}$$

成立.

则称**事件组**$\{A_i\}$**相互独立**.

定理 如果 $P(A)>0$(或 $P(B)>0$).则事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B\mid A)=P(B)$(或 $P(A\mid B)=P(A)$).

定理 若事件 A 和 B 相互独立,则

1) 事件 A 与事件 $\bar{B}$ 也相互独立;

2) 事件 $\bar{A}$ 与事件 B 也相互独立;

3) 事件 $\bar{A}$ 与事件 $\bar{B}$ 也相互独立.

九) 随机试验的相互独立性,贝努利概型

定义 对于若干个随机试验 $E_i(i=1,\cdots,n)$,设 A_i 是随机试验 E_i 中任一随机事件,如果

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{1.20}$$

则称**随机试验** $E_i(i=1,\cdots,n)$是**相互独立**的.

如果在一次随机试验中,仅关心随机事件 A 是否发生,即只考虑 A 和 $\bar{A}$ 两个试验结果,称这种试验为贝努里试验.如果重复独立进行 n 次贝努里试验,将它们合在一起称为 n-重贝努里试验.

定理 设在一次贝努里试验中事件 A 发生的概率为 p,则在 n-重贝努里试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P(A\text{ 发生 }k\text{ 次})=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n) \tag{1.21}$$

该概率又称二项概率.

§1.3 概念的引入、背景及内涵

一) 随机事件的概念

通常将随机事件理解为样本空间的一个子集,这是正确的.更严格地说,随机事件只要满足"随机事件经有限或可列个的积、和或逆运算后生成的事件仍是随机事件"的原则即可.

概率论的一个中心问题就是求随机事件的概率.它包含两重意思:

1) 将一个较复杂的事件用已知的简单随机事件的积、和、逆的运算来表示;

2) 根据概率公式通过已知简单随机事件的概率进行计算.而1)往往是正确解题的关键,看似容易,却极易犯错误.对此需注意以下几点:

(1) 如果事件 A 的发生有多个条件,而每个条件发生均导致 A 发生,则应用"和"运算;

(2) 如果事件 A 只有在多个条件同时发生时才会发生,则应用"积"运算;

(3) 在求和事件概率时,必须将和事件分解成若干个互不相容的事件后才能将各自概率直接相加(或利用加法公式),这样比较麻烦,实用上常考虑求它的逆事件,可以使问题趋于简化.

另外在解题时,利用集合的"文氏图"能帮助我们全面考虑问题而不致遗漏.

二) 随机事件的运算

有些人往往把随机事件的"积"、"和"理解成数的"积"、"和",认为它们性质差不多,都满足交换律、结合律和分配律,这种想法

是不对的.如 $A\cup A\cdots\cup A=A, A\cap A\cdots\cap A=A$ 与数的运算并不一致.又如,$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$,但对于数的运算 $a+bc\neq(a+b)\cdot(a+c)$.如混淆了二者的异同,就会出错.

三) 随机事件"互不相容"与"独立"概念的差异

随机事件互不相容是指 A, B 满足 $AB=\phi$,它与概率性质无关.而随机事件 A, B 独立是指 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立,是集合的概率特性,"互不相容"与"独立"之间并无因果关系.

事实上,若事件 A, B 互不相容且独立,则由

$$P(A)P(B)=P(AB)=P(\phi)=0$$

知道事件 A 和 B 中至少有一个概率为 0(参考本章例 10).

四) 古典概型解题的"分步实施法"

按古典概率定义,要求得到事件 A 的概率,必须正确求得样本空间 U 的基本事件总数和 A 中基本事件数.通常,随机试验可以通过几个不同的阶段逐步进行来完成."分步实施法"的含义即正确地找到这几个阶段,并对每阶段的结果数予以正确的计算,然后利用乘法法则即可找到 U 的基本事件总数.至于 A 中基本事件数也可以用同样的方法计算.这种方法化"复杂"为"简单",不易产生多算或漏算的错误(参考本章例 13,例 14).

至于计数时用"排列"还是用"组合",关键在于结果是否与排序有关,有时二者都能用.必须指出,一定要"同排列"或"同组合",即计算 U 和 A 的基本事件数时都用排列或者都用组合,不可混用,否则多半出错(参考本章例 13,例 14).

五) 几何概型解题的"坐标法"

几何概型题目一开始往往令人无从下手,对此必须先将它们变成"几何图形"."坐标法"的含义即根据题意把试验结果用坐标