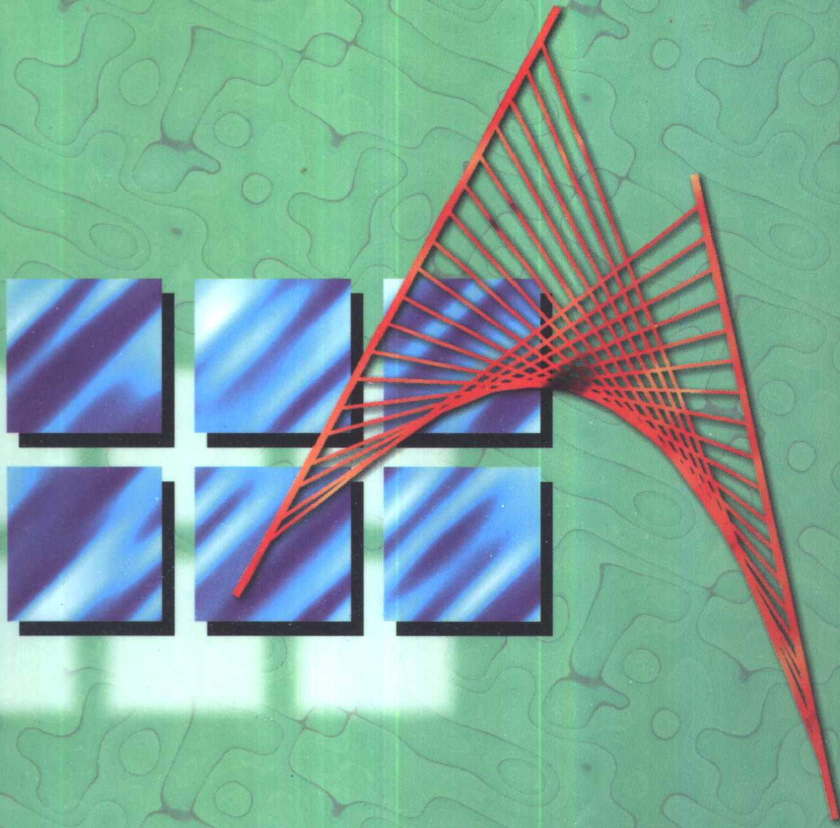
近代分析数学

应用基础

潘　志　编著



jindai fenxi shuxue yingyong jichu

中国矿业大学出版社

近代分析数学应用基础

潘 志 编著

中国矿业大学出版社

内容提要

全书共八章，主要内容包括集合与映射，勒贝格测度与勒贝格积分，几类常用抽象空间的概念和性质，有界线性算子和线性泛函的基本理论，谱分析，变分法，傅里叶分析与小波分析等．其中前六章的内容参照国家教委“工学硕士研究生应用泛函分析教学基本要求”编写．

本书从实数与函数讲起，起点较低、深入浅出、取材广泛、系统简练．具有高等数学和线性代数等有关知识的读者便可阅读．

本书可作为工科研究生及高年级本科生的选修课教材；也可作为应用数学、计算机软件等专业同类课程的教材或参考书；还可供工程技术人员和非数学专业的科技工作者自学参考之用．

责任编辑　陈玉和
责任校对　杜锦芝
技术设计　周俊平

图书在版编目(CIP)数据

近代分析数学应用基础/潘志编著．—徐州：中国矿业大学出版社，1993.12（2000.8 重印）
ISBN 7-81040-079-7

Ⅰ．近…　Ⅱ．潘…　Ⅲ．数学分析　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 38793 号

中国矿业大学出版社出版发行
（江苏徐州　邮政编码 221008）
出版人　解京选
中国矿业大学印刷厂印刷　新华书店经销
开本 787×1092　1/16　印张 14.25　字数 346 千字
1993 年 12 月第 1 版　2000 年 8 月第 2 次印刷
印数 2001～4000 册　　定价 19.80 元

序　言

20 世纪数学发展的特征之一是探求一般性和统一性，它不再只是孤立地研究各个函数和方程，而是把这些对象划归为不同类型的总体(无限维空间)予以研究，泛函分析就是以无限维空间及映射(算子)作为研究对象的一门现代数学分支. 它起源于经典的数学物理边值问题和变分问题(泛函的极值问题)，后来又概括了经典数学分析的许多重要概念和方法，特别是受到了量子物理学、现代力学和现代工程技术的推动，于本世纪 20 到 40 年代发展成为一门独立的数学学科，现已成为现代数学的三大研究课题(泛函分析、抽象代数、拓朴学)之一. 泛函分析的最主要特点是理论和方法具有高度的抽象性，它综合地运用分析的、代数的、几何的方法研究分析数学、现代物理和现代工程技术中的许多问题，应用非常广泛，它不仅是数学工作者不可缺少的一门知识；而且它的许多概念、符号和方法在现代技术科学中亦被广泛采用，是解决实际问题的有力工具. 因此，在科学技术高速发展的今天，工科研究生、高年级本科生以及工程技术人员掌握近代分析数学基础知识，提高数学素养，是非常必要的.

泛函分析是本书最主要的内容. 当然，由比较直观的有限维空间到研究无限维空间要遇到一定的困难. 但是德国数学家康托(Cantor)在 19 世纪 80 年代创立了无限集合理论，并证明了有理数集和正整数集所含元素一样多，这为研究无限维空间打开了方便之门.

最早出现的无限维空间模型，是由德国数学家希尔伯特(Hilbert)以及他的学生、德国哥廷根学派的施密特(Schmidt)于 1906 年到 1909 年期间创立的，即现今的希尔伯特空间. 它是泛函分析的重要组成部分.

泛函分析研究的另一类重要空间是赋范线性空间，其基本概念和理论形成于 1920 年到 1922 年之间，它是由波兰数学家巴拿赫(Banach)等人创立的. 尽管他们的工作几乎是一致的，但是在这些泛函分析奠基人中，巴拿赫的影响最大. 他在 1922 年的重要论文《抽象集合上算子及其在积分方程上的应用》为泛函分析的发展奠定了基础，1932 年他出版的名著《线性算子理论》统一了当时泛函分析的众多成果，使泛函分析成为一门理论完整的学科. 巴拿赫提出的完备赋范线性空间，后来称之为巴拿赫空间. 有关巴拿赫空间上的一系列定理以及线性算子的理论，不仅成为泛函分析的最重要组成部分，而且还是解微分方程、积分方程、三角级数等问题的有力工具.

在泛函分析研究的无限维空间中，p 次($1\leqslant p<\infty$)勒贝格(Lebesgue)可积函数空间是具体的重要空间之一. 因此，在现代分析数学中必须将以往的黎曼(Riemann)积分代之以勒贝格积分，因为黎曼积分有着许多缺陷. 积分理论的进一步完善，归功于法国数学家勒贝格，他 1902 年创立了集合的勒贝格测度和可测函数的勒贝格积分. 这是积分学的一个巨大突破，于是实变函数论随之产生. 勒贝格的工作是对 20 世纪数学的一个伟大贡献，是现代分析数学的基础.

变分法是 17 世纪末在解决一些实际的泛函极值问题中发展起来的一个数学分支. 而且

随着泛函分析的发展变分法理论也在不断的发展，它已成为现代分析数学的一个重要部分，是解决现代物理、现代力学、最优控制以及其他一些实际问题的一个十分重要的方法.

另外，傅里叶分析，即傅里叶级数和傅里叶变换，是近代分析数学的中心内容，它在信号分析、图像处理等众多科学技术领域成为最重要的数学工具之一. 但在应用中发现傅里叶变换本身也存在不足之处. 1984 年地球物理学家 J. Morlet 在处理地质数据时首先提出了小波的概念，后来称之为小波变换，并成功地运用到地震信号分析之中. 它一出现就引起了广泛的关注，经过短短几年的发展，已形成了一个新的应用数学分支，即所谓的小波分析(Wavelet analysis). 小波分析是傅里叶分析发展史上的一个里程碑，在众多科学技术领域有着和将要有着广泛的应用，它被当作近几年来在数学工具和方法上的重大突破. 目前小波分析的理论和应用正处在蓬勃发展阶段，可以预料，不久将成为科技工作者们经常使用的又一个锐利数学工具.

本书共 8 章. 第 1 章补充了后继内容需要的一些数学分析知识；第 2 章简要介绍有关集合与映射的初步知识；第 3 章介绍勒贝格测度与勒贝格积分的基本概念和理论；第 4,5,6 章是本书的核心内容——泛函分析，主要讨论抽象空间(度量空间与度量线性空间)及有界线性算子的概念和理论；第 7 章变分法；第 8 章傅里叶分析与小波分析.

本书是作者根据多年的教学经验和积累的资料，并参考若干最新文献编写而成，编写的指导思想是力求在以下方面有所特色：① 做到起点低、深入浅出、循序渐进、穿插适量的例题、配备练习题，以适合于具有“高等数学”和“线性代数”基础的读者自学；② 做到重点突出、内容广泛、层次分明、系统简练，使读者花费不太多的时间和精力，能获得必要的近代分析数学基础知识；③ 力求全书概念表述准确、理论严谨、思路清晰、不失分析数学的特点. 使读者在掌握基本知识的同时，数学素养有所提高；④ 反映分析数学应用研究的前沿成果和方向，故而介绍了最新的数学分支——小波分析，目前有关这方面的书籍和文献起点较高，对于一般工科学生和工程技术人员来说难以接受，本书为希望了解和掌握小波分析基本知识的读者提供了方便.

本书全部内容约需讲授 80 学时；若只讲泛函分析的内容，即第 2,3,4,5,6 章约 60 学时；已学过数学分析的读者，第 1 章可跳过；第 6,7,8 各章的内容是独立自足的，可根据需要选学.

本书在写作过程中得到朱儒楷教授和李安昌教授的关怀和指导. 作者在此向他们表示感谢.

由于作者水平所限，疏漏、错误在所难免，敬请读者指正.

作　者

1993 年 7 月 23 日于徐州

符号说明

$\mathbf{N}$	全体正整数	$D(T)$	映射 T 的定义域
$\mathbf{Z}$	全体整数	$R(T)$	映射 T 的值域
$\mathbf{Q}$	全体有理数	$a \cdot e$	几乎处处
$\mathbf{R}$	全体实数	$m(A)$	集合 A 的测度
$\mathbf{C}$	全体复数	$\rho(x,y)$	x 与 y 间的距离
K	数域,实数或复数	$S(x,r)$	以 x 为中心,r 为半径的开球
$\mathbf{R}^n$	n 维欧几里得空间	$\dim X$	线性空间 X 的维数
sup	上确界	θ	线性空间的零元素,零算子
inf	下确界	span M	集合 M 张成的线性子空间
$\rightarrow$	趋向于	$\Vert x\Vert$	向量 x 的范数
$\mapsto$	映射到	(x,y)	向量 x 与 y 的内积
$\Rightarrow$	蕴含,推出	$\Vert f\Vert$	泛函 f 的范数
$\Leftrightarrow$	充分必要条件,等价	$\Vert T\Vert$	有界线性算子 T 的范数
$\in$	属于	$N(T)$	线性算子 T 的零空间
$\overline{\in}$	不属于	$B(X,X_1)$	$X\mapsto X_1$ 的有界线性算子构成的集合
$\subset$	包含	X^*	X 的共轭空间
$\cup$	并(集)	T^*	T 的共轭算子
$\cap$	交(集)	$M^{\perp}$	M 的直交补
$\dot{A}$	集合 A 的内部	$M_1\oplus M_2$	M_1 与 M_2 的直交和
A'	集合 A 的导集	$\rho(T)$	有界线性算子 T 的正则集
$\overline{A}$	集合 A 的闭包	$\sigma(T)$	有界线性算子 T 的谱集
$A\times B$	集合 A 与 B 的直积(积集)	δJ	泛函 J 的变分
$N(x_0,\delta)$	x_0 的 δ 邻域	$C[a,b]$	在$[a,b]$上连续的函数集合
$\varnothing$	空集	$C^{(n)}[a,b]$	$[a,b]$上具有 n 阶连续导数的函数集合
$\triangleq$	定义为,右端是左端的定义	$L^p[a,b]$	$[a,b]$上 p 次(L)可积的函数集合
$\varphi(A)$	集合 A 在映射 φ 下的像	l^p	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\vert x_n\vert^p<\infty$ 的数列$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$组成的集合
$\varphi^{-1}(B)$	集合 B 关于映射 φ 的原像	$L^\infty[a,b]$	本性有界可测函数集合
		l^∞	有界数列组成的集合

重版说明

本书重版作者未做大的修改。但就出版者而言，因1993年出版时所使用的标准为80年代的国标，未及使用新的90年代的标准，因此，这次重版为符合国家标准，并弥补初版时编辑加工中的疏漏，又对本书进行了全面的编辑审查，纠正了其中的错误，采用了新的国家标准。特此说明。

出版编辑者谨识

2000年8月5日

目　录

第1章　实数与函数

关于实数与函数的性质，在高等数学中已经有了一定的了解．为了今后的需要再作一些必要的补充．

§1.1　实数及其性质

一　实数的定义

实数是大家十分熟悉的概念．实数集包含有理数和无理数两大部分．有理数是一切形如$\frac{m}{n}$的数(其中 m 是整数，n 为正整数)．但是如何定义无理数，却是一个比较复杂的问题．几乎每一本"数学分析"书上都有比较系统的介绍．引入无理数的方法很多，不论哪一种方法，都是以有理数为基础给出无理数的精确刻画，从而建立起实数系统．下面给出实数的一种定义方法．

定义 1.1.1　设$\{a_n\}$是有理数列，如果对于任意正有理数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m,n>N$ 时，恒有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon$$

成立，则称$\{a_n\}$为一个**基本有理数列**.

设有两个有理数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，如果对于任意的正有理数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$|a_n-b_n|<\varepsilon$$

成立，则称$\{a_n\}$和$\{b_n\}$**相等**，记作

$$\{a_n\}=\{b_n\}.$$

大家知道，一个基本有理数列的极限可能是有理数，也可能不是有理数. 例如，基本有理数列$\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)$和$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$，当 $n\to\infty$时，前者的极限为$\frac{2}{3}$，而后者的极限为 e，e 这个数已超出了有理数的范围. 这样的简单例子给我们一个启示，一个基本有理数列对应一个元素(可能是有理数，可能不是有理数)，我们把这样的元素称为实数. 这就是由有理数系扩充为实数系的思想方法之一. 在定义实数时，为避开极限概念，通常就把基本有理数列定义为实数. 如果两个基本数列相等，则规定为同一个实数. 这样一来凡收敛于有理数的基本列就看作有理数，凡是不能收敛于有理数的基本列就看作新的数——无理数. 通常把全体实数记为 **R**. 由于全体实数与直线上的点是一一对应的，所以以后不再区别实数与直线上的点.

实数的定义是十分抽象的，不需要每个读者都去深入理解它. 但是由它导出的实数的性质却是重要的.

二　实数的性质

从几何意义上说，实数的全体可以填满一条直线，不再有空隙．这是实数的最基本性质，即实数的连续性．从不同的侧面予以分析，可有下面的一些重要定理．

1．单调有界定理

定理 1.1.1　单调有界数列必有极限．

证明　设有单调有界数列$\{a_n\}$，不妨设单调递增有上界，即存在M，使得

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant M.$$

于是有

$$[a_1]-1\leqslant a_n\leqslant[M]+1,\quad(n=1,2,\cdots)$$

显然存在惟一的整数n_0，$[a_1]-1\leqslant n_0\leqslant[M]+1$，它不是$\{a_n\}$的上界，而$n_0+1$是$\{a_n\}$的上界，由$\{a_n\}$的单调递增性，必存在自然数$N_0$，使得当$n>N_0$时，有

$$n_0\leqslant a_n\leqslant n_0+1.$$

现将$[n_0,n_0+1]$10 等分，在分点

$$n_0,n_0+\frac{1}{10},n_0+\frac{2}{10},\cdots,n_0+\frac{9}{10}$$

中也存在惟一的一个数$n_0+\frac{\alpha_1}{10}$（α_1是整数，且$0\leqslant\alpha_1\leqslant 9$），它不是$\{a_n\}$的上界，而$n_0+\frac{\alpha_1+1}{10}$是$\{a_n\}$的上界，分别记$x_1'=n_0+\frac{\alpha_1}{10}$，$x_1''=n_0+\frac{\alpha_1+1}{10}$．于是存在自然数$N_1$，使得当$n>N_1$时，有

$$x_1'\leqslant a_n\leqslant x_1''.$$

再将$[x_1',x_1'']$10 等分，又存在惟一的数$n_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}$（$\alpha_2$整数，且$0\leqslant\alpha_2\leqslant 9$），它不是$\{a_n\}$的上界，而$n_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2+1}{10^2}$是上界，分别记为$x_2'$，$x_2''$．于是又存在自然数$N_2$，当$n>N_2$时，有

$$x_2'\leqslant a_n\leqslant x_k''.$$

重复上面的步骤，并无限继续下去，可得两个有理数列$\{x_k'\}$及$\{x_k''\}$，满足：对于任意的k，必存在自然数N_k，当$n>N_k$时，有

$$x_k'\leqslant a_n\leqslant x_k'',$$

而且是两个相等的基本有理数列，事实上，对于任意的有理数$\varepsilon>0$，存在自然数$N=[-\lg\varepsilon]+2$，当$n>m>N$时，有

$$\begin{aligned}|x_n'-x_m'|&=\left|\frac{\alpha_n}{10^n}+\frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}+\cdots+\frac{\alpha_{m+1}}{10^{m+1}}\right|\\&<\frac{1}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{10^m}\\&=\frac{1}{10^m}\left(\frac{1}{10^{n-1-m}}+\frac{1}{10^{n-2-m}}+\cdots+1\right)\\&=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10^{m-1}}\left(1-\frac{1}{10^{n-m}}\right)<\left(\frac{1}{10}\right)^{m-1}<\left(\frac{1}{10}\right)^{N-1}\\&=\left(\frac{1}{10}\right)^{[-\lg\varepsilon]+1}<\left(\frac{1}{10}\right)^{-\lg\varepsilon}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由定义 1.1.1 知$\{x_k'\}$是基本有理数列．同样可证$\{x_k''\}$也是基本有理数列．又因为$|x_k'-x_k''|=\frac{1}{10^k}$，所以易知$\{x_k'\}=\{x_k''\}$．由实数定义知$\{x_k'\}$与$\{x_k''\}$确定同一个实数，记为$a$.

由于$\{x_k'\}$是单调递增的，而$\{x_k''\}$是单调递减的．故有

$$x_k' \leqslant a \leqslant x_k'', \quad (k=1,2,\cdots).$$

下面证明 a 就是 $\{a_n\}$ 的极限. 事实上，任给 $\varepsilon>0$，则有自然数 k，使 $\frac{1}{10^k}<\varepsilon$，对于 k，又存在自然数 N_k，当 $n>N_k$ 时，有

$$x_k' \leqslant a_n \leqslant x_k'',$$

于是 $$|a_n-a| \leqslant |x_k''-x_k'|=\frac{1}{10^k}<\varepsilon,$$

从而证得 $$\lim_{n\to\infty} a_n=a.$$

当 $\{a_n\}$ 单调递减有下界时，证明类似. ■

2. 闭区间套定理

定义 1.1.2 设有一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$，满足：

(1) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$, $\quad (n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个闭区间套，或简称**区间套**.

定理 1.1.2（区间套定理） 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，则存在惟一的 ξ，使得

$$\xi\in[a_n,b_n], \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

证明 由定义 1.1.2 知 $\{a_n\}$ 是单调递增有上界的数列，由定理 1.1.1 知它必有极限，记为 ξ，则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\xi, \text{且 } a_n\leqslant\xi, \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

又因为对任意的 m,n，有

$$a_m\leqslant b_n,$$

所以 $$\xi=\lim_{n\to\infty} a_n\leqslant b_n.$$

这就证明了 $$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n, \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

同样可证，存在 ξ'，使

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\xi', \text{且 } a_n\leqslant\xi'\leqslant b_n, \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

由于 $$|\xi-\xi'|\leqslant|b_n-a_n|\to 0 \quad (n\to\infty),$$

从而有 $\xi=\xi'$，所以 ξ 是惟一的.

3. 完备性定理

定理 1.1.3〔柯西(Cauchy)收敛原理〕 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：任给 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，使得当 $m,n>N$ 时，恒有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

证明 *必要性* 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，由极限定义，对于任意给定的正数 ε，存在自然数 N，使得当 $m,n>N$ 时，有

$$|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而 $$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a|+|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon;$$

充分性 由假设条件知，对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在 N，当 $n>N$ 时，$|a_n-a_N|<\varepsilon$，即在区间 $[a_N-\varepsilon,a_N+\varepsilon]$ 中含有 $\{a_n\}$ 中除有限项外的其他所有的项. 特别取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 时，则存在 N_1，在

$\left[a_{N_1}-\frac{1}{2},a_{N_1}+\frac{1}{2}\right]$中含有$\{a_n\}$中除有限项外其他的所有项. 记这个区间为$[\alpha_1,\beta_1]$. 又取$\varepsilon=\frac{1}{2^2}$时,则存在$N_2(>N_1)$,在区间$\left[a_{N_2}-\frac{1}{2^2},a_{N_2}+\frac{1}{2^2}\right]$中含有$\{a_n\}$中除有限项外的其他所有的项,记

$$[\alpha_2,\beta_2]=[\alpha_1,\beta_1]\cap\left[a_{N_2}-\frac{1}{2^2},a_{N_2}+\frac{1}{2^2}\right].$$

易证它也包含$\{a_n\}$中除有限项外的其他所有的项.

显然
$$[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2],$$

而且
$$\beta_2-\alpha_2\leqslant\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}=\frac{1}{2}.$$

继续上面的做法,依次取$\varepsilon=\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$,便得一列闭区间$\{[\alpha_n,\beta_n]\}$,满足:

$$[\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}],\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

$$\beta_n-\alpha_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\to 0,\quad(n\to\infty).$$

由闭区间套定理必存在惟一的实数ξ,使得$\alpha_n\leqslant\xi\leqslant\beta_n(n=1,2,3,\cdots)$.

下面证明ξ就是$\{a_n\}$的极限. 事实上,对于任意的$\varepsilon>0$,必有自然数k,使得$\frac{1}{2^k}<\varepsilon$,注意到$[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]$中包含$\{a_n\}$中除有限项外的其他所有的项,从而存在$N$,当$n>N$时,$a_n\in[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]$,即

$$\alpha_{k+1}\leqslant a_n\leqslant\beta_{k+1};$$

又因为
$$\alpha_{k+1}\leqslant\xi\leqslant\beta_{k+1};$$

从而
$$|a_n-\xi|\leqslant\beta_{k+1}-\alpha_{k+1}=\frac{1}{2^k}<\varepsilon.$$
■

Canchy 定理揭示了实数的重要性质——完备性.

定义 1.1.3 设有实数列$\{x_n\}$,如果对于任意的正数ε,都存在自然数N,使得当$m,n>N$时,总有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon,$$

则称$\{x_n\}$为**基本数列或称为 Cauchy 数列**.

由 Cauchy 收敛原理知,实数集中的任意基本数列必收敛,这就是所谓的实数的**完备性**,这个性质在“数学分析”中起着决定性的作用,也为我们后面讨论抽象空间的完备性提供了必要的基础.

4. *确界存在定理*

我们知道一个实数集合如果有上界时,上界不是惟一的,我们最感兴趣的是最小的上界,即所谓的上确界. 对于有下界的集合,我们感兴趣的是最大的下界,即下确界. 下面给出确界的精确定义及存在性定理.

定义 1.1.4 对于给定的实数集合S,如果数a满足下述条件:

(1) a是S的上界,即对任意的$x\in S$,都有$x\leqslant a$;

(2) 对于任意的正数ε,必存在S中的点x_0,使得$x_0>a-\varepsilon$.

则称a为S的**上确界**,记作

$$a=\sup S \text{ 或 } a=\sup_{x\in S}\{x\}.$$

如果存在数 b 满足：

(1) b 是 S 的下界，即对任意的 $x\in S$，都有 $x\geqslant b$；

(2) 对于任意的正数 ε，必存在 S 中的某个点 x'_0，使得 $x'_0<b+\varepsilon$.

则称 b 为 S 的**下确界**，记作

$$b=\inf S \text{ 或 } b=\inf_{x\in S}\{x\}.$$

定理 1.1.4（确界存在定理） 非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

证明 这里只证第一个命题，第二个命题的证明类似.

设有数集 S，而且 M 是它的一个上界，如果 $M\in S$，则易证 M 即为其上确界；如果 $M\overline{\in} S$，则必有 $x_0\in S$，使 $x_0<M$. 考虑区间 $[x_0,M]$，并且将 $[x_0,M]$ 两等分，证中点 $x_1=\dfrac{x_0+M}{2}$，取

$$[a_1,b_1]=\begin{cases}[x_0,x_1], & \text{若 } x_1 \text{ 为 } S \text{ 的上界；}\\ [x_1,M], & \text{若 } x_1 \text{ 不是 } S \text{ 的上界.}\end{cases}$$

则
$$[a_1,b_1]\subset[x_0,M] \quad \text{且} \quad b_1-a_1=\frac{M-x_0}{2}.$$

再将 $[a_1,b_1]$ 两等分，记中点 $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，取

$$[a_2,b_2]=\begin{cases}[a_1,x_2], & \text{若 } x_2 \text{ 是 } S \text{ 的上界；}\\ [x_2,b_1], & \text{若 } x_2 \text{ 不是 } S \text{ 的上界.}\end{cases}$$

则
$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1] \quad \text{且} \quad b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(M-x_0).$$

继续下去便得一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$，满足：

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}], \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

及
$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(M-x_0)\to 0, \quad (n\to\infty).$$

则由闭区间套定理知，存在惟一实数 ξ，使得

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n, \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

下面证明 ξ 即为 S 的上确界. 事实上，对于任意的 $x\in S$，注意到 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 是 S 的上界，故有 $x\leqslant b_n$，从而推出

$$x\leqslant\lim_{n\to\infty}b_n=\xi.$$

因此，ξ 是 S 的上界，而对于任意的正数 ε，由于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi,$$

故存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-\xi|<\varepsilon,$$

特别
$$-\varepsilon<a_{N+1}-\xi<\varepsilon, \quad \text{即} \quad \xi-\varepsilon<a_{N+1}.$$

又由于 a_{N+1} 不是上界，故有 $x_{N+1}\in S$，使得

$$x_{N+1}>a_{N+1}>\xi-\varepsilon,$$

所以 ξ 是 S 的上确界，而且是惟一的. ■

注意 一个数集的上确界可能属于这个集合，也可能不属于这个集合. 例如开区间(0,

1)，其上确界显然是 1，但 $1 \overline{\in} (0,1)$；而闭区间 $[0,1]$ 的上确界 $1 \in [0,1]$. 下确界也如此. 于是易证下面的结论：数集 S 的上(下)确界 $a \in S$ 的充分必要条件是 S 有最大(小)值.

对于单调递增(或递减)且有上界(或下界)的数列 $\{a_n\}$，其极限与上确界(或下确界)有下面的关系：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\},$$

$$\left(\text{或} \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

5. 聚点原理与上下极限

定义 1.1.5 设 S 是直线上的点集，ξ 是一个定点(可能属于 S，也可能不属于 S)，如果对于任意的 $\delta > 0$，区间 $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ 内都有 S 中的异于 ξ 的点，则称 ξ 为 S 的一个聚点.

关于聚点的存在性有下面的两个定理.

定理 1.1.5(维尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点原理) 直线上的任意有界无限点集必有聚点.

这个定理用区间套定理不难证明，从略.

定理 1.1.6 ξ 为点集 S 的聚点的充分必要条件是：S 中含有一个各点互不相同且以 ξ 为极限的点列 $\{x_n\}$.

证明 *必要性* 由于 ξ 是 S 的聚点，故对于 $\delta=1$，$(\xi-1, \xi+1)$ 中含有 $x_1 \in S$，但 $x_1 \neq \xi$. 对于 $\delta_1 = \min\{\frac{1}{2}, |\xi - x_1|\}$，$(\xi-\delta_1, \xi+\delta_1)$ 中含有 $x_2 \in S$，但 $x_2 \neq \xi$，显然 $x_2 \neq x_1$.

如此无限继续下去，便得到一个点列 $\{x_n\}$. 由于 $x_n \in S$，$x_n \neq \xi$ 且 $x_n \neq x_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$，故 $\{x_n\}$ 是 S 中各点互不相同的点列. 又由于 $x_n \in (\xi-\delta_{n-1}, \xi+\delta_{n-1})$，其中

$$\delta_{n-1} = \min\left\{\frac{1}{2^{n-1}}, |\xi - x_{n-1}|\right\}, \text{故} |\xi - x_n| < \delta_{n-1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \ (n\to\infty).$$

从而知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

充分性 设 $\{x_n\}$ 是 S 中的各点互不相同的点列，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi;$$

故对任意的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - \xi| < \varepsilon,$$

即

$$x_n \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon).$$

由于 $\{x_n\}$ 中各点互不相同，所以至少有一个点 $x_{n_0} \neq \xi$ 且 $x_{n_0} \in S$，使 $x_{n_0} \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ $(n_0 > N)$. 于是由聚点的定义知 ξ 是 S 的聚点. ■

该定理有一个有用的推论，为此先定义子列的概念.

定义 1.1.6 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，考虑由它的一部分元素，而不改变次序所组成的数列：

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k} \cdots$$

称为 $\{x_n\}$ 的一个子列，记为 $\{x_{n_k}\}$.

注意 关于子列 $\{x_{n_k}\}$ 的下标 n_k 有三个要求：

(1) $\{n_k\}$ 是严格递增的自然数列，即

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k \cdots;$$

(2) x_{n_k}的序号是 k 而不是 n_k，n_k 表明子列与原数列的关系，x_{n_k}是子列中的第 k 项，而在原数列中是第 n_k 项；

(3) $n_k \geqslant k$，且$\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$.

例如，数列$\{x_n\}$中，下标为偶数的项构成的子列为：$x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2k}, \cdots$即$\{x_{2k}\}$，显然它的下标 $n_k = 2k$，x_{2k}在子列中是第 k 项，而在原数列中它是第 $2k$ 项.

有时我们需要在子列中再抽取子列，一般记为$\{x_{n_{k_l}}\}$，它既是$\{x_{n_k}\}$的子列，同时它也是原数列$\{x_n\}$的子列.

推论 有界点列必有收敛的子列.

证明 设点列$\{x_n\}$是有界的. 此处仅对$\{x_n\}$中含有无限多互不相同之点的情况予以证明. 事实上，将$\{x_n\}$看成点集时，是一个有界无限点集，由定理 1.1.5 知必有聚点，再由定理 1.1.6 知可选出一个各点互不相同的点列收敛于该聚点.

容易证明收敛点列必是有界点列. 但有界点列未必收敛，然而上面的推论肯定了收敛的子列是存在的，这是实数的又一个重要性质. 通常将聚点原理及其推论称为列紧性定理，即直线上的有界点集一定是列紧集. 所谓列紧集，简单地说就是，若 A 是直线上的一个点集，如果 A 中的任何点列都有收敛的子列，则称 A 是**列紧集**. 例如任何有界区间(不论是开的、闭的或是半开半闭的)都是列紧集.

对于有界点列再作一些深入的分析，可以引出数列的上极限与下极限概念. 我们说一个有界点列必有收敛的子列，实际上，这样的子列有无穷多个. 试看点列$\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}$，它是有界的. 其偶数项构成的子列$\left\{\dfrac{2k}{2k+1}\right\}$以 1 为极限，项数是 4 的倍数($n=4k$)的项构成的子列$\left\{\dfrac{4k}{4k+1}\right\}$也是以 1 为极限，而奇数项所构成的子列$\left\{-\dfrac{2k-1}{2k}\right\}$却是以 -1 为极限，等等，还可以选出很多其他的收敛子列. 在这些子列中发现有的极限是相等的，而有的却不相等. 还可以发现所有子列极限中最大的数是 1，所有子列极限中最小的数是 -1. 一般称 1 为数列$\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}$的上极限，称 -1 为数列$\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}$的下极限，下面给出数列上下极限的精确描述.

定义 1.1.7 设$\{x_n\}$是一个有界数列，记

$$l_n = \inf_{k\geqslant n} x_k, \quad h_n = \sup_{k\geqslant n} x_k, \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

则称$\lim\limits_{n\to\infty} l_n$ 为数列$\{x_n\}$的**下极限**，记作

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} l_n.$$

称$\lim\limits_{n\to\infty} h_n$ 为数列$\{x_n\}$的**上极限**，记作

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} h_n.$$

注意 定义中的两个数列$\{l_n\}$及$\{h_n\}$显然分别为单调递增有上界和单调递减有下界的数列，因而必有极限. 故知有界数列的上下极限总是存在的.

例 1 用定义计算$\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}$的上下极限.

解 由于

$$l_n=\inf_{k\geqslant n}\left\{(-1)^k\frac{k}{k+1}\right\}\equiv-1,\qquad (n=1,2,3,\cdots);$$
$$h_n=\sup_{k\geqslant n}\left\{(-1)^k\frac{k}{k+1}\right\}\equiv 1,$$

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}l_n=-1,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}h_n=1.$$

这与直观分析的结果相一致．

下面给出关于上下极限的几个结论（不证明）．

结论 1 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$.

结论 2 设$\{x_n\}$是有界数列．

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是：存在子列$\{x_{n_k}\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$；而且对任意的收敛子列$\{x'_{n_k}\}$有

$$\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}\geqslant a;$$

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=b$ 的充分必要条件是：存在子列$\{x_{n_k}\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=b$；而且对任意收敛子列$\{x'_{n_k}\}$，有

$$\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}\leqslant b;$$

结论 3 $\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：它的上下极限相等．即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充分必要条件是

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n=\varlimsup_{n\to\infty}x_n=A.$$

注意 上面我们只讨论了有界数列的上下极限问题．但只要允许上极限与下极限可以是∞（或$-\infty$），那么，上面关于上下极限的定义与结论适用于任意的数列．于是在广义极限意义下，任何一个数列总有上下极限．

6. 紧性定理

定义 1.1.8 设S是直线上的点集，H是某些开区间构成的集合（即H中的元素都是形如(α,β)的开区间），如果S中的每个点都包含在H中的一个开区间内，即对任意的$x\in S$，都存在开区间$(\alpha,\beta)\in H$，使得$x\in(\alpha,\beta)$，则称开区间集H是点集S的一个**开覆盖**，或简称**覆盖**，若H中开区间的个数为有限时，则称H为S的一个**有限覆盖**．

由定义不难看出任何一个点集都存在开覆盖，而且可以有无限多个开覆盖，但在具体问题中，开覆盖往往要由问题的某种需要来确定．例如设$f(x)$在(a,b)上连续，由连续的定义知，对任意给定的正数ε，对每个$x_0\in(a,b)$，必存在与x_0及ε有关的$\delta>0$，使得当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，都有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立．这样就得出一个开区间集$H=\{(x_0-\delta,x_0+\delta)\mid x_0\in(a,b)\}$，显然$H$是$(a,b)$的一个开覆盖，由于$(a,b)$是无限点集，每个点对应一个小区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，故$H$中含有无限多个开区间．一项十分有用的工作是，能否从H中选出有限个开区间组成(a,b)的有限覆盖．这个问题不是任何点集都能办到的．

例如 $S=(0,1)$，$H=\left\{(\frac{1}{n},1)\mid n=2,3,\cdots\right\}$．显然$H$是$S$的一个覆盖，这是因为对于