

通信流理论基础与 多媒体通信网

川岛幸之助 町原文明 著
高桥敬隆 斋藤 洋
岳五一 吕延杰 译



清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



通信流理论基础与 多媒体通信网

川岛幸之助 町原文明 著
高桥敬隆 斋藤 洋
岳五一 吕廷杰 译

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

第1章简单地介绍了通信流理论的大体结构,第2章论述了本理论的随机过程基础。包括:贝努里过程、泊松过程、更新过程、离散型与连续型马尔可夫过程以及马尔可夫更新过程。第3章从针对排队系统的点过程出发,对有关方法和最新研究成果进行了阐述。介绍了具有普遍意义的率保存法则。此外,还以 Little 公式为核心,从应用的侧面对排队系统进行了介绍。第4章着重对多媒体通信网的性能评价问题进行了论述。有一定基础的人仅学习这一章,就可以理解多媒体通信网的大体结构和作为多媒体通信技术基础的 ATM 网络之特征,以及利用通信流理论对其进行解析和性能评价的方法等。附录中介绍了这一章所涉及的概率论与随机过程基础知识。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

通信流理论基础与多媒体通信网/(日)川岛幸之助等著;岳五一,吕廷杰译. —2版.
—北京:清华大学出版社,2000.7

ISBN 7-302-03991-7

I. 通... II. ①川... ②岳... ③吕... III. ①通信理论 ②多媒体-通信网
IV. TN919.85

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 37679 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者:北京市人民文学印刷厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:787×960 1/16 印张:10 字数:208 千字

版 次:2000 年 11 月第 1 版 2000 年 11 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-03991-7/TN·113

印 数:0001~3000

定 价:20.00 元

译者的话

随着信息高速公路的兴起,人类社会的信息化进程明显加快。近年来,在传统的电信业务迅猛发展的同时,以电子信箱、有线电视为代表的多媒体通信业务也正在我国得到普及与发展,从而极大地丰富了人们的物质与文化生活。通信领域不仅以朝阳产业的形象开拓出一个广阔的市场,而且随着新技术的不断应用以及新业务的不断开放,与之相关的理论与应用课题也层出不穷,通信网络、通信技术以及通信网管理等已经成为最为活跃的研究领域之一。

从技术的角度来讲,现代通信网可分3层:传送层(transmission)、连接层(cross-connect)和流量层(traffic)。其中传送层涉及基本通信要素(如交换、传输、用户接入等)的物理特性;连接层涉及各通信要素之间互连、互通、互操作的“无缝连接”结构;而流量层则主要关注于网络运行的性能、控制与协调,因此属于“软”的范畴。本书就是针对第3层即流量层的内容展开有关论述的。研究第3层的理论在我国传统上被称为“话务理论(traffic theory)”或“话务量工程(traffic engineering)”,该理论与运筹学中的排队论源于同一理论背景——概率论与随机过程。尽管排队论是由丹麦科学家爱尔兰(A. K. Erlang)在研究通信系统拥塞现象时所创建的,但由于它的应用范围不仅限于通信系统,所以也有人认为话务理论是排队论在通信系统中的应用。值得指出的是,随着通信的多媒体化,所要处理的电信业务不再局限于语声业务,因此,继续沿用话务理论这样的名称是不适宜的。为此,我们在本书中将其替换为“通信流量理论”或简称通信流理论。

本书的主要特点是内容新、体系严谨、表达规范。与其他一些话务理论方面的论著不同的是:所有结论的引出均基于概率论与随机过程的基本定理与法则,对于多媒体系统的讨论也参照了国际电联技术标准组(International Telecommunication Union-Telecommunication Standardization Sector, ITU-T)的有关建议与规程。从应用的角度而言,本书的论述不是直接针对工程性管理,而是面向作为工程管理之基本依据的网络性能及其分析方法,因此,体现了近年来排队论应用于系统性能评价的研究动向。

本书作者均为长期在通信流理论与应用的第一线从事研究工作的专业人员,他们在这一领域里已有较高的理论与实践造诣,因此在日本和国际上有一定的声望。书中一些内容实际上就是他们自己科研成果的结晶。在征得原作者与出版社的同意之后,我们特将此

书翻译为中文版,并期待着它能够对提高我国在这一研究领域的水平,丰富排队论在通信系统中的应用,促进我国通信网建设与管理的发展,起到抛砖引玉的作用。由于我们水平有限,在翻译过程中,难免有一些不恰当之处,望广大读者批评指正。

译者

1999年3月

前 言

自电报、电话相继发明以来,通信业已走过了一个多世纪,而计算机也有半个多世纪的历史了,近年来通信正在向多媒体的方向飞速发展着。多媒体通信具有变革社会生活的巨大潜力,它的出现是电话诞生以来的又一次伟大革命。导致这场革命的巨大推动力是近二三十年内迅速发展的大规模集成电路、光纤和数字化技术。

通信流(Teletraffic)理论是构筑多媒体通信网的基础性理论之一,它是与电话的发明同时发展起来的。本世纪初,丹麦科学家爱尔兰(A. K. Erlang)创立了通信流理论。后来,计算机的出现使得与通信流理论具有几乎相同意义的运筹学的一个重要分支——排队论——取得了很大的研究进展。特别是10年前,作为多媒体通信基础技术的异步转移模式(Asynchronous Transfer Mode,简称ATM)诞生以来,使得通信流理论在应用领域显得更加活跃。

由于有较长的发展历史,因此国内外^①有关这一研究领域的论著也比较丰富。然而,与已有的文献相比,本书有着独到的特点:它不是罗列通信流理论的各种公式,而是对作为通信流理论基础的随机过程新的方法进行严谨地、通俗易懂地阐述,并介绍了对多媒体通信网进行性能评价的方法。将通信流理论与多媒体通信的具体应用相结合,以起到桥梁的作用,这是本书的特点。

以通信流理论推导出来的基本公式、流量的性能特征等往往与我们的技术直觉相反,但是如果我们能够理解并对这种随机现象加以处理,我们就可以正确评价这种直觉。反过来,又可自然地将所掌握的方法运用于更多类型的系统或通信网。

本书的结构如下:首先在第1章简单地介绍了通信流理论的大体结构,然后在第2章论述了本理论的随机过程基础。这些随机过程包括:贝努里过程、泊松过程、更新过程、离散型与连续型马尔可夫过程以及马尔可夫更新过程。这些过程对于那些已经熟悉了面向电话网的话务理论,转而要多媒体业务流进行模型化和解析的人来说,是十分必要的。

第3章从针对排队系统的点过程出发,对有关方法和最新研究成果进行了阐述。为了使读者能够学习、理解甚至精通排队论的理论体系,本章介绍了具有普遍意义的率保存法则。此外,还以Little公式为核心,从应用的侧面对排队系统进行了介绍。

第4章着重对多媒体通信网的性能评价问题进行了论述。有一定基础的人如果仅学习这一章,就可以理解多媒体通信网的大体结构和作为多媒体通信技术基础的ATM网络之特征,以及利用通信流理论对其进行解析和性能评价的方法等。附录中介绍了这一章

^① 相对日本而言。——译者

所涉及的概率论与随机过程基础知识。

如上所述,本书的各章均可以单独地阅读。本书适合于运筹学、通信或信息工程等专业的大学、研究生以及从事上述领域科研、技术管理等工作的技术人员。

最后,特对给予本书出版以极大支持的电子情报通信学会的有关人员表示衷心地感谢。近年来,通信领域正在进行着百年一次的大变革,处在这样的时代,本书若能为其发展贡献出微薄的力量,作者将感到无上的幸福。

著者代表:川岛幸之助
NTT 通信网研究所通信流研究部长
1995 年 11 月

目 录

译者的话	I
前言	Ⅲ
第 1 章 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 通信流理论	2
1.3 通信技术的发展	3
第 2 章 随机过程	5
2.1 贝努里过程	5
2.2 泊松过程	8
2.3 更新过程	15
2.4 离散时间型马尔可夫链	27
2.5 连续时间型马尔可夫链	34
2.6 马尔可夫更新过程	47
2.7 小结	53
参考文献	54
第 3 章 排队系统的点过程论理论分析	55
3.1 点过程论的背景	55
3.2 调制点过程与平稳点过程	56
3.3 帕鲁姆分布	62
3.4 率保存法则	64
3.5 样本轨迹形式率保存法则与 $H = \lambda G$	71
3.6 在排队系统中的应用	75
3.6.1 Little 公式	75
3.6.2 Finch 公式	77
3.6.3 Brumelle 公式	79

3.6.4	Sengupta 恒等式	81
3.6.5	一般化的 Pollaczek-Khintchine 公式	83
3.6.6	有限容量系统的呼损率评价公式	88
3.7	小结	96
	参考文献	96
第 4 章	多媒体通信网的性能评价	99
4.1	宽带综合业务数字网	99
4.2	异步转移模式	100
4.2.1	ATM 的特征	100
4.2.2	虚通道与虚通路	102
4.2.3	适配层	104
4.2.4	连接接纳和信元的传送	104
4.3	ATM 的流量控制功能	106
4.3.1	流量记述单元	107
4.3.2	呼叫接纳控制	108
4.3.3	用户参数控制	109
4.3.4	优先权控制	110
4.3.5	反馈控制	111
4.4	ATM 网络的模型化	112
4.5	信元到达过程	113
4.5.1	实际信元到达过程和名义信元到达过程	113
4.5.2	固定速率(CBR)通信	115
4.5.3	语音流量	115
4.5.4	图像流量	117
4.5.5	多种流量	121
4.5.6	网内的信元到达过程	122
4.6	统计复用特性	125
4.7	小结	130
	参考文献	130
附录	概率论基础	134
A.1	概率空间	134

A.2 随机变量与分布函数	137
A.3 条件概率·独立性	139
A.4 期望值(数学期望)	141
A.5 条件数学期望	144
参考文献.....	146
著者简历.....	147

第1章 绪 论

1.1 概 述

英文“Traffic”一词通常是指那些由列车、汽车等运动着的车辆所形成的交通流。后来人们将通信系统中的信息流动,即相互通话、连串的通信数据等也称为 Traffic。但为了与交通流有所区别,通常称为“Teletraffic”^①。

以电话网为例,需要接通的电话呼叫断续地到达电话网或交换机,经过处理,在一定的时间内占用电话线,通话完了时立即离开电话网。电话呼叫的到达、对电话线的占用时长以及通话的对方等在时间和空间上都是不断变化的,于是我们将其概括起来称为“流量”。对于上述含有变动因素的所有服务请求,想要提供一种既没有无效的延误,又保证每接必通的完善服务是不可能的,因为那会造成通信系统效率的低下和不经济。因此,在大多数的用户能得到满意服务的前提下来设计系统才是最经济的。为了对网络的设计与运行进行定量分析与研究,有必要运用概率论与随机过程的方法来考虑流量的变化,概率论与随机过程在通信系统分析与研究中的应用即为通信流理论。

归纳国际通信流学术组织(International Teletraffic Congress 简称 ITC)第1次会议(1955年)以来的主题,通信流理论可被定义为:“概率论在电信系统的研究、设计和运行管理中的一种应用”。另外,由于自动交换装置、计算机以及分组交换方式的相继出现,一些等待制的服务系统不断投入运行,因此人们又将研究这些系统的理论形象地称为排队论。尽管排队现象不仅在通信过程中,而且还在其他系统中出现,例如,在交通系统中、工厂的生产线甚至食堂中也会出现,但可以说其理论体系是与通信流理论相同的。

世界上最早的电话交换业务开始于电话机发明后的第2年,即1878年1月。当时的用户仅有21家。但在随后不到一个月的时间内,要求安装电话的用户激增。从那时起贝尔电话公司就开始了从流量的角度进行系统设计的工作。1908年,丹麦哥本哈根(Copenhagen)电话公司的爱尔兰(A. K. Erlang)发表了应用概率论进行通信流研究的第1篇学术论文。从此,人们开始在电话网中使用以 Erl 命名的流量单位。

如图1.1所示,通信网的构成与实用化是与社会需求形式和关键技术的发展相互关联的,并且对新的业务需求有较好的适应性。其中,提供有关电信网设计与运行管理的主

^① “Teletraffic”在本书中称其为“通信流”。——译者

要技术就是通信流理论。当然,除本理论外,数理规划方法、统计理论等多种方法也常常被采用。

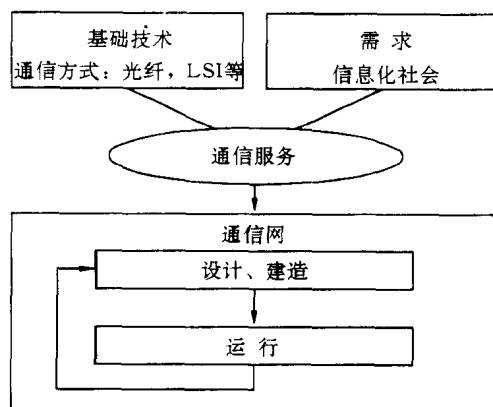


图 1.1 通信网的构成与运用

1.2 通信流理论

本节论述有关通信流理论体系与框架结构。

在通信流理论中,呼叫的性质由其到达时间间隔的分布和所需服务(处理)时间来确定。对于发生于多个信息源的呼叫请求,通常采用概率统计的方法来对其所需要的线路数和占用时长进行分析处理。对于输入源的个数,通常需划分为有限源和无限源两种情况,后者是指输入源数非常多以至于可以被视为无限大的情况。在有限源的情况下,那些已经发出呼叫请求而正在等待接受服务或服务中的输入源,通常认为其不再发生新的呼叫要求。

下面将要涉及呼叫到达时间间隔的分布。从终端的角度来看,所谓呼叫,可以认为是用户通过终端设备发出的服务请求,也可认为是某些网内自动产生的业务请求。从网络来看,发源于终端的呼叫按通信系统处理的需要被分割成信息单元时,从处理它们的装置来看,这些信息单元(比如:分组、ATM(asynchronous transfer mode)信元、软件包等)称其为呼叫。通常需利用一些随机过程来描述其到达间隔的分布或者相关性。

再深入一步,还必须了解呼叫处理时长(服务时间)的分布。通常假定产生于同一信息源的呼叫其处理时间的分布是相互独立且服从同一分布的。与到达时间间隔的分布一样,也要利用一些随机过程来对其进行描述。

此外,还有一个由系统参数所决定的重要量值——流量密度(traffic intensity)。流量密度被定义为平均处理时间除以平均到达时间,表示单位时间到达系统的业务量(处理时间)的平均值。这个值没有量纲,取通信流理论的创始人爱尔兰的名字(Erl)作单位,在电

话网中被称为话务量。

下面将涉及到服务规则。所谓服务规则是指是否接受到达系统的呼叫、接受后的处理顺序等。如果当呼叫到达时系统已被全部占用,若其不作等待而立即离去,则该系统被称为损失制系统;如果它在队列中排队等待,则该系统被称为等待制系统。混合制系统兼有损失制与等待制系统的特点^①。此外,对于等待制系统,其服务规则还可细分为先到先服务、后到先服务、随机服务以及优先权服务等。

作为流量模型的评价准则,主要有以下几项:

- (1) 等待时间:从呼叫到达并进入等待室,直到服务开始为止的时间。
- (2) 逗留时间:从呼叫到达到达服务完毕离开系统为止的时间。
- (3) 队列长:等待室中呼叫的个数。
- (4) 队长:等待室中和正在系统中接受服务的呼叫数的总和。

对于损失制系统和等待室容量有限的混合制系统,还需采用下述准则:

呼损率:呼叫到达时,系统资源^②被全部占用的概率。

这里:逗留时间=等待时间+服务时间,队长=队列长+服务台个数,可参见图 1.2。

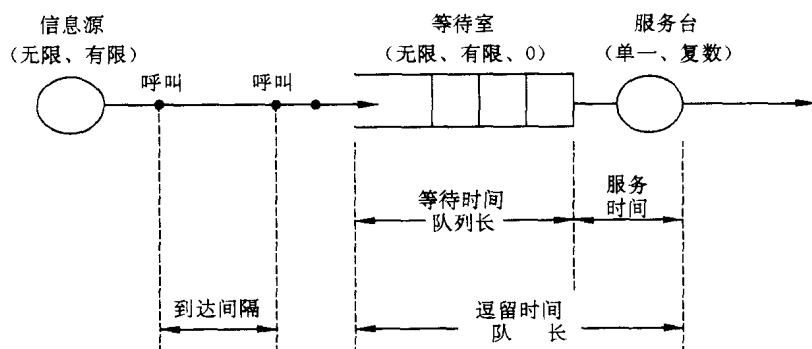


图 1.2 基本流量模型

以上就是应用概率与随机过程的概念所构成的通信流理论的基本框架。

1.3 通信技术的发展

当前,多媒体通信显示出了十分强劲的发展势头。数字化技术、光导纤维、大规模集成电路等的迅猛发展带来了通信领域的巨大变革。图 1.3 给出了近 50 年内通信技术的发展历程(年代与项目的对应未必完全正确)。由于与计算机技术的融合,与广播、有线电视的

^① 当队列长度有限时,便属于混合制系统。——译者

^② 系统资源包括服务设施与等待室。——译者

融合,通信正在将多媒体世界的梦想变为现实。这也是通信领域自一个世纪前电话被发明以来的最大变革。这次变革将使人们的社会生活为之一变。

	1950	1960	1970	1980	1990	2000
通信网	模拟电话网			数字网	N-ISDN	B-ISDN
计算机网	ARPA网, ALOHA, 分组网, LAN, 高速分组交换					Internet
移动通信		火车	船舶	无线寻呼	车载电话	移动电话 PHS 低轨卫星
交换	纵横制交换		程控交换	数字交换	ISDN	ATM 光交换
				同步MUX	SDH-XC	ATM-XC
传输	同轴FDM	同轴PCM		光纤400M	1.6G	10G 固态
计算机	ENIAC	模拟计算机	通用机, TSS	PC机, 工作站	C/S	超级并行处理, PDA
元器件	半导体	IC	LSI	VLSI		光IC

图 1.3 通信技术的变迁

最初,通信流理论是伴随着电话网的发展而发展起来的。到了 20 世纪 60 年代后期,随着计算机的实用化以及分组交换网和一种随机接入系统(additive link on-live hawail area system, 简称 ALOHA)网的出现,为其开辟了新的应用领域。随后,它在无线通信领域中对车载电话、蜂窝式移动电话等移动通信系统的研究也变得非常盛行。与此同时,随着作为面向多媒体通信方式的 ATM 技术的发展与实用化,通信流理论在这一领域的研究显得异常活跃。可以预言,随着近年来因特网(Internet)、移动计算机网和高速计算机网等大潮的形成,通信流理论的应用领域将变得越来越广泛。

对于上述新的社会环境和技术环境,通信流理论除了基于概率论与随机过程的理论背景之外,还将引进有关的线性代数、控制论、数理统计等数学方法与技巧,以取得新的发展。此外,近年来,计算机模拟技术也取得了显著的进步,人们期待着通过它在实践中与通信流理论相辅相成的应用,取得新的研究发展。

第2章 随机过程

首先,让我们将通信流定义为呼叫给通信系统所带来的业务量。例如,在电话网中,当用户打电话时,电话呼叫便是给系统带来了通话的业务量。由于相继到达的电话呼叫的时间间隔、通话时长等都可以视为随机变量,因此需要建立起随机过程的概念。

随机过程是表示概率现象随时间而变化之规律的理论,它被定义为在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 取空间 E 的值的随机变量之集合。

$$\{X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$$

集合 T 被称为时间域, T 中的元素是单调递增的,特别是当 $T = N = \{0, 1, \dots\}$ 的时候,这个过程被称为时间离散型随机过程。 T 在连续域取值的时候,例如, $T = R_+ = [0, \infty]$,或 $T = [a, b] \subset (-\infty, \infty)$ 的时候,这个过程被称为时间连续型随机过程。对于给定的 t ,定义 $X_t(\omega)$ 为从 Ω 向 E 的映射函数,表示为 X_t ,则 X_t 被称为状态。空间 E 被称为状态空间。反之,如果将 ω 固定,而将 $X_t(\omega)$ 定义为 t 的函数,那么可将其写为 $X(\omega)$ 。 $X(\omega)$ 被称为有关 ω 的样本函数。对于所有的 ω , $X(\omega)$ 是 E^T 的元素。

2.1 贝努里过程

在本节里,让我们首先来掌握最简单的随机过程——贝努里(Bernoulli)过程。作为时间域,我们取 $T = N = \{0, 1, 2, \dots\}$,将 $\{X_n(\omega): n \in T, \omega \in \Omega\}$ 作为在 $E = \{0, 1\}$ 中取值的时间离散型随机过程。当满足下列条件时,这个过程就被称为贝努里过程。

(1) $X_0, X_1, \dots$ 相互独立。

(2) 对于所有的 $n, P\{X_n = 1\} = p, P\{X_n = 0\} = q = 1 - p$,

在此情况下,

$$\text{成功} = X_n^{-1}(1) \equiv \{\omega: X_n(\omega) = 1\}$$

或者,

$$\text{失败} = X_n^{-1}(0) \equiv \{\omega: X_n(\omega) = 0\}$$

取上述2个值的所有的样本序列就称为样本空间。即

$$\Omega = \{\omega: \omega = (\omega_0 = X_0^{-1}, \omega_1 = X_1^{-1}, \dots)\}。$$

于是,根据条件(1)和(2),对所有的 ω 可以确定其概率。例如,事件 $\{\omega: \omega_0 = \text{成功}, \omega_1 = \text{失败}, \omega_2 = \text{失败}, \omega_3 = \text{成功}, \omega_4 = \text{失败}\}$,概率可表示为 $pqqpq$ 。

现在,我们来考察通过贝努里过程 $\{X_n(\omega): n \in N, \omega \in \Omega\}$ 所获得的下列随机变量 $N_n(\omega)$ 。

$$N_n(\omega) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) & (n=1, 2, \cdots) \end{cases}$$

在此情况下, 样本空间就成为

$$\Omega = \{0, 1, \cdots, n\}$$

根据下列定理, 对所有的 ω 可以确定其概率。

定理 2.1 对于任意的 $n \in N = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$$P\{N_n = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (k=0, 1, \cdots, n) \quad (2.1)$$

证明 分下面两个阶段来进行。

阶段 1 对任意的 n, k 下式成立。

$$P\{N_{n+1} = k\} = pP\{N_n = k-1\} + qP\{N_n = k\} \quad (2.2)$$

首先, 由全概率定理(参见附录中定理 A.4) 可得

$$P\{N_{n+1} = k\} = \sum_j P\{N_{n+1} = k | N_n = j\} P\{N_n = j\} \quad (2.3)$$

注意到, $\{X_1, \cdots, X_n\}$ 与 X_{n+1} 是相互独立的, 所以 $N_n = X_1 + \cdots + X_n$ 与 X_{n+1} 也是相互独立的。

由 $N_{n+1} = N_n + X_{n+1}$, 可得

$$\begin{aligned} P\{N_{n+1} = k | N_n = j\} &= \frac{P\{N_n = j, X_{n+1} = k-j\}}{P\{N_n = j\}} \\ &= P\{X_{n+1} = k-j\} = \begin{cases} p & (\text{当 } j = k-1 \text{ 时}) \\ q & (\text{当 } j = k \text{ 时}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \end{aligned}$$

将上式代入式(2.3) 即可得式(2.2), 阶段 1 的证明完毕。

阶段 2 用归纳法可得式(2.1)。

首先, 当 $n=0$ 时, 可直观地得到 $P\{N_n = 0\} = q^n$ 。

当 $n=m$, 假定对所有的 k , 式(2.1) 成立, 那么, 当 $n=m+1$ 时, 若式(2.1) 也成立, 则该定理成立。当 $n=m+1, k=0$ 时, 由式(2.2), $P\{N_{m+1} = 0\} = p \cdot 0 + q \cdot q^m = q^{m+1}$ 成立。

当 $0 < k \leq m+1$ 时, 再由式(2.2) 得

$$\begin{aligned} P\{N_{m+1} = k\} &= p \frac{m!}{(k-1)!(m-(k-1))!} p^{k-1} q^{m-(k-1)} \\ &\quad + q \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k q^{m-k} \\ &= \frac{(m+1)!}{k!((m+1)-k)!} p^k q^{(m+1)-k} \end{aligned}$$

可知对 $m+1$ 也成立。

定理 2.1 可以容易地推广为下列的定理。

定理 2.2 对任意的 $m, n \in N$, 下式成立。

$$\begin{aligned} P\{N_{m+n} - N_m = k | N_0, \dots, N_m\} &= P\{N_{m+n} - N_m = k\} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

证明 根据 $N_{m+n} - N_m = X_{m+1} + \dots + X_{m+n} = X_1 + \dots + X_n$ 与 $X_i (i = 1, 2, \dots)$ 相互独立的性质, 可得等式的后半部分。等式的前半部分则如下: 由于 $N_0, \dots, N_m$ 或 $X_1, \dots, X_m$ 中的任何一方已被确定的话, 就可以确定另一方, 所以

$$P\{N_{m+n} - N_m = k | N_0, \dots, N_m\} = P\{X_{m+1} + \dots + X_{m+n} | X_0, \dots, X_m\}$$

于是根据上式以及 $\{X_0, \dots, X_m\}$ 与 $\{X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$ 的相互独立性, 定理得证。

下面, 我们将论述利用 $n = m$ 时所得到的未来的参数 $N_m, N_{m+1}, \dots$ 进行预测的有关定理。

定理 2.3 设 Y 为关于某参数 n 的下列随机变量:

$$Y = g(N_m, N_{m+1}, \dots, N_{m+n})$$

此时,

$$E[Y | N_0, \dots, N_m] = E[Y | N_m]$$

即, N_{m-1} 以前的所有参数无效。

证明 因为 $N_{m+1} = N_m + X_{m+1}, \dots, N_{m+n} = N_m + X_{m+1} + \dots + X_{m+n}$, 所以必然存在某函数 h 使

$$Y = h(N_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n})$$

即, 可以写为以下形式:

$$\begin{aligned} E[Y | N_0, \dots, N_m] &= \sum_k \sum_{i_1, \dots, i_n} h(k, i_1, \dots, i_n) P\{N_m = k, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} \\ &= i_n | N_0, \dots, N_m\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

由于 $\{X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$ 与 $\{X_1, \dots, X_m\}$ 相互独立, 因此与 $\{N_0, \dots, N_m\}$ 也相互独立,

$$\begin{aligned} P\{N_m = k, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} = i_n | N_0, \dots, N_m\} \\ = P\{X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} = i_n\} P\{N_m = k | N_0, \dots, N_m\} \end{aligned}$$

利用 $X_{m+1}, \dots, X_{m+n}$ 的独立性,

$$\begin{aligned} \text{上式} &= P\{X_{m+1} = i_1\} \dots P\{X_{m+n} = i_n\} P\{N_m = k | N_0, \dots, N_m\} \\ &= \begin{cases} P\{X_{m+1} = i_1\} \dots P\{X_{m+n} = i_n\} & (\text{当 } N_m = k \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } N_m \neq k \text{ 时}) \end{cases} \end{aligned}$$

将上式代入式(2.5), 可得

$$E[Y | N_0, \dots, N_m] = \sum_{i_1, \dots, i_n} h(N_m, i_1, \dots, i_n) P\{X_{m+1} = i_1\} \dots P\{X_{m+n} = i_n\}$$

即, 与 $N_0, \dots, N_{m-1}$ 独立。由式(A.55)可证上式与 $E[Y | N_m]$ 相等。

上面介绍了贝努里过程 $\{X_n(\omega); n \in N, \omega \in \Omega\}$ 中的成功次数 $N_n(\omega)$, 现在让我们来