高等学校教学用書

解析幾何習題集

Д. В. 克利介尼克著

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析幾何習題集

Д. В. 克利介尼克著
孫福元 胥長辰 楊蔭藩譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的克利介尼克（Д. В. Клетеник）著“解析幾何習題集”（Сборник задач по аналитической геометрии）1950年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教學參考書。

本書第一篇爲平面解析幾何學；第二篇爲空間解析幾何學；附錄爲行列式理論的初步，此外附有習題的答案和提示。

本書由孫福元、胥長辰、楊蔭藩翻譯。

解析几何習題集

Д. В. 克利介尼克著

孙福元　胥長辰　楊蔭藩譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號 77（課 72）　開本 850×1168 1/32　印張 6 2/16　字數 165,000

一九五四年九月上海第一版

一九五七年二月上海第四次印刷

印數 5,601－7,100　　定價（10）¥0.75

原　序

這本習題集對於高等工業學校中按物理數學和一般技術學科的正規教學大綱來進行教學的那些院系裏的解析幾何教程是適合的。而且它並不包含未列高等工業學校教學大綱中解析幾何節目的習題。當編著這本習題集時，作者特別考慮到理論力學的需要，因爲它是首先直接需要解析幾何材料的學科。

這本習題集對於經濟，化學和農業等方面的各院系也可應用；然而不論在編排上，或者在這些院系的專門習題的選取上，沒有考慮到。

根據列入高等工業學校教學大綱中解析幾何的基本問題，本書中的習題要比通常佈置給學生小組或回家作業的多些。同時當使用這本習題集指導實際作業時，教師有選擇材料的可能，而且對於回家作業也可以用幾種不同的方案來佈置。特別重要的是在§16（圓周）裏包含很多的圓周方程式和直線方程式的綜合問題，這樣就使我們得以複習本課程中最重要的一環——平面上的直線方程式。

在學習二次線的理論以後，最好佈置給學生以個人的回家作業——如化一般二次方程式爲標準式；在§22 裏包含了足夠多的數字不同的這類習題。

爲了函授學校的學生和自修高等數學的讀者，作者在每一章開始，除列出應該用到的公式以外，還介紹了所有的基本定義，並敍述了一些定理。

這本習題集是爲了配合葉菲莫夫（Н. В. Ефимов）所編的教科書“解析幾何簡明教程㊀”而編寫的；在編寫這本習題集時，曾考慮到葉菲莫夫那本教材的敍述順序，並且也使用了該書中的記號。

㊀ 此書已有譯本，即胥長辰譯的“解析幾何簡明教程”。

由於莫斯科林業學院高等數學教研室對於這本習題集在編寫上的幫助，和對該書初稿的審閱，作者向他們致以深切的謝意。

德·克利介尼克。

目　　錄

第二篇 空間解析幾何學

第一篇　平面解析幾何學

第一章　平面解析幾何學的簡單問題

§1．　軸和軸上的線段．直線上的坐標

正向選定的直線叫做軸。如果將軸上的 A 和 B 兩點，指定其中一點作爲始點，另一點作爲終點，則界於這兩點間的線段叫做有向線段。始點爲 A 和終點爲 B 的有向線段用記號 $\overline{AB}$ 來表示。軸上有向線段的量是這樣的一個數，它等於線段的長並且帶有符號；如果有向線段的方向(卽從始點到終點的方向)與軸的正向一致時，則取“＋”號，如果與軸的正向相反時，則取“－”號。線段 $\overline{AB}$ 的量用記號 AB 表示，它的長用 $|AB|$ 表示。如果點 A 和 B 重合，則由它們所確定的線段叫做零線段；顯然，在這種情況下 $AB=BA=0$ (零線段的方向應看作是不定的)。

設已知任意直線 a。選取某一線段作爲測量長度的單位，指定在直線 a 上的正向 (因而它就成爲一個軸)，並且用字母 O 註出這條直線 a 上的某一點。因此在直線 a 上便導入坐標系。

直線 a 上任意點 M 的坐標(在所建立的坐標系中)用等於線段 OM 的數 x 表示：

$$x=OM\text{。}$$

點 O 叫做坐標原點；它自己的坐標等於零。以後記號 $M(x)$ 表示坐標爲 x 的點 M。

如果 $M_1(x_1)$ 和 $M_2(x_2)$ 是直線 a 上的任意兩點，則公式

$$M_1M_2=x_2-x_1$$

表示線段 $\overline{M_1M_2}$ 的量，而公式

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|$$

表示它的長。

1．試作點：

$$A(3),\ B(5),\ C(-1),\ D\left(\frac{2}{3}\right).$$

$E\left(-\frac{3}{7}\right)$, $F(\sqrt{2})$ 和 $H(-\sqrt{5})$。

2. 試作其坐標滿足下列方程式的各點。

(1) $|x|=2$; (2) $|x-1|=3$; (3) $|1-x|=2$; (4) $|2+x|=2$。

3. 試描述其坐標滿足下列不等式的點的幾何位置。

(1) $x>2$; (2) $x-3\leqslant 0$; (3) $12-x<0$;

(4) $2x-3\leqslant 0$; (5) $3x-5>0$; (6) $1<x<3$;

(7) $-2\leqslant x\leqslant 3$; (8) $\frac{2-x}{x-1}>0$; (9) $\frac{2x-1}{x-2}>1$;

(10) $\frac{2-x}{x-1}<0$; (11) $\frac{2x-1}{x-2}<1$; (12) $x^2-8x+15\leqslant 0$;

(13) $x^2-8x+15>0$; (14) $x^2+x-12>0$; (15) $x^2+x-12\leqslant 0$。

4. 試確定下列兩已知點間的線段的量 AB 和長 $|AB|$。

(a) $A_1(3)$ 和 $B_1(11)$; (б) $A_2(5)$ 和 $B_2(2)$;

(в) $A_3(-1)$ 和 $B_3(3)$; (г) $A_4(-5)$ 和 $B_4(-3)$;

(д) $A_5(-1)$ 和 $B_5(-3)$; (e) $A_6(-7)$ 和 $B_6(-5)$。

5. 試計算 A 點的坐標，已知：

(1) $B(3)$ 和 $AB=5$; (2) $B(2)$ 和 $AB=-3$;

(3) $B(-1)$ 和 $BA=2$; (4) $B(-5)$ 和 $BA=-3$;

(5) $B(0)$ 和 $|AB|=2$; (6) $B(2)$ 和 $|AB|=3$;

(7) $B(-1)$ 和 $|AB|=5$; (8) $B(-5)$ 和 $|AB|=2$。

6. 試描述其坐標滿足下列不等式的點的幾何位置。

(1) $|x|<1$, (2) $|x|>2$; (3) $|x|\leqslant 2$;

(4) $|x|\geqslant 3$; (5) $|x-2|<3$; (6) $|x-5|\leqslant 1$;

(7) $|x-1|\geqslant 2$; (8) $|x-3|\geqslant 1$; (9) $|x+1|<3$;

(10) $|x+2|>1$; (11) $|x+5|\leqslant 1$; (12) $|x+1|\geqslant 2$.

7. 試確定點 C 分線段 $\overline{AB}$ 的比 $\lambda=\frac{AC}{CB}$，當已知：

（1）$A(2)$，$B(6)$和$C(4)$；（2）$A(2)$，$B(4)$和$C(7)$；

（3）$A(-1)$，$B(5)$和$C(3)$；（4）$A(1)$，$B(13)$和$C(5)$；

（5）$A(5)$，$B(-2)$和$C(-5)$。

8．試確定已知點$M(x)$分兩個已知點$M_1(x_1)$和$M_2(x_2)$間的線段$\overline{M_1M_2}$的比$\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$。

9．試確定M點的坐標x，已知它分兩已知點$M_1(x_1)$和$M_2(x_2)$間的線段$\overline{M_1M_2}$的已知比爲$\lambda\left(\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}\right)$。

10．試確定兩個已知點$M_1(x_1)$和$M_2(x_2)$間的線段中點的坐標x。

11．試確定下列兩個已知點間的線段中點的坐標x。

（1）$A(3)$和$B(5)$；（2）$A_1(-1)$和$B_1(5)$；

（3）$M_1(-1)$和$M_2(-3)$；（4）$P_1(-5)$和$P_2(1)$；

（5）$C(3)$和$D(-4)$。

12．試確定M點的坐標，當已知：

（1）$M_1(3)$，$M_2(7)$和$\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}=2$；

（2）$A_1(2)$，$B_1(-5)$和$\lambda=\dfrac{A_1M}{MB_1}=3$；

（3）$C(-1)$，$D(3)$和$\lambda=\dfrac{CM}{MD}=\dfrac{1}{2}$；

（4）$A_2(-1)$，$B_2(3)$和$\lambda=\dfrac{A_2M}{MB_2}=-2$；

（5）$A_3(1)$，$B_3(-3)$和$\lambda=\dfrac{B_3M}{MA_3}=-3$；

（6）$A_4(-2)$，$B_4(-1)$和$\lambda=\dfrac{B_4M}{MA_4}=-\dfrac{1}{2}$。

§2．平面上的笛卡兒直角坐標．兩點間的距離．分線段爲已知比

笛卡兒直角坐標系是由一個測量長度的線性單位和兩個互相垂直的軸所確定的，這兩個軸可按任意順序編排。

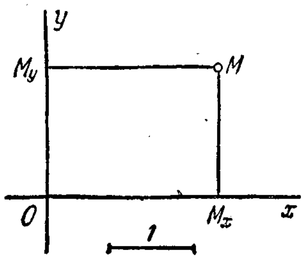

圖 1.

兩軸的交點叫做坐標原點，兩軸本身叫做坐標軸，其中第一軸叫做橫軸，第二軸叫做縱軸。

用字母 O 表示坐標原點，Ox 表示橫軸，Oy 表示縱軸。

在已知坐標系中任意點 M 的坐標（圖 1）用數：

$$x=OM_x,\ y=OM_y$$

來表示，其中 M_x 和 M_y 是點 M 在軸 Ox 和 Oy 上的射影，OM_x 表示橫軸上線段 $\overline{OM_x}$ 的量，OM_y 表示縱軸上線段 $\overline{OM_y}$ 的量。數 x 叫做 M 點的橫坐標，數 y 叫做該點的縱坐標。記號 $M(x;\ y)$ 表示橫坐標是 x 而縱坐標是 y 的點 M。

軸 Oy 分全平面爲兩個半平面；其中位於軸 Ox 正向方面的叫做右半平面，而另一個叫做左半平面。同樣軸 Ox 也分全平面爲兩個半平面；其中位於軸 Oy 正向方面的叫做上半平面，而另一個叫做下半平面。

兩坐標軸共同分平面爲四個象限，按下列法則編序：同時在右半平面和上半平面的叫做坐標的第一象限，同時在左半平面和上半平面的叫做第二象限，同時在左半平面和下半平面的叫做第三象限，同時在右半平面和下半平面的叫做第四象限。

如果在平面上已知兩點：$M_1(x_1;\ y_1)$ 和 $M_2(x_2;\ y_2)$，則它們之間的距離 d 由下列公式確定：

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。$$

如果點 $M(x;\ y)$ 是在過兩已知點：$M_1(x_1;\ y_1)$ 和 $M_2(x_2;\ y_2)$ 的直線上，並且已知數 $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$（其中 M_1M 是有向線段 $\overline{M_1M}$ 的量，而 MM_2 是有向線段 $\overline{MM_2}$ 的量），則點 M 的坐標可按下列公式確定：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。$$

如果點 M 是線段 $\overline{M_1M_2}$ 的中點，則它的坐標可按下列公式確定。

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}。$$

13．試作點：

$A(2;3)$，$B(-5;1)$，$C(-2;-3)$，$D(0;3)$，$E(-5;0)$，$F\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$。

14．試求下列各點在橫軸上的射影的坐標。

$A(2;-3)$，$B(3;-1)$，$C(-5;1)$，$D(-3;-2)$，$E(-5;-1)$。

15．試求下列各點在縱軸上的射影的坐標。

$A(-3; 2)$，$B(-5; 1)$，$C(3; -2)$，$D(-1; 1)$，$E(-6; -2)$。

16．試求與下列各點關於軸 Ox 對稱的點的坐標。

（1） $A(2; 3)$；　（2） $B(-3; 2)$；　（3） $C(-1; -1)$；

（4） $D(-3; -5)$；（5） $E(-4; 6)$；　（6） $F(a; b)$。

17．試求與下列各點關於軸 Oy 對稱的點的坐標。

（1） $A(-1; 2)$；　（2） $B(3; -1)$；　（3） $C(-2; -2)$；

（4） $D(-2; 5)$；　（5） $E(3; -5)$；　（6） $F(a; b)$。

18．試求與下列各點關於坐標原點對稱的點的坐標。

（1） $A(3; 3)$；　（2） $B(2; -4)$；　（3） $C(-2; 1)$；

（4） $D(5; -3)$；　（5） $E(-5; -4)$；　（6） $F(a; b)$。

19．試求與下列各點關於第一象限角的平分線對稱的點的坐標。

（1） $A(2; 3)$；　（2） $B(5; -2)$；　（3） $C(-3; 4)$。

20．試求與下列各點關於第二象限角的平分線對稱的點的坐標。

（1） $A(3; 5)$；　（2） $B(-4; 3)$；　（3） $C(7; -2)$。

21．試確定點 $M(x, y)$所在的象限，如果：

（1） $xy>0$；　（2） $xy<0$；　（3） $x-y=0$；　（4） $x+y=0$；

（5） $x+y>0$；（6） $x+y<0$；（7） $x-y>0$；　（8） $x-y<0$。

22．已知點 $A(0; 0)$，$B(3; -4)$，$C(-3; 4)$，$D(-2; 2)$和 $E(10; -3)$。試確定下列兩點間的距離 d。

（1） A 和 B；　（2） B 和 C；　（3） A 和 C；

（4） C 和 D；　（5） A 和 D；　（6） D 和 E。

23．試證以 $A_1(1, 1)$，$A_2(2; 3)$ 和 $A_3(5; -1)$爲頂點的三角形是直角三角形。

24．試確定以 $M_1(1; 1)$，$M_2(0; 2)$ 和 $M_3(2; -1)$爲頂點的三角形，其中內角有無鈍角。

25．試證以 $M(-1; 3)$，$N(1; 2)$ 和 $P(0; 4)$爲頂點的三角形，其中內角都是銳角。

26. 試在橫軸上求點 M，從它到點 $N(2;\ -3)$的距離等於 5。

27. 試在縱軸上求點 M，從它到點 $N(-8;\ 13)$的距離等於 17。

28. 已知兩點 $M(2;\ 2)$ 和 $N(5;\ -2)$；試在橫軸上求點 P，使角 MPN 成直角。

29. 過點 $A(4;\ 2)$作切於兩坐標軸的圓周。試確定它的中心 C 和半徑 R。

30. 過點 $M_1(1;-2)$作半徑爲 5 且切於軸 Ox 的圓周。試確定這個圓周的中心 C。

31. 試確定點 $M_1(1;\ 2)$關於過點 $A(1;\ 0)$ 和 $B(-1;\ -2)$的直線對稱的點 M_2 的坐標。

32. 已知均質棒的端點坐標爲 $A(3;\ -5)$ 和 $B(-1;\ 1)$。試確定它的重心坐標。

33. 已知均質棒的重心在點 $M(1;\ 4)$上，而它的一個端點在點 $P(-2;2)$上。試確定其餘一個端點 Q 的坐標。

34. 已知三角形的頂點爲 $A(1;\ -3)$, $B(3;-5)$ 和 $C(-5;\ 7)$。試確定它的各邊的中點。

35. 已知兩點：$A(3;-1)$ 和 $B(2;\ 1)$。試確定：

(1)與點 A 關於點 B 對稱的點 M 的坐標；

(2)與點 B 關於點 A 對稱的點 N 的坐標。

36. 已知點 $M(2;-1)$, $N(-1;\ 4)$ 和 $P(-2,\ 2)$是三角形各邊的中點。試確定它的頂點。

37. 已知平行四邊形的三個頂點爲 $A(3;-5)$, $B(5,-3)$和 $C(-1;\ 3)$。試確定與 B 相對的第四個頂點 D。

38. 已知平行四邊形的相鄰兩個頂點 $A(-3;\ 5)$, $B(1;\ 7)$和它的對角線的交點 $M(1;\ 1)$。試確定其他兩個頂點。

39. 已知三角形頂點 $A(1;\ 4)$, $B(3;-9)$, $C(-5;\ 2)$。試確定從頂點 B 引出的中線之長。

40. 將點 $A(1;-3)$ 和 $B(4;3)$ 間的線段分成三等分。試確定這兩分點的坐標。

41. 已知三角形的頂點爲 $A(3;-5)$, $B(-3;3)$ 和 $C(-1;-2)$。試確定內角 A 的平分線之長。

42. 已知三點 $A(1;-1)$, $B(3;3)$ 和 $C(4;5)$在同一直線上。試確定其中每一點分其他兩點間線段之比 λ。

43. 試確定被點 $P(2;2)$ 和 $Q(1;5)$ 分成三等分的線段的端點 A 和 B 的坐標。

44. 已知均質三角板頂點 $A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$ 和 $C(x_3;y_3)$。試確定其重心的坐標。

提要　重心在三角形三條中線的交點上。

45. 已知三角形中線的交點 M 在橫軸上，它的兩個頂點是 $A(2;-3)$ 和 $B(-5;1)$，而第三個頂點 C 在縱軸上。試確定點 M 和 C 的坐標。

46. 在三角形頂點 $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ 和 $C(x_3;y_3)$所集中的質量是 m, n 和 p, 試確定這個三角形的重心坐標。

§3. 極坐標

極坐標系是由叫做極的某已知點 O，和從這點引出的叫做極軸的射線 OA，以及用以測量長度的尺度所確定的。此外，對於這種極坐標系應當指定繞點 O 如何旋轉才算作正旋轉（在圖中通常以與時鐘指針相反的旋轉作爲正旋轉）。

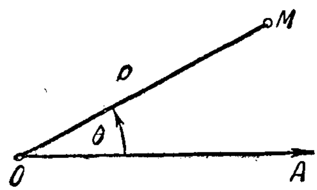

圖 2.

數 $\rho=OM$ 和 $\theta=\measuredangle AOM$ 叫做任意點 M 的極坐標（對於現在的坐標系而言）（圖 2）。此時角 θ 必須了解其與三角學中所採用的角一樣。數 ρ 叫做點 M 的第一坐標或極半徑，數 θ 叫做第二坐標或極角（θ 也叫做幅角）。

記號 $M(\rho,\theta)$是表示具有極坐標 ρ 和 θ 的點 M。

極角 θ 有無限多個可能的值（它們彼此相差以 $\pm 2n\pi$, n 是正整數）。滿足不等式 $-\pi<\theta\leqslant+\pi$ 的極角的值叫做主值。以後常用極角的主值。

當同時研究笛卡兒和極坐標系時，我們規定：(1)使用同一的尺度；(2)當確定極角時，

使橫軸的正半軸由捷徑旋轉到與縱軸的正半軸重合，這樣的旋轉，作爲正旋轉（因此，如果笛卡兒坐標系的軸在通常的位置，也就是說軸 Ox 指向右方，軸 Oy 指向上方，則極角的計算通常以反時針旋轉的角作爲正角）。

如果在極坐標系的極與笛卡兒直角坐標系的原點重合，而極軸與橫軸的正半軸重合的條件下，則從任意點的極坐標變換爲同一點的笛卡兒坐標，可按公式：

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

在這種情況下，公式

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$$

是從一點的笛卡兒坐標變換爲極坐標的公式。

以後當同時研究兩種極坐標系時，我們認爲在兩個坐標系中，正旋轉的方向和尺度都是一樣的。

47. 試作已知極坐標的點：

$$A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right),\quad B(2;\ \pi),\quad C\left(3;\ -\frac{\pi}{4}\right),$$

$$D\left(4;\ 3\frac{1}{7}\right),\quad E(5;\ 2),\quad F(1;-1).$$

（對於點 D、E 和 F 利用量角規實行近似作圖）。

48. 試確定下列各點關於極軸對稱的點的極坐標。

$$M_1\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right),\ M_2\left(2;-\frac{\pi}{2}\right),\ M_3\left(3;-\frac{\pi}{3}\right),\ M_4(1;\ 2)\ \text{和}\ M_5(5;-1).$$

49. 試確定與下列各點關於極對稱的點的極坐標。

$$M_1\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right),\ M_2\left(5;\frac{\pi}{2}\right),\ M_3\left(2;-\frac{\pi}{3}\right),\ M_4\left(4;\ \frac{5}{6}\pi\right)\ \text{和}\ M_5(3;-2).$$

50. 如果將極軸的正向變爲負向，試確定下列各點在新坐標系的極坐標。

$$A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right),\ B\left(2;-\frac{\pi}{4}\right),\ C(1;\ \pi),\ D\left(5;-\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$E(3;\ 2)\ \text{和}\ F(2;-1)$$

51. 已知下列各點的極坐標：

$$M_1\left(3;\ \frac{\pi}{3}\right),\quad M_2\left(1;\ \frac{2}{3}\pi\right),\quad M_3(2;\ 0),$$

$$M_4\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right),\ M_5\left(3;-\frac{2}{3}\pi\right)\ 和\ M_6\left(1;\ \frac{11}{12}\pi\right)。$$

如將極軸旋轉到通過點 M_1 的新位置。試確定已知點在新（極坐標）系中的坐標。

52．已知點 $M_1\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $M_2\left(8;-\frac{\pi}{12}\right)$ 的極坐標。試計算這兩點之間的距離 d。

53．已知點 $A\left(8;-\frac{2}{3}\pi\right)$ 和 $B\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$。試計算聯結這兩點所成線段的中點的極坐標。

54．已知三角形 OAB 的一個頂點在極 O 上，而其他兩個是點 $A\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$ 和 $B\left(4;\ \frac{\pi}{12}\right)$。試計算這三角形的面積。

55．極坐標系的極與笛卡兒直角坐標系的原點重合，而極軸與橫軸的正半軸重合。已知下列各點的極坐標：$M_1\left(6;\ \frac{\pi}{2}\right)$，$M_2(5;0)$，$M_3\left(2;\ \frac{\pi}{4}\right)$，$M_4\left(10;-\frac{\pi}{3}\right)$，$M_5\left(8;\ \frac{2}{3}\pi\right)$，$M_6\left(12;\ -\frac{\pi}{6}\right)$。試確定這些點的笛卡兒坐標。

56．極坐標系的極與笛卡兒直角坐標系的原點重合，而極軸與橫軸的正半軸重合。已知下列各點的笛卡兒直角坐標：$M_1(0;\ 5)$，$M_2(-3;\ 0)$，$M_3(\sqrt{3};\ 1)$，$M_4(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$，$M_5(1;-\sqrt{3})$。試確定這些點的極坐標。

§4．向量的概念．向量在坐標軸上的射影．向量的模和幅角．兩向量間的角．兩向量共線和垂直的條件．向量在任意軸上的射影．三角形的面積

如果指定直線線段的兩個端點，哪一個作為始點，哪一個作為終點，則這個線段叫做有向線段。有向線段也常叫做幾何向量，或簡稱向量。如果向量的始點和它的終點重合，則這向量叫做零向量；零向量的方向看作是不定的。在圖上向量表示成矢的形狀（見圖 3，表示始點為 A 終點為 B 的向量）。在本書中向量是用兩個大楷的拉丁字母在上面畫一橫線來表示，並且第一個字母表示向量的始點，第二個表示它的終點；或者用一個粗體的小楷拉丁字母來表

示，它在圖上寫在表示向量的矢的終點附近。

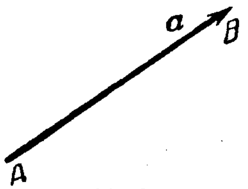

圖　3.

在平行直線上或同一直線上的向量，如果它們的方向相同，並且長度相等，則它們叫做相等向量。

等於向量之長的數（當尺度給定時），叫做向量的模。向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用記號 $|\boldsymbol{a}|$ 或 a 來表示。如果 $|\boldsymbol{a}|=1$，則向量 $\boldsymbol{a}$ 叫做單位向量。

向量 $\overline{AB}$ 在軸 u 上的射影，是等於線段 $\overline{A_1B_1}$ 的量，其中點 A_1 是點 A 在軸 u 上射影，B_1 是點 B 在軸 u 上的射影。

用記號 $\text{пр}_u\overline{AB}$ 表示向量 $\overline{AB}$ 在軸 u 上的射影。如果用記號 $\boldsymbol{a}$ 表示向量，則它在軸 u 上的射影常用 $\text{пр}_u\,\boldsymbol{a}$ 來表示。

向量 $\boldsymbol{a}$ 在軸 u 上的射影，用它的模和它對於軸 u 的斜角 φ 表示時，是公式：

$$\text{пр}_u\,\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi\,。$$

如果在平面上已知笛卡兒直角坐標系，則向量 $\boldsymbol{a}$ 在軸 Ox 上的射影用記號 X 表示，它在軸 Oy 上的射影用記號 Y 表示。

等式

$$\boldsymbol{a}=\{X;\ Y\}$$

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐標軸上的射影是數 X 和 Y。

向量 $\boldsymbol{a}$ 的射影 X 和 Y 也叫做它的笛卡兒坐標。

如果已知點 $M_1(x_1;\ y_1)$ 和 $M_2(x_2;\ y_2)$ 的坐標，則向量 $\overline{M_1M_2}=\{X;\ Y\}$ 的坐標可按下列公式計算：

$$X=x_2-x_1;\quad Y=y_2-y_1\,。$$

因此，要想求向量的坐標，就必須從它的終點坐標減去始點的對應坐標。

旋轉正半軸 Ox，使它的方向與向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致時所得的角 θ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的幅角。

角 θ 顯然如同三角學中的角一樣。因此，θ 有無限多的可能值，而它們彼此相差以 $\pm 2n\pi$（n 是正整數）。其中能滿足不等式：$-\pi<\theta\leqslant+\pi$ 的值叫做幅角的主值。

向量 $\boldsymbol{a}$ 的模和它的幅角，也叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的極坐標。

公式

$$X=|\boldsymbol{a}|\cos\theta,\quad Y=|\boldsymbol{a}|\sin\theta$$

是用向量 $\boldsymbol{a}$ 的極坐標，卽用模和幅角，表示它的笛卡兒坐標的表達式。因此得到用向量的笛卡兒坐標 X、Y 表示模和幅角的公式：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X^2+Y^2}$$

和

$$\cos\theta=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \sin\theta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\,。$$

向量：

$$\boldsymbol{p}=\{X_1;\ Y_1\}\ \text{和}\ \boldsymbol{q}=\{X_2;\ Y_2\}$$

間的夾角 φ 可按下列公式計算：

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}$$

十七