



# 工科基础数学实验

边馥萍 孟繁桢 董文军 韩 健

天津大学出版社

## 内 容 提 要

本书结合大学工科基础数学以及数学软件 Mathematica 介绍了数学实验的方法和内 容,给出了 Mathematica 的运行环境、安装和试运行、基本功能以及常用函数的命令使用方法及示例。本书是帮助本科生、研究生学好数学的一本实用教材,也可供工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

工科基础数学实验/边馥萍等编著. —天津:天津大学出版社,1999.10

ISBN 7-5618-1253-1

I.工... II.边... III.数学-实验-高等学校-教材  
IV.01-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 51851 号

出 版 天津大学出版社  
出版人 杨风和  
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)  
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742  
印 刷 天津市宝坻县第二印刷厂  
发 行 新华书店天津发行所  
开 本 850mm×1168mm 1/32  
印 张 6.625  
字 数 173 千  
版 次 1999 年 11 月第 1 版  
印 次 1999 年 11 月第 1 次  
印 数 1~5 000  
定 价 10.00 元

# 前 言

数学和计算机有着密不可分的关系。当计算机问世时,主要是进行数学方面的数值计算,但是随着计算机软件和硬件的发展以及计算机的应用领域的不断扩大,越来越多的非数值数据也需要处理。对于数学研究本身来说,除了数值计算外,其大部分工作是进行公式推导、理论证明,而这些又都是对字符进行处理,也就是非数值性的运算。数学促进了计算机科学的发展,反过来,计算机的发展又为数学的研究提供了科学的现代化的工具。数学家希望有现代化的工具进行数学公式的推导和理论的证明,用先进的运算工具代替人工进行繁琐的符号运算,加快数学研究的步伐。而另一方面,工程技术人员在解决实际问题时,对于由实际问题抽象成的数学模型的正确性,需要进行数学的逻辑推理来验证,要快速准确地完成这些科学的论证,只是凭传统的方法用笔和纸是很难胜任的,这也需要先进的数学工具来完成。大学的老师和学生在进行数学的教和学的过程中,长期以来是老师在课堂上讲,学生课下作练习,但这种传统的教学方法已逐渐不适应现代化社会进步的需求,不利于培养学生的动手能力和解决实际问题的能力。如果数学教学也像其它学科,比如像物理和化学那样,除了课堂教学以外,增加一个实验环节,把课堂教学和实际操作结合起来,给学生实践的机会,将某些抽象的思维过程具体化、形象化,这样就有利于提高学生的学习兴趣,保证教学质量,促进教学改革。要进行这样的数学教学新的内容,就必须有适应数学课特征的实验环境。计算机的发展为人们进行数学实验提供了可能。作为实验工具,把计算机引入到数学的研究中,也就是把传统的用笔和纸进行数学公式的

推导和演算的一些工作让计算机来完成,这种用计算机作数学的方法称作数学实验。虽然这个定义还不太确切,但这种把计算机作为工具研究和学习数学的方法,确实达到了通过实践的手段来实现数学的研究和学习的目的。数学实验为那些从事与数学研究有关的人们提供了实验手段和研究工具,有着非常重要的作用,代表着数学研究的方向,是未来科学研究中不可缺少的方法。

数学实验与其它实验一样也要有实验的环境,数学实验的环境是计算机以及与之配套的数学软件。当前数学软件 Mathematica 被越来越多的人认识和使用。Mathematica 软件系统是美国 Wolfram 公司开发的一个功能强大的计算机数学系统。它提供了范围广泛的数学计算功能,支持在各个领域工作的人们作科学研究和工程中的各种计算,对于简单的问题,如求函数表达式的极限、微分、积分、多项式的因式分解、求代数方程的解等,只要输入符号表达式,计算机就可以自动完成原来需要人进行的许多复杂的计算工作,直接得出表达式的数学计算的结果。而对于复杂的问题,使用该软件提供的程序设计语言,编写应用程序,在此数学软件系统下运行,可以求出满足要求的结果。同时该数学软件具有很好的作图功能,它能够提供单元函数和多元函数的平面和立体图形,对于用笔和纸难于实现的立体图形,可以快速地计算机的屏幕上形象地显示出来,直观形象地表达出变量之间的依赖关系,以及函数随自变量变化的变化趋势。通过图形显示有利于人们迅速掌握函数特征,图形的直观和形象的表达对于使用数学进行理论推导和工程计算的人,增强了逻辑思维和想象的能力。

本书作为数学实验的教材,介绍了数学实验的系统软件 Mathematica 数学软件的功能及使用方法,使数学工作者及工程技术人员学习这些内容并通过上机实习能够很快地掌握数学软件的使用方法,理解数学实验的方法和内容,并利用 Mathematica 数学软件提供的程序设计语言编写应用程序解决比较复杂的问题,

达到用现代化的工具去开拓数学研究的新领域,快速解决工程技术上的数学疑难问题的目的。同时,本书还是工科基础数学的一个配套教材,学生通过课堂教学,学习了一定的理论知识以后,再通过学习数学实验课程,使用计算机进行实际操作,增强对课堂所学知识理解,提高学习数学的兴趣。使学生不但可以掌握一种非常有用的数学工具,而且对于学习其它类似的计算机系统也会有极大的帮助,从而在大学低年级就有了熟练使用计算机的本领,为后续课程用计算机解决专业问题打下了一个好的基础。

数学实验是一项新方法、新技术和新课题,国内外尚缺乏较定型的教材。由于本书是在有限时间内完成的,加上作者水平所限,书中难免有错误和不妥之处,恳请读者提出宝贵意见。

**编著者**  
1998.10

# 目 录

<b>第 1 章 计算机数学实验的方法和内容</b> .....	(1)
1.1 计算机数学实验简介 .....	(1)
1.2 数学实验的内容 .....	(2)
1.3 数学实验的优点 .....	(4)
1.4 数学实验的局限性 .....	(5)
<b>第 2 章 Mathematica 软件简介</b> .....	(7)
2.1 Mathematica 系统 .....	(7)
2.2 Mathematica 安装和试运行 .....	(8)
<b>第 3 章 Mathematica 的基本功能</b> .....	(11)
3.1 数值运算.....	(11)
3.2 函数.....	(14)
<b>第 4 章 Mathematica 系统的表及其操作</b> .....	(17)
4.1 表的概念.....	(17)
4.2 表的操作.....	(18)
4.3 表的应用.....	(20)
<b>第 5 章 Mathematica 系统的作图功能</b> .....	(24)
5.1 二维函数作图.....	(24)
5.2 二维参数图形.....	(29)
5.3 三维函数作图.....	(30)
5.4 三维参数图形.....	(33)
<b>第 6 章 Mathematica 系统的程序设计</b> .....	(35)
6.1 程序中的局部变量.....	(35)
6.2 程序的结构.....	(36)

6.3	程序包括构	(38)
<b>第7章</b>	<b>单元函数微分</b>	(40)
7.1	求极限	(40)
7.2	求导数与微分	(45)
7.3	函数的泰勒级数展开	(53)
<b>第8章</b>	<b>单元函数积分</b>	(61)
8.1	不定积分	(61)
8.2	定积分	(63)
8.3	广义积分	(66)
<b>第9章</b>	<b>多元函数微分</b>	(70)
9.1	求偏导数	(70)
9.2	微分算子	(78)
<b>第10章</b>	<b>多元函数积分</b>	(84)
10.1	重积分	(84)
10.2	曲线积分	(89)
10.3	曲面积分	(91)
<b>第11章</b>	<b>级数</b>	(102)
11.1	函数的幂级数展开	(102)
11.2	函数的傅立叶级数展开	(104)
<b>第12章</b>	<b>微分方程</b>	(108)
12.1	常微分方程的分析解	(108)
12.2	常微分方程的数值解	(116)
<b>第13章</b>	<b>矩阵、行列式与线性方程组</b>	(119)
13.1	矩阵与矩阵运算	(119)
13.2	线性方程组	(126)
<b>第14章</b>	<b>数学实验综合应用</b>	(134)
14.1	放射链的问题	(134)
14.2	电脑化断层摄影术的迭代重构	(142)



14.3	生物动力学中的一个放射性轨迹问题·····	(154)
14.4	建造三级火箭发射人造卫星·····	(160)
14.5	灌木植被土地管理的最优控制·····	(166)
附录	<b>常用 Mathematica 系统函数使用方法</b> ·····	(177)

# 第 1 章 计算机数学实验的方法和内容

## 1.1 计算机数学实验简介

实验,顾名思义就是对理论知识进行实际验证。对于化学、物理这样的课程,当我们在课堂上或是书本上学完一些化学和物理知识后,既可以通过自然现象,也可以在实验室做实验进行验证。这样,理论和实践相结合,能够更好地理解书本上所学的知识,加深印象,牢固掌握所学内容。而对于数学这门学科由于其自身的特性,要真正达到像化学和物理那样进行实验是比较困难的,但是可以根据它的特征,改进学习方法,加进新的内容,特别是用现代化的学习工具,帮助我们加快掌握这门学科知识。计算机科学的发展,为我们学习数学提供了一个科学的现代化的环境,把计算机引入到数学学习中,使用计算机进行数学运算,就能提高数学学习的效率。我们把这种用计算机代替纸和笔以及人的部分脑力劳动进行数学学习的手段称作数学实验。

数学运算基本上可以分成纯数值计算和符号运算两类。纯数值的计算包括求函数的值、方程的数值解、矩阵的特征值、科学计算中的浮点运算等。计算机的出现把人们从这些繁琐的数值运算中解放出来,从简单地求代数方程组的解到进行天气预报或航天飞行,都可以通过使用计算机进行数值计算来完成。用计算机解决这类问题是利用程序设计语言编写程序来实现的,即使是简单的公式代入,也要有相对应的程序才能完成。而用于数学实验的数学软件有其独特的功能,简单的问题只要按规则输入表达式就可以直接得到结果,复杂的问题也可以用数学软件提供的语言编写程序完成。这种程序设计语言简单且容易掌握。符号运算可以归结

到非数值运算方面,它是数学实验中的一个主要方面。公式的推导、理论的证明都离不开数学符号的运算,比如,多项式的分解,函数的求导,求不定积分、定积分等都是符号的运算,它和数值计算一样,也是一个相当复杂的工作。例如,要求一个函数的导函数,涉及到初等函数的求导、复合函数的求导及最后合并同类项等过程,才能得到最后结果,这样求出的结果是否正确,还有待于验证。对运算者来说,除了要牢记初等函数的求导公式外,还要有比较高的运算技巧,以及在运算过程中不能出现差错。对于一般的工程技术人员,经常需要实际问题的数学模型,有了数学模型后希望通过运算快速得到一个满意的结果,至于中间的推导过程如何,不是他们关心的问题。对于学习数学的学生来说,为了熟悉讲课内容,要作大量的练习,每一道练习题都需要按步骤来求结果,结果正确,运算步骤和采用的运算方法才可能是正确的,虽然得到了最后的表达式,而要保证这一结果的正确性,就要付出更多的时间和付出更多的劳动,数学实验正好弥补了以上这些不足。

课堂教学中的作图,可以使某些抽象思维形象化,帮助同学理解问题。但准确形象地画出单元函数,特别是多元函数的图形,是比较困难的,如果使用数学实验的软件,这些问题就比较容易解决了。

## 1.2 数学实验的内容

### 1.2.1 数值计算,符号演算,图形描绘

数学实验的应用范围比较广。它可以进行数的运算,即包含整数、有理数、浮点数的各种形式的运算,同时可以求出常数的初等函数值;还可以求一些数学常数,比如圆周率 $\pi$ 、自然对数的底 $e$ 的不同精度的值。它可以做多项式的各种计算(四则运算、展开和因式分解等)和有理式的各种计算,还可以求多项式方程、有理式

方程和超越方程的精确解和近似解,做数值的或一般表达式的向量和矩阵的各种计算,进一步可以进行比较复杂的符号运算,比如求一般表达式的极限、导函数,求积分,做幂级数展开,求解某些微分方程等。利用数学实验的软件,可以非常方便地作出以各种方式表示的一元和二元函数以及参量函数的图形,在图形表达式中可以根据需要自由地选择画图的范围和精确度,描绘的图形形象逼真。通过图形可以加深数学概念的理解。

数学实验所用数学软件提供了程序设计的功能,与其它程序设计语言一样,可以编写应用程序解决复杂的问题。数学实验的程序设计语言简单明了,它是以求解单一问题的语句为主,通过人机对话的形式,在屏幕上显示所求的结果,把这样的语句通过控制语句和连接语句按顺序结合成一个整体,就生成了程序。在程序中,既有数值计算语句,又有符号运算和绘图等各种语句。也可以把这样的程序作成程序包,在同种类型的运算中进行调用。它可以与数学实验系统软件提供的程序包同样使用。

### 1.2.2 结合课堂教学进行数学实验

与工科基础数学教学内容相结合,进行数学实验,对现行的数学教学方法进行改革,是当前数学教改的一个重要内容。长期以来,数学教学一直遵循老师课堂讲解,学生课下做习题的模式,这样的教学方法虽然收到了一定的教学效果,但是,它不适应现代社会发展的要求。

数学实验课把计算机的应用引入到数学教学的过程中。为了加深同学对概念的理解,教师在课堂讲解概念阶段,可以充分利用数学实验中计算机的画图功能,用图形来说明概念,例如,在讲解极限问题时,先给出函数的图形,然后,在计算机上显示函数随自变量的变化情况,以及自变量趋近某一定值时函数的变化趋势;在讲解多元函数的概念时,很难在黑板上画出二元函数的立体图形,但是可以通过计算机的屏幕,利用颜色和阴影形象地把图形显示

出来,增强同学的立体形象思维能力;在讲解导数应用的作图时,可以迅速作出函数的图形,从而简化了求导数、拐点、渐近线等过程。

在基础数学的教学过程中,可以布置部分练习,由学生利用数学实验去完成,并对练习的结果进行验证。数学实验安排在学生做了一定数目的练习后。上机实验时,学生输入已经做过的习题,计算机输出运算结果。通过比较手工计算与计算机计算的结果,来检验自己在掌握概念和运算技巧上是否存在问题,从而有的放矢地去学习。

### 1.2.3 培养同学解决实际问题的能力

数学是从生产与生活中抽象总结出来的科学,并应该应用它去实际问题。长期以来一些学生学完工科基础数学以后,认为只有到学习专业课程时才能用到一部分数学知识,因而缺乏利用数学知识和手段解决实际问题的能力。开设数学实验课,给学生创造培养动手能力的环境条件,并给出某些有关自然科学或社会科学的综合性问题,让同学根据所学的知识,用数学实验提供的程序设计语言去编写应用程序来解决这些问题。这样,学生在熟悉了计算机,提高了编写程序能力的同时,掌握了所学知识,又增强了动手能力。掌握数学软件也为以后学习专业课打下了一个很好的基础。

## 1.3 数学实验的优点

数学实验配合工科基础数学的教学无疑增加了数学这门课程的实践性,提高了同学学习数学的兴趣。同时,数学实验软件也是使用数学这门学科进行科学研究和工程设计的理想的大的计算机,是学习数学这门学科的理想辅助工具。比如,作为计算器,当需要进行数的运算时,输入一个数的函数式,就可以迅速求出有关

数的满足精度函数值。例如,要计算  $100!$ ,只要输入  $100!$ ,屏幕上马上就显示出  $100!$  的精确值:

100!

9332621544394415268169923885626670049071596826438162  
14685929638952175999932299156089414639761565182862536979  
20827223758251185210916864000000000000000000000000000000

对上述结果,如果仅需要 5 位有效数字,则输入

$N[100!,5]$

再如计算  $\sin 1$  的值,只要输入

$N[\sin[1],8]$

就可以得到一个 8 位的  $\sin 1$  近似值

0.84147098

同样,如果把方括号中的 8 改为 20,则可以得到一个 20 位的  $\sin 1$  近似值

0.84147098480789650665

也就是可以指定有效数字位数以得到不同精度的近似值,这是一般计算器难以达到的。虽然也可以用一般的程序设计语言编写程序,但是为了求这样一个值去编写和调试程序,从时间上讲显然是划不来的,特别是对于不懂程序设计的人来说,实现起来更为困难。

数学实验软件可以比较容易地实现数学运算中的符号运算、数值运算及表示不同数学函数图形,因此它为人们学习数学提供了一个现代化的工具。

## 1.4 数学实验的局限性

数学实验是借助计算机来帮助人们学习、进行科学研究的一种手段,虽然能够代替人来进行某些数学运算,但是正像计算机不

能完全代替人进行工作一样,它也不可能完全代替人,也有它的局限性。首先这种软件系统对硬件有较高的要求,需要有较多的外存空间安装该软件系统,同时也需要有较大的内存支持该软件的正常运行,它的运行时间长于一般的程序设计语言编写的程序,因此对于低档次的计算机来说,仍然会给使用者带来许多不便;对于版本比较低的数学软件,一些数学符号的表示还不太规范,对使用者也是不方便的。另外,它虽然可以处理比较复杂的符号表达式,但是有些简单的问题却可能做不出结果。

数学实验软件虽然对于给出的符号表达式可以很快求出结果表达式,但是不以给出中间运算步骤,因此不能对问题进行分析。同时有些人使用了本系统后产生误解,认为没有必要再学习数学理论和做大量的数学习题,只要把运算公式输入计算机,由计算机输出结果就可以了。所以在这里我们再次强调进行数学实验,只是一个辅助手段,代替不了数学理论学习和数学习题的练习。

数学实验软件虽然包含了大量的数学知识,但是相对于数学这门学科来说,这些仅仅是其中很少的一部分。对于有些复杂的数学运算问题,虽然可以通过数学实验软件提供的语言编写程序来解决,但主要是依赖于程序设计,显示不出数学实验软件本身的优越性,而且对于有些问题用数学实验软件根本就不能解决。

作为一种计算机语言,数学实验软件比一般的程序设计语言要复杂得多,它有很多内部函数,只有熟悉这些内部函数及程序设计方法,才能熟练地解决比较复杂的数学问题。

## 第 2 章 Mathematica 软件简介

### 2.1 Mathematica 系统

Mathematica 系统是美国物理学家 Stephen Wolfram 领导的 Wolfram 研究公司开发的。1987 年该公司开发出了 Mathematica 系统的 1.0 版,1989 年推出了改进的 1.2 版,作为数学软件被广泛使用。1991 年该公司又推出了 2.0 版,对原系统进行了扩充,增加了 200 多个系统函数和变量。随着计算机硬件和软件不断发展,Mathematica 系统也在逐步完善和更新,适合高档计算机的版本也不断被推出。本书用 Mathematica 2.2 版进行讲解,其基本原理也适合更高版本的 Mathematica 系统软件。

Mathematica 基本系统主要是用 C 语言开发的,因此可以比较容易地移植到各种计算机和运行环境上。在微型机上使用的有适于 MS-DOS 平台的版本,硬件一般要求有 4MB 内存并且有一定的硬盘空间用于放置系统的临时文件;另外,还有适用于 Windows 平台的版本,它的操作界面与 Windows 的图形界面很相似,使用起来比较方便,但是它需要占用比较大的内存,同时运算速度也比较慢。

Mathematica 系统是一个交互式的计算机系统,也就是用户通过输入设备给系统发出计算指令,系统在完成了给定的计算工作后把计算结果告诉用户,在这方面 Mathematica 系统似乎类似于一个大的计算器。Mathematica 系统不仅可以处理数值的运算,也能处理用符号组成的数学表达式,同时还可以进行函数表达式的图形显示。对于更加复杂的问题,还可以利用 Mathematica 系统提供的程序设计语言编写应用程序求得问题的解。



## 2.2 Mathematica 安装和试运行

### 2.2.1 Mathematica 系统的安装

PC 机用的 Mathematica 2.2 版共有 4 张 3.5 英寸的软盘,可以在 DOS 平台和 Windows 平台下安装使用。在 DOS 平台下安装,需要 2MB 的内存和不低于 12MB 的硬盘空间;在 Windows 平台下安装,需要 4MB 的内存和不低于 20MB 的硬盘空间。

在 DOS 平台下如果从软盘驱动器 A 中安装,首先插入 Mathematica 2.2 版的第一张软盘,并输入以下命令

```
A:>minstall
```

以后根据屏幕的提示,顺序装入其它各张软盘,在装入接近结束时,系统会要求打入软件编号和密码,否则系统将不能正常运行。安装完毕后,在指定的系统主目录下可以看到几个子目录和许多文件,运行文件 MATH.BAT,就可以启动 Mathematica 系统。

如果在 Windows 平台下安装 Mathematica 系统,则首先进入 Windows 系统,在软盘驱动器 A 中插入 Mathematica 2.2 版的第一张软盘,在 Windows 系统的主菜单的文件栏中执行“运行”命令,此时屏幕上出现“运行”的选择框,在此选择框中选择“浏览”命令,并在驱动器选择栏中,选择驱动器 A,此时屏幕上显示出 A 盘中的文件,在其中选择文件 Install.exe,则此文件出现在“运行”的选择框中,执行“确定”,此时开始安装 Mathematica 系统,根据屏幕的提示确定安装的子目录、用户名称及单位,然后顺序装入其它各张软盘。在装入接近结束时,系统会要求打入软件编号和密码,否则系统将不能正常运行。也可以在 Windows 系统的屏幕显示的主群组中,选择文件管理器列出的 A 盘程序中的 Install.exe,进行与上同样的操作,同样在 Windows 平台下安装 Mathematica 系