模糊数学原理与方法

MOHU SHUXUE YUANLI YU FANGFA

宋晓秋　编著

中国矿业大学出版社

模糊数学原理与方法

宋晓秋　编著

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书深入而系统地介绍了模糊数学的基本理论、方法与应用。全书共分八章：第一二章分别介绍预备知识与模糊集合的基本理论；第三章至第八章介绍模糊测度与积分理论、模糊规划、模糊关系方程、模糊识别与聚类分析、模糊决策及常用的模糊数学模型。本书叙述清楚、理论严谨、内容丰富，应用具体。书中第四章至第八章的内容独立自足，部分内容反映了这一方面发展的最新成果。每章后均附有习题，供学习时选用。

本书可供从事模糊数学研究与应用的广大科技人员参考，也可作为理工科研究生及高年级本科生的教材；内容经取舍后可作为应用数学、计算机软件、工程力学等专业同类课程的教材或教学参考书；还可供工程技术人员自学参考之用。

责任编辑　陈玉和
责任校对　周俊平

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学原理与方法/宋晓秋编著.—徐州：中国矿业大学出版社，1999.11
ISBN 7-81070-107-X

Ⅰ.模…　Ⅱ.宋…　Ⅲ.模糊数学　Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 40334 号

中国矿业大学出版社出版发行
(江苏徐州　邮政编码 221008)
出版人　解京选
中国矿业大学印刷厂印刷　新华书店经销
开本 787×1092　1/16　印张 18.5　字数 527 千字
1999 年 11 月第 1 版　1999 年 11 月第 1 次印刷
印数 1～1000 册　　定价 25.00 元

序

模糊数学是从数量侧面研究和处理模糊现象的新兴的数学分支，思想可贵、方法独特、应用广泛、发展迅速。目前，模糊数学的理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事、空间技术、自动控制、石油勘探、经济管理、地震预报、气象预报与科学技术中。可以说，在理论联系实际方面，模糊数学是最活跃的数学分支之一。

这本书的编著过程是严谨认真的，基础起点较高。所选内容是模糊数学中基础而又重要的几个方面，进展较快，但本书作者却能够结合自己的研究并博览文献，将这些专题写得较深较透，文笔流畅，理论与方法并重，反映所选专题的一些最新研究成果，并有机地穿插了较多的应用实例，在介绍模糊数学的基本理论与方法方面不失为优秀之作，可作为高等院校有关专业的教材或参考书，也可供从事模糊数学研究与应用的广大科技人员参考。作者用了不太大的篇幅写出深入而丰富的内容，使人读后颇受启发，这是难能可贵的。为此，我高兴地应邀作序，把它推荐给更多的读者。

侯振挺

1997 年 4 月 20 日

前　言

自从1965年L. A. Zadeh发表开创性论文《Fuzzy sets》之后，30多年来，特别是近十余年来，在各界学者特别是数学工作者的艰辛努力下，模糊数学获得了迅速的发展，不仅为计算机科学、系统工程、人工智能、经济管理等学科开辟了新的广阔领域，而且就数学本身来说也增加了新的研究课题，使得模糊数学在理论、方法和应用三个方面都取得了丰硕的成果：今天，它的理论是深刻的，比较系统的，并且是不断发展的；它的方法是有效的，多样化的，又是不断创新的；它的应用是广泛的，富有成果的，还在不断开拓。事实上，模糊数学仍是最活跃的数学分支之一。国际上，自1980年以来，每年均有数十次大中小型国际会议，并于1984年7月成立了国际模糊系统学会(IFSA——The International Fuzzy Systems Association)，办有权威性的国际性杂志《Fuzzy Sets and Systems》，其所发论文均被SCI索引。在我国，蒲保明、刘应明(中科院院士)两位教授1977年率先开始研究，不久后即形成了热潮，研究人员与队伍迅速扩大，至今已在模糊集合论、模糊分析学、模糊代数学和模糊拓扑学这几个模糊数学的主要方面取得了长足的进展，发表了大量高水平的研究论文，出版了专门的书籍，其中以模糊拓扑学发展得最为深入，并于1983年成立了模糊数学学会，从1981年起先后办有《模糊数学》《模糊系统与数学》杂志。许多高等院校已把模糊数学作为理工科研究生、数学或计算机类本科生、工科高年级学生的必修课或选修课程。

本书是作者根据多年的教学经验和积累的资料文献，结合自己的研究成果并经多次修改编撰而成的。编写中，作者做了以下努力：介绍模糊集合的基本理论，模糊测度与模糊积分论；在方法与应用题材上，力求选取方法普遍、适用范围广，有一定的系统且具有特色，以体现模糊数学方法优越性的几个主要方面，如模糊规划、模糊关系方程、模糊识别与聚类分析、模糊决策及常用的模糊数学模型等；尽量做到内容丰富、叙述清楚、理论严谨、层次分明、削枝强干、保证重点，侧重于基本概念、基本理论与基本方法，使得不同专业、不同要求的读者通过适当的选择阅读学习，就能掌握所选专题的基本概况，从而能结合专业实际，做些理论或应用研究工作。各章都配有适量的例题与习题，难度不同，供不同专业的读者灵活选用。本书内容的安排是模块式的，第4章到第8章内容独立自足。

本书可供从事模糊数学研究与应用的广大科技人员参考，可作为数学类、计算机类等专业同类课程的教材或参考书；也可用作理工科研究生及高年级本科生的选修课教材；还可供工程技术人员自学参考之用。

在本书编写过程中，得到各方面的专家与学者的支持、帮助与鼓励。例如，中国管理数学协作会理事长周森棠教授审阅部分手稿并提出许多改进意见；著名数学家侯振挺教授应邀审阅部分手稿并欣然作序；我校应用数学力学系主任潘志教授和前任系主任李安昌教授以及曹德欣教授对本书的出版一直给予极大的鼓励与支持，并提出许多指导性的意见，我校多年来选修模糊数学课程的研究生、本科生也在教学过程中给作者提出了许多要求与建议，并提供一些应用参考文献资料；薛秀谦博士与张建新副教授在使用本书的部分内容为我校研究生授课过程中，也向作者提出了许多建设性的意见，并进行多次讨论；本书责任编辑陈玉和先生为本书的出版付出了辛勤的劳动；还有曹蕾同志帮助整理部分书稿等等，在此一并致谢。

本书的出版得到了中国矿业大学“211工程”建设项目“应用数学学科建设”的资助。由于作者水平有限，书中一定存在缺点与不足之处，恳请同行专家与广大读者批评指正。

作　者

1999年6月于中国矿业大学

目　录

第一章 预备知识

本章介绍一些在模糊数学中经常用到的概念与结论，是阅读本书的基础，已掌握这些工具的读者可以直接学习第二章。由于模糊数学是用经典的数学工具去研究和处理模糊现象的数学分支，因此，常用的经典数学工具在模糊数学中得到了广泛的应用。作为预备知识，本章的内容主要涉及一些在本书中有着直接应用的概念与结论，而这些内容又是一般的科技工作者与攻读非数学专业的本科生与研究生不太熟悉的。由于篇幅的关系，在多数场合下，我们只给出有关的概念与结论，详细的证明细节，读者可以在有关的书籍中查到[18~20]。

§1-1 偏序集与格

一、偏序集与格

定义 1 设 X 为基本集（即是一个确定的非空集合），$\leqslant$ 表示 X 上的一个二元关系，若 $\leqslant$ 满足：

（Ⅰ）自反性 对 $\forall\ x\in X$，有 $x\leqslant x$；

（Ⅱ）反对称性 对 $\forall\ x,y\in X$，若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$，则 $x=y$；

（Ⅲ）传递性 对 $\forall\ x,y,z\in X$，若 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则 $x\leqslant z$。

那么，称 $\leqslant$ 为 X 上的一个偏序关系，称 $(X,\leqslant)$ 为**偏序集**。

在偏序集 $(X,\leqslant)$ 中，若对 X 的任意两个元素 x 和 y，关系 $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 必有一个成立，则 $(X,\leqslant)$ 称为**全序集**。全序集上的序称为全序或良序，因此，全序集也叫良序集或称之为链。不是全序集的偏序集称为**半序集**。半序集上的序关系称为半序。

例 1 设 X 为全体实数构成的集合，“$\leqslant$”是实数间通常的“小于或等于”，那么，$(X,\leqslant)$ 是一个全序集。

例 2 设 $P(X)$ 为 X 的幂集，定义 $P(X)$ 上的序为 X 中子集的包含关系，即对任意的 $A,B\in P(X)$，$A\leqslant B \Leftrightarrow A\subset B$，则“$\leqslant$”是 $P(X)$ 上的一个偏序关系，且 $(P(X),\leqslant)$ 是一个半序集。这是因为，若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\leqslant B$ 和 $B\leqslant A$ 都不成立。

定义 2 设 $(X,\leqslant)$ 为一个偏序集，且 $A\subset X$，$a\in X$。若 $\forall\ x\in A$ 成立 $x\leqslant a$，则称 a 为 A 的一个上界。若 a 是 A 的上界，且对 A 的任一个上界 b 均有 $a\leqslant b$，则称 a 为 A 的**上确界**，记作 $a=\sup A$。元素 $a\in X$ 称为 A 的下界，若 $\forall\ x\in A$ 都有 $a\leqslant x$。元素 $a\in X$ 称为 A 的**下确界**，记作 $a=\inf A$，若 a 是 A 的下界且对 A 的任一个下界 b 都有 $b\leqslant a$ 成立。

定义 3 在偏序集 $(X,\leqslant)$ 中，若任意两个元素 $x,y\in X$，均使得 $\sup\{x,y\}$，$\inf\{x,y\}$ 存在，则称 $(X,\leqslant)$ 为一个**格**。

下面的定理给出了格的另一种等价定义，这在实际应用中是方便的。

定理 1 设 $(X,\leqslant)$ 是一个格，定义两个二元运算“$\vee$”和“$\wedge$”如下：

$$x\vee y\triangleq\sup\{x,y\},\quad x\wedge y\triangleq\inf\{x,y\}$$

分别称 $\vee$ 和 $\wedge$ 为 x 和 y 的上端和下端运算，那么，$\vee$ 和 $\wedge$ 有如下的代数性质：

（Ⅰ）幂等律 $x\vee x=x$，$x\wedge x=x$；

（Ⅱ）交换律 $x\vee y=y\vee x$，$x\wedge y=y\wedge x$；

（Ⅲ）结合律　$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$，$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$；

（Ⅳ）吸收律　$x\wedge(x\vee y)=x$，$x\vee(x\wedge y)=x$。

反之，若在 X 上定义了满足上述（Ⅰ）～（Ⅳ）的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$，且规定对 $\forall\ x,y\in X$，$x\leqslant y\Leftrightarrow x\vee y=y$，那么 $(X,\leqslant)$ 构成一个格。

由定理 1，可得出格的另一种等价定义：若 X 上的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足幂等律、交换律、结合律和吸收律，则称 $(X,\vee,\wedge)$ 为一个格。

下面给出几种特殊的格的概念。

定义 4　设 $(X,\vee,\wedge)$ 是一个格，

（Ⅰ）若对 X 的任一子集 A，$\sup A$ 和 $\inf A$ 都存在，则称 $(X,\vee,\wedge)$ 为**完全格**。特别地，对于完全格，$\sup X$ 和 $\inf X$ 存在，分别记为 $\sup X=1$，$\inf X=0$，称之为 X 的**最大元与最小元**。

（Ⅱ）若对 $\forall\ x,y,z\in X$，恒有分配律

$$(x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z),\qquad (x\wedge y)\vee z=(x\vee z)\wedge(y\vee z)$$

成立，则称 $(X,\vee,\wedge)$ 为分配格。

（Ⅲ）设格 $(X,\vee,\wedge)$ 的最大元 1 和最小元 0 存在，如果对 $\forall\ x\in X$，存在一个元素 $x^c\in X$，使得

$$x\vee x^c=1,\quad x\wedge x^c=0$$

成立，则称 $(X,\vee,\wedge)$ 为**余格**。元素 x^c 称为 x 的补元或余元。

定理 2　设 $(X,\vee,\wedge)$ 是分配余格，那么，对任一元素 $x\in X$，存在惟一的元素 $x^c\in X$，使得 $x\vee x^c=1$，$x\wedge x^c=0$。

证明　若存在另一个 $x'\in X$，使 $x\vee x'=1$，$x\wedge x'=0$，那么

$$x'=1\wedge x'=(x\vee x^c)\wedge x'=(x\wedge x')\vee(x^c\wedge x')=0\vee(x^c\wedge x')=x^c\wedge x'$$

因此，$x'\leqslant x^c$。

$$x'=0\vee x'=(x\wedge x^c)\vee x'=(x\vee x')\wedge(x^c\vee x')=1\wedge(x^c\vee x')=x^c\vee x'$$

所以 $x^c\leqslant x'$，于是 $x'=x^c$。　□

定义 5　设 $(X,\vee,\wedge)$ 是有最大元 1 和最小元 0 的格。若映射 $c:X\to X$ 满足下列条件：

（Ⅰ）$c(0)=1$；

（Ⅱ）$c(x)$ 是严格递减的；

（Ⅲ）$c(c(x))=x$，$\forall\ x\in X$。

那么，就称 $c(x)$ 为 X 上的**伪余**，而称 $(X,\vee,\wedge)$ 为**可余格**。

关于伪余 $c(x)$，当进行 $\vee$，$\wedge$ 运算时，有如下的性质：

定理 3　设 $(X,\vee,\wedge)$ 为可余格，$c(x)$ 为 X 上的伪余，$x,y\in X$，则

$$c(x\vee y)=c(x)\wedge c(y),\qquad c(x\wedge y)=c(x)\vee c(y)$$

若 $(X,\vee,\wedge)$ 是完全可余格，则对 X 的任一子集族 $\{x_t\}_{t\in I}$，有

$$c(\bigvee_{t\in I}x_t)=\bigwedge_{t\in I}c(x_t),\qquad c(\bigwedge_{t\in I}x_t)=\bigvee_{t\in I}c(x_t)$$

证明　由伪余的定义可知：对 $\forall\ x,y\in X$，有

$$c(x\vee y)\leqslant c(x)\wedge c(y)\tag{1-1}$$

$$c(x\wedge y)\geqslant c(x)\vee c(y)\tag{1-2}$$

以 $c(x)$，$c(y)$ 代替(1-2)中的 x,y，有

$$c(c(x)\wedge c(y))\geqslant x\vee y\tag{1-3}$$

再利用 $c(x)$ 的严格递减性，可得

$$c(x)\wedge c(y)\leqslant c(x\vee y)$$

结合(1-1)可知$c(x\vee y)=c(x)\wedge c(y)$。若将$c(x),c(y)$代替(1-1)中的$x,y$,类似可得$c(x\wedge y)=c(x)\vee c(y)$。

关于定理的另一部分,可以类似地证明。

设$(X,\vee,\wedge)$是完全格,如果X上还定义了伪余$c(x)$,那么,格$(X,\vee,\wedge)$可以表示为$(X,\vee,\wedge,c)$。在这样的格中,我们可以定义拓扑和相应的可测结构。

定义6 设$(X,\vee,\wedge,c)$为可余的完全格,$J\subset X$是X的一个子集,若J满足以下条件:

(Ⅰ)$0,1\in J$;

(Ⅱ)若$\alpha,\beta\in J$,则$\alpha\wedge\beta\in J$;

(Ⅲ)若子集$\{\alpha_t\}_{t\in T}\subset J$,则$\bigvee_{t\in T}\alpha_t\in J$。

那么称J为X上的一个**拓扑结构**,并称$(X,\vee,\wedge,c)$为**拓扑格**。J中的元素$\alpha\in J$称为开元。又若$c(\beta)\in J$,则称β为闭元。

定义7 设$(X,\vee,\wedge,c)$是可余的完全格,$K\subset X$是X的一个子集,若K满足:

(Ⅰ)如果$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}\subset K$,那么$\bigvee_{i=1}^{\infty}\alpha_i\in K$;

(Ⅱ)如果$\alpha\in K$,那么$c(\alpha)\in K$。

则称K为格$(X,\vee,\wedge,c)$上的**σ—代数**。称包含拓扑J的最小σ—代数为**Borel域**。

二、集代数

下面再介绍有关集代数的基础知识。设X是非空集合,$P(X)$是X的幂集,所谓集代数是指在$P(X)$中的代数运算。在$P(X)$中,除了通常的交、并、补三种运算之外,还有一种叫对称差的运算Δ。设$A,B\in P(X)$,称

$$A\Delta B\triangleq(A-B)\cup(B-A)$$

为A与B的**对称差**。设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in P(X)$,若

$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots$$

则称$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为**单调增加集列**。若

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

则称$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为**单调减少集列**。单调增加集列或单调减少集列统称为单调集列。

定义8 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset P(X)$是任意集列,称集合

$$A^*=\{x:x\text{ 属于无限多个 }A_n\}$$

为集合列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$的**上限集**,记作$A^*=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。又称集合

$$A_*=\{x:x\text{ 不属于有限个 }A_n\}$$

为集合列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$的**下限集**,记作$A_*=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。

易证上限集与下限集可以表示为

$$A^*=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\qquad A_*=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

且$A^*\supset A_*$。当$A^*=A_*$时,称$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$有极限,或称$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$**收敛**,且记其公共值为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$。可以证明,单调集列的极限总是存在的,并且当$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调增加集列时,$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$;当$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调减少集列时,$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

现在,我们给出$P(X)$中的代数结构。

定义 9 设 $\mathscr{E}\subset P(X)$ 是 $P(X)$ 的子集族，若对 $\mathscr{E}$ 中的任意两个元素 A,B，有

(Ⅰ) $A\cup B\in\mathscr{E}$，

(Ⅱ) $A-B\in\mathscr{E}$

则称 $\mathscr{E}$ 为集合的**环**，简称为**环**。若(Ⅰ)换成：$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{E}\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{E}$，则称 $\mathscr{E}$ 为 **σ—环**。

定义 10 设 $\mathscr{A}\subset P(X)$ 是 $P(X)$ 的子集族，若对 $\mathscr{A}$ 中的任意两个元素 $A,B\in\mathscr{A}$，有

(Ⅰ) $A\cup B\in\mathscr{A}$，

(Ⅱ) $A^c\in\mathscr{A}$

则称 $\mathscr{A}$ 为集合的代数，简称**代数**。

显然，代数一定是环。事实上，由于 $A-B=A\cup B^c$，并且由 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{A}$ 可推出，$A^c\in\mathscr{A}$，$B^c\in\mathscr{A}$，故由集合运算的 De Morgan 律知

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c\in\mathscr{A}$$

于是 $A\cap B\in\mathscr{A}$，故 $A-B\in\mathscr{A}$。

反之不然。例如，当 $X\notin\mathscr{E}$ 时，则 $\mathscr{E}$ 不是代数。

设 $\mathscr{A}$ 是代数，若 $\mathscr{A}$ 还满足：对 $\mathscr{A}$ 中的任一集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 **σ—代数**。此时，易见也有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$。

定义 11 (Ⅰ) 设 $\mathscr{D}$ 是 $P(X)$ 的任意子集，那么称包含 $\mathscr{D}$ 的最小的环(σ—环、代数、σ—代数)为由 $\mathscr{D}$ 生成的环(σ—环、代数、σ—代数)。

(Ⅱ) 设 $\mathscr{M}$ 是 $P(X)$ 的任一子集族，若对 $\mathscr{M}$ 中的任一单调集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，成立

$$\lim_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{M}$$

则称 $\mathscr{M}$ 为**单调类**。对于 $P(X)$ 的任意子集 $\mathscr{D}$，称包含 $\mathscr{D}$ 的最小单调类为由 $\mathscr{D}$ 生成的单调类，记为 $\mathscr{M}(\mathscr{D})$。

定理 4 (Ⅰ) 设 $\mathscr{A}$ 是一个代数，则 $\mathscr{A}$ 是一个 σ—代数的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为一个单调类。

(Ⅱ) 设 $\mathscr{E}$ 为集 X 的子集所生成的环，则由 $\mathscr{E}$ 生成的单调类 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 与由 $\mathscr{E}$ 生成的 σ—环 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 相等：$\mathscr{M}(\mathscr{E})=\mathscr{R}(\mathscr{E})$。

例 3 $[0,1]$ 中的一切 Lebesgue 可测集构成环，也是 σ—环，并且还是代数，σ—代数。$[0,1]$ 中的一切开集不是环，因为若 A,B 为 $[0,1]$ 中的开集，则 $A-B$ 不一定为开集。

例 4 X 的一切子集所成的类是 σ—环，也是 σ—代数。

例 5 为了给出 $\mathbf{R}^1$ 中常见的环的例子，考察任意半闭区间 $[\alpha,\beta)$，这里 $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$。任何两个半闭区间的差可能是空集 $\varnothing$，也可能是两个互不相交的半闭区间的并：

$$[\alpha_1,\beta_1)\cup[\alpha_2,\beta_2),\ \beta_1<\alpha_2$$

这已不是一个简单的半闭区间了。但这种新的集的差与并至多是有限个半闭区间的并。由此可以看出，$\mathbf{R}^1$ 的子类

$$\{\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i):\alpha_i,\beta_i\in\mathbf{R}^1,n=1,2,3,\cdots\}$$

构成一个环。

§1-2 抽象空间的测度与积分

本节介绍抽象测度与积分的基本知识，它对于学习模糊测度与积分是不可缺少的。抽象测度概括了测度最一般特征，同时能包括种种具体测度而当做特例，它是用抽象的集代数方法来

研究抽象空间上的测度的。读者具有了一般的 Lebesgue 测度与积分的基础知识之后，理解与掌握本节的概念与结论不会有多大困难。我们首先介绍环上的测度，再引入 μ^* 外测度与 μ 可测集的概念，最后讨论 μ 积分及其主要结论。

一、环上测度

定义 12 设 X 为基本集，$\mathscr{R}$ 为 X 的子集类。称定义在 $\mathscr{R}$ 上而取值为实数或无穷大的广义实函数 μ 为**集函数**；若对每个 $E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)\geqslant 0$，则称 μ 为非负的；若 $\mu(E)\neq\pm\infty$（$\forall\ E\in\mathscr{R}$），则称 μ 为有限的；若对 $\mathscr{R}$ 中两两互不相交的序列 $\{E_n\}$，其并 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$，且

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

则称 μ 是 σ—可加的或**完全可加的**。

对于引入环上的测度来说，自然要求 $\mathscr{R}$ 是环或 σ 环。

定义 13 设 $\mathscr{R}$ 是 X 的子集构成的环（或 σ 环），μ 为 $\mathscr{R}$ 上的集函数，若 μ 满足：

（Ⅰ）μ 是非负的；

（Ⅱ）μ 是 σ 可加的；

（Ⅲ）$\mu(\varnothing)=0$

则称 μ 为环（或 σ 环）$\mathscr{R}$ 上的**测度**。当条件（Ⅰ）不要求满足时，这种 μ 称为**广义测度**。此处只讨论测度。

例 6 设 $\mathscr{R}$ 是由整数集的一切子集所成的 σ 环，$E\in\mathscr{R}$，若 E 为有限集，其元素个数为 n，则令 $\mu(E)=n$；若 E 为无限集，令 $\mu(E)=\infty$；再规定 $\mu(\varnothing)=0$。容易验证 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度。

我们所熟知的 $\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度都是测度的例子，当基本集 X 为有界集时，对应于有限测度。关于测度的基本性质在叙述与证明方面都与 Lebesgue 测度情形相似，但要注意一个重要差别，即在证明某个结果时，应直接从定义 13 中条件（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）出发，而不是像 Lebesgue 测度那样，先证明较为简单的结论。

定理 5 设 μ 是 σ 环 $\mathscr{R}$ 上的测度，则 μ 成立下列性质：

（Ⅰ）单调性　若 $E_1,E_2\in\mathscr{R}$，$E_1\subset E_2$，则 $\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2)$；

（Ⅱ）半可加性　若 $E_n\in\mathscr{R}$，$n=1,2,\cdots$，则 $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$；从而推出，若 $E\in\mathscr{R}$，$E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则 $\mu(E)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$。

（Ⅲ）对于 $\mathscr{R}$ 中单调增加集列 E_n，有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

对于 R 中单调减少集列 E_n，若 $\mu(E_1)<\infty$，则有

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

二、环上外测度及其扩张

下面再讨论 σ 环上的外测度及其性质，它是 Lebesgue 外测度的推广，由此引进可测集概念并考虑环上测度的扩张问题。

定义 14 设 X 为基本集，$\mathscr{R}_\sigma$ 为由 X 的子集所生成的 σ 环。λ 为定义在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的集函数，如果下列三条件满足：

（Ⅰ）$\forall\ E\in\mathscr{R}_\sigma$，$\lambda(E)\geqslant 0$ 且 $\lambda(\varnothing)=0$；

（Ⅱ）若 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R}_\sigma$，则 $\lambda(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)$；

(Ⅲ) 若 $E_1,E_2\in\mathscr{R}_\sigma$，且 $E_1\subset E_2$，则 $\lambda(E_1)\leqslant\lambda(E_2)$。
那么，称 λ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的**外测度**。特别地，当 $\mathscr{R}_\sigma$ 为由 X 的一切子集所生成的 σ 环时，称 λ 为 X 上的外测度。

设 $\mathscr{E}$ 是由 X 的子集所生成的环，μ 为 $\mathscr{E}$ 上的测度。考察类

$$\varphi(\mathscr{E})=\{E:E\subset X,E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,A_n\in\mathscr{E}\}$$

则易验证，$\varphi(\mathscr{E})$ 是一个 σ 环。对于每个 $E\in\psi(\mathscr{E})$，令

$$\mu^*(E)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \tag{1-4}$$

这里下确界取遍 $\mathscr{E}$ 中一切这样的序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}:E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，那么，$\mu^*(E)$ 是 σ 环 $\varphi(\mathscr{E})$ 上的一个外测度，称为由 μ 导出的外测度，而且有下列定理成立。

定理 6 由(1-4)式确定的集函数 μ^* 满足如下性质，当 $E\in\mathscr{E}$ 时，有 $\mu^*(E)=\mu(E)$。

证明 设 $E\in\mathscr{E}$，那么显然有 $\mu^*(E)\leqslant\mu(E)$。另一方面，设 $A_n\in\mathscr{E}$，且 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，令 $B_1=A_1,B_2=A_2-A_1,B_3=A_3-A_1-A_2,\cdots$，则有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，由 μ 的 σ 可加性有

$$\mu(E)=\mu(E\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n))=\mu(E\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\cap B_n)$$

从而根据测度的单调性与 σ 可加性可得

$$\mu(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

取下确界便得 $\mu(E)\leqslant\inf\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu^*(E)$。对$\forall$ $E\in\mathscr{E}$ 有 $\mu^*(E)=\mu(E)$ 得证。 □

有了外测度 λ 之后，可以直接借用它来定义可测集。

定义 15 设 λ 是 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度，称 $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 是 **λ 可测的**，如果对一切 $A\in\mathscr{R}_\sigma$ 有

$$\lambda(A)=\lambda(A\cap E)+\lambda(A-E) \tag{1-5}$$

关于(1-5)式，作一些解释。可测集 E 有这样一种规则分布，能将任意集 A 分成互不相交的两部分 $A\cap E$ 与 $A-E$，使得关于这种分解，可加性对 λ 是成立的。记一切 λ 可测集为 μ，关于它的结构，可以断言，μ 是一个 σ 环，并且限制在 μ 上，λ 成为测度。这一结论是以下述事实为依据的：设 λ 是 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度，则由 λ 引出的一切 λ 可测集 μ 构成一个环。

定理 7 设 λ 是 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度，μ 为一切 λ 可测集的类，则有

(Ⅰ) μ 是一个 σ 环；

(Ⅱ) 设 E_n 为 μ 中两两不相交的集列，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则对任何 $A\in\mathscr{R}_\sigma$，成立

$$\lambda(A\cap E)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_n)$$

(Ⅲ) λ 限制在 μ 上为测度。

证明 (Ⅰ) 前面已经说明 μ 是一个环，因而只须证明当 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mu$ 时，有 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mu$ 即可。不妨假设 E_n 等是互不相交的集列。由外测度的半可加性，有

$$\lambda(A)\leqslant\lambda(A\cap E)+\lambda(A\cap E^c) \tag{1-6}$$

下面证明相反的不等式成立。因为 E_1 可测，$E_1\cap E_2=\varnothing$，在(1-5)式中取 A,E 分别为 $A\cap(E_1\cup E_2)$ 与 E_1 可得到

$$\lambda(A\cap(E_1\cup E_2))=\lambda[A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1]+\lambda[A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^c]$$
$$=\lambda(A\cap E_1)+\lambda(A\cap E_2)$$

因而由有限归纳法可知

$$\lambda[A\cap(E_1\cup\cdots\cup E_n)]=\lambda(A\cap E_1)+\lambda(A\cap E_2)+\cdots+\lambda(A\cap E_n) \tag{1-7}$$

令 $F_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$，那么，$F_n\in\mu$。在(1-5)式中将 E 换成 F_n 并注意到 λ 的单调性，可得

$$\lambda(A)=\lambda(A\cap F_n)+\lambda(A\cap F_n^c)\geqslant\lambda(A\cap F_n)+\lambda(A\cap E^c) \tag{1-8}$$

利用(1-7)，由上式有

$$\lambda(A)=\sum_{k=1}^{n}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap E^c)$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\lambda(A)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap E^c) \tag{1-9}$$

再由 λ 的半可加性，$\lambda(A\cap E)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)$，故知

$$\lambda(A)\geqslant\lambda(A\cap E)+\lambda(A\cap E^c) \tag{1-10}$$

式(1-6)和式(1-10)一起表明上式中等号成立。这样，E 是 λ 可测的，即 $E\in\mu$。

（Ⅱ）据 λ 的半可加性与 E 的可测性，可得

$$\lambda(A)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap E^c)\geqslant\lambda(A\cap E)+\lambda(A\cap E^c)=\lambda(A)$$

所以

$$\lambda(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap E^c) \tag{1-11}$$

在上式中令 $A\cap E$ 代替 A，即得

$$\lambda(A\cap E)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)$$

（Ⅲ）在(1-11)中取 $A=E$ 可得

$$\lambda(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_k)$$

这表明 λ 限制在 μ 上满足 σ 可加性，因而 λ 确为 σ 环 μ 上的测度。 □

定义 16 设在环 $\mathscr{E}$ 上给定一个测度 μ，而 $\mathscr{R}_\sigma$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的任一 σ 环，若存在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的测度 $\tilde{\mu}$，使对每个 $A\in\mathscr{E}$，有 $\mu(A)=\tilde{\mu}(A)$，则称 $\tilde{\mu}$ 为 μ 到 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的一个**扩张**。

定理 8 设 μ 为环 $\mathscr{E}$ 上的测度，μ 为 μ^* 可测集类，$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 为由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环，则 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\subset\mu$，并且 μ^* 在 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 上的限制是 μ 的扩张。

定义 17 设 $\mathscr{R}$ 为环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度。若对任何 $A\in\mathscr{R}$，存在集列 $A_1,A_2,A_3,\cdots\in\mathscr{R}$，使 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，且 $\mu(A_n)<\infty$，$n=1,2,\cdots$，则称 μ 为 **σ 有限的**。

定理 9 设 $\mathscr{E}$ 为环，μ_1,μ_2 为由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的测度，满足 $\forall A\in\mathscr{E}$，$\mu_1(A)=\mu_2(A)$，并假定 μ_1,μ_2 限制在环 $\mathscr{E}$ 上均是 σ 有限的。那么，在 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上有 $\mu_1=\mu_2$，即环 $\mathscr{E}$ 上测度到 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的扩张是惟一的。

下面给出几个典型的例子以说明一般理论的某些概念与应用。

例 7 （Lebesgue 测度）基本集 $X=\mathbf{R}^1$，半闭区间 $[\alpha,\beta)$ 的测度为 $\beta-\alpha$。由一切形如 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i)$ 的集组成

的环记为 $\mathscr{R}$，其中$[\alpha_i,\beta_i)$为互不相交的半闭区间。E 的测度定义为 $mE=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)$。可以证明，$X$ 中的子集的外测度 m^* 与 Lebesgue 外测度一致。一切 m^* 可测集类 μ 称为 Lebesgue 可测集类。m^* 限制在 μ 上即为 Lebesgue 测度。

一般地，设 X 是任意基本集，$\mathscr{E}$ 为由 X 的子集所成的环，由 $\mathscr{E}$ 所产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$常称为 X 中的 Borel 集类。

例 8 设基本集为 $X=\mathbf{R}^n$。取 $\mathscr{E}$ 为形如 $I=[\alpha_1,\beta_1;\cdots;\alpha_n,\beta_n]$的半闭方体的有限并与$\varnothing$所成的环。令 $m\varnothing=0$，$mI=\prod_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)$，则 m 为 $\mathscr{E}$ 上的测度。将 m 扩充到 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$中所得到的一切可测集即为 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集类。同样，由 m 引出外测度 m^*，一切 m^* 可测集类即为 Lebesgue 可测集类。$\mathbf{R}^1$ 的情形可以转到这情形来说明。

例 9 设 $X=\mathbf{R}^1$，$\mu(x)$为定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实的单调增加函数，且为右连续的。取 E 为例 7 中的环。对于区间 $I=[\alpha,\beta)$，定义它的测度为 $mI=\mu(\beta-0)-\mu(\alpha-0)$。一点 α 的测度定义为$m\{\alpha\}=\mu(\alpha)-\mu(\alpha-0)$，它未必等于 0，这同 Lebesgue 测度不同。实际上，四种区间的测度是

$$m[\alpha,\beta)=\mu(\beta-0)-\mu(\alpha-0),\qquad m[\alpha,\beta]=\mu(\beta)-\mu(\alpha-0)$$
$$m(\alpha,\beta]=\mu(\beta)-\mu(\alpha),\qquad m(\alpha,\beta)=\mu(\beta-0)-\mu(\alpha)$$

它们不一定完全相同。同样，依定理 7 的方式引出的 σ 环 μ 称为 Lebesgue-Stieltjes 可测集，这种测度称为 Lebesgue-Stieltjes 测度。而当 $\mu(x)=x$ 时，这种测度就是 Lebesgue 测度。

三、可测函数

本段介绍 Borel 域上的可测函数。设 X 是非空集合，β 是 X 上的 Borel 域，称(X,β)为一个可测空间，而 β 中的元素称为可测集。这里不考虑 β 的扩张问题。

定义 18 设 $f:X\to\mathbf{R}^1$ 为一个实函数，β 为 X 的一个 Borel 域。如果$\forall\ r\in\mathbf{R}^1$，集合

$$A_r=\{x:x\in X,f(x)\geqslant r\}$$

均为 X 的可测集，即$\forall\ r\in\mathbf{R}^1$ 有 $A_r\in\beta$，那么称 f 关于 β 是**可测的**，在不致发生混淆的情况下简称 f 是 X 上的可测函数。

由此定义可知，函数的可测性只与可测集的构造有关，而与空间 X 上的测度无关。

下面叙述简单函数的概念，它在抽象测度与积分以及模糊积分中是十分有用的。

定义 19 设(X,β)是一个可测空间，如果 f 是定义在 X 上具有如下性质的函数：存在可测集的不相交的有限类$\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$以及实数有限集合$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$使得

$$f(x)=\begin{cases}\alpha_i, & x\in E_i,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & x\notin\bigcup_{i=1}^{n}E_i\end{cases}$$

则称 $f(x)$为 X 上的**简单函数**。换言之，简单函数是这样的一个函数，它只取有限个异于零的值，而这些非零值是在不相交的可测集上取的。

用 $\chi_E(x)$表示可测集 E 的特征函数，即

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

那么，简单函数可以表示为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x)$$

如果用$\vee$和$\wedge$表示两元素取大与取小运算，此时，简单函数又可以表示为

$$f(x)=\bigvee_{i=1}^{n}(\alpha_i\wedge x_{E_i}(x))$$

这两种表达式显然是一致的。在模糊积分中，总取后一种简单函数的表达式。

定理 10 实值函数 f 是 (X,β) 上的可测函数的充分必要条件是 f 可以表示为一个简单函数列的极限，即存在一个简单函数列 $\{f_n(x)\}$，$n=1,2,\cdots$，使得 $\forall\ x\in X$ 有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

成立。

证明 充分性 因为 $\{f_n(x)\}$ 是收敛的，所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{k\geq n}f_k(x)$，并且对于任一个实数 $r\in\mathbf{R}$，有

$$\{x:f(x)>r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x:f_k(x)>r\}$$

这就证明了 $f(x)$ 的可测性。

必要性 设 $f(x)$ 是可测的，不失一般性，假定 $f(x)\geq 0$，$(\forall\ x\in X)$。因为如果不然的话，只须取

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geq 0\\ 0\ , & f(x)<0;\end{cases}\qquad f_-(x)=\begin{cases}0, & f(x)\geq 0\\ -f(x), & f(x)<0;\end{cases}$$

则 $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$，即 $f(x)$ 表示为两个非负函数之差，而且显然有两个简单函数之差仍为简单函数。现在，$f(x)\geq 0$，此时，对于 $n=1,2,\cdots,x\in X$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n}, & \dfrac{k-1}{2^n}\leq f(x)<\dfrac{k}{2^n},k=1,2,\cdots,n\cdot 2^n\\ n\ , & f(x)\geq n\end{cases}$$

则 $f_n(x)$ 是非负的简单函数，且 $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$。对 $x_0\in X$，如果 $f(x_0)<\infty$，则存在自然数 n_0，使得 $f(x_0)<n_0$，故当 $n\geq n_0$ 时，

$$0\leq f(x_0)-f_n(x_0)\leq\frac{1}{2^n}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$。如果对 $x_1\in X$，$f(x_1)=\infty$，则对 $n=1,2,\cdots,f_n(x_1)=n$，故

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_1)=\infty=f(x_1)$$ □

从定理的证明过程还可看出，如果可测函数 $f(x)$ 是有界的，那么简单函数序列 $\{f_n(x)\}$ 是一致收敛于 $f(x)$ 的。

现在考虑 β 上的测度。设 (X,β) 是可测空间，若映射 $\mu:\beta\to\mathbf{R}^+=[0,\infty]$ 满足

（Ⅰ）$\mu(\varnothing)=0$；

（Ⅱ）若 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两两互不相交的可测集序列，则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

那么，称 μ 为 β 上的测度，并称 $\{X,\beta,\mu\}$ 为测度空间。如果 $\mu(X)<\infty$，则称 μ 为有限测度；如果 $E\in\beta$，$F\subset E$ 且 $\mu(E)=0$ 就可推出 $F\in\beta$，那么就称 μ 为完全测度。

下面的定理称为叶果洛夫(Egoroff)定理及其逆定理。

定理 11 设 $\mu(E)<\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是几乎处处有限的可测函数序列，那么，$\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛到有限值函数 $f(x)$ 的充分必要条件是 $\forall\ \varepsilon>0$，存在一个可测集 F，使得 $\mu(F)<\infty$，$\mu(E-F)<\varepsilon$，且 $f_n(x)$ 在 $E-F$ 上一致收敛于 $f(x)$。

四、积分及有关定理

定义 20 设 (X,β,μ) 是测度空间，$f:X\to\mathbf{R}^1$ 是非负实值可测函数，$E\in\beta$，若 $f(x)$ 是简单

函数，即

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

则定义 $f(x)$ 在 E 上关于 μ 的**积分**为

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(E_i \cap E)$$

若 $f(x)$ 是一般的非负可测函数，由定理 10，存在一个单调增加的简单函数列 $\{f_n(x)\}$，使 $\forall\ x \in X$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 成立，此时，若

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}\mu$$

收敛，则其极限值定义为 $f(x)$ 在 E 上关于 μ 的**积分**，即

$$\int_E f(x) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}\mu$$

对一般的可测函数 $f(x)$，其积分值可以用 $f_+(x)$ 与 $f_-(x)$ 来定义。即若 $f_+(x)$，$f_-(x)$ 是可积的，则定义 $f(x)$ 在 E 上关于 μ 的积分为

$$\int_E f(x) \mathrm{d}\mu = \int_E f_+(x) \mathrm{d}\mu - \int_E f_-(x) \mathrm{d}\mu$$

可以证明简单函数的积分与其表达式的选取无关，而一般可测函数的积分与收敛的简单函数列的选取无关，从而上述积分定义是确定的，合理的。

这种以 β 上的测度 μ 为基础的积分具有与通常的 Lebesgue 积分相类似的一些很好的性质与定理，分别叙述如下，并给出部分证明，这对阅读本书相关部分是有利的。

定理 12 设 $f(x)$ 是几乎处处为正的可积函数，且使得

$$\int_E f(x) \mathrm{d}\mu = 0$$

那么，$\mu(E)=0$。

证明 令 $F_0=\{x: f(x)>0\}$，$F_n=\left\{x: f(x)\geqslant \frac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,\cdots$ 由假设条件 $\mu(E-F_0)=0$，因此只须证明 $\mu(E\cap F_0)=0$。

因为 $$0 = \int_{E\cap F_n} f(x) \mathrm{d}\mu \geqslant \frac{1}{n}\mu(E \cap F_n) \geqslant 0，且\ F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

再利用关系式 $\mu(E \cap F_0) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap F_n)$，即得到定理的结论。 □

定理 13 设 $f(x)$ 是一个可积函数，如果对每个 $F\in\beta$，都有

$$\int_F f(x) \mathrm{d}\mu = 0$$

则关于 μ 几乎处处有 $f(x)=0$，记作 $f(x)=0$ (μ—a. e.)。

证明 令 $E=\{x: f(x)>0\}$，则由定理的假设条件有

$$\int_E f(x) \mathrm{d}\mu = 0$$

这样，由定理 12，有 $\mu(E)=0$；同样可证，如果 $G=\{x: f(x)<0\}$，则 $\mu(G)=0$。从而 $\mu\{x: f(x) \neq 0\}=0$，即 $f(x)=0$ 几乎处处成立。 □

定理 14 设 $f(x)$ 是可积函数，如果对每一个 $E\in\beta$，

$$\int_E f(x) \mathrm{d}\mu \geqslant 0$$