● 研究生教材 ● 研究生教材

网络算法与复杂性理论

谢政　李建平

■ 研究生教材 ■

谢 政 李建平

网络算法与复杂性理论

国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书全面地介绍了网络最优化中的基本问题和基本算法以及计算复杂性理论中的基本概念和一些常见的 NP 完全问题。

全书共十二章，分为两部分：第一部分包括前十章，主要介绍网络最优化中的概念、模型和算法，同时还强调对算法复杂性的分析；第二部分包括后两章，介绍 NP 完全理论和近似算法。

本书可作为运筹学专业研究生教材，也可供管理科学、计算机科学、军事运筹学和系统工程等有关专业的教师、研究生和大学高年级学生参考。

网络算法与复杂性理论

谢　政　李建平

责任编辑　朱宝龙

*

国防科技大学出版社出版发行

新华书店总店科技发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：850×1168 1/32　印张：11.75 字数：295 千

1995 年 5 月第 1 版第 1 次印刷　印数：3000 册

ISBN 7－81024－330－6

O.41　定价：15.00 元

前　言

网络最优化的理论和方法已广泛地渗透于运筹学、信息论、控制论、管理科学和计算机科学等领域，并在工程技术、经济、军事等诸多方面都有着极为重要的应用。可以毫不夸张地说，现代社会在很大程度上是一个由通讯网络、运输网络、能源和物资分配网络构成的巨大的复杂系统。网络最优化能为人们控制和管理这个系统提供一种有效的方法。由于大规模网络最优化问题的需要，研究各种有效算法一直是网络最优化研究的一个主旋律。但是，人们发现，网络最优化中的许多问题很难找到有效算法，也不知道它们是否存在有效算法，这就使得计算复杂性和近似算法的研究越来越受到普遍的重视。这两者的结合正是当前网络最优化研究的潮流。因此，网络算法与复杂性理论是高等院校有关专业的一门不可忽视的重要课程。

基于上述认识，我们在总结多年教学实践的基础上，参考国内外一些富有代表性的教材，并广泛查阅了有关文献，编写了这本教材。旨在系统地讲授网络最优化模型、算法与计算复杂性理论，目的是使读者不仅能系统地掌握网络最优化的建模思想和基本算法，而且学习和掌握计算复杂性的基本概念、基本理论和基本方法，提高分析和解决实际问题的能力。

本书全面地介绍了网络最优化中的基本问题和基本算法以及计算复杂性理论中的基本概念和一些常见的 NP 完全问题。全书共十二章，分为两部分：第一部分包括前十章，主要介绍网络最优化中的概念、模型和算法，同时，还注重对算法复杂

性的分析；第二部分包括后两章，介绍NP完全理论和近似算法。这两部分虽然有一定的独立性，但我们始终强调它们之间的有机联系。另外，每一章最后都精心配置了一定数量的习题。

本书对基本概念的陈述力求准确简洁，对定理和算法的证明力求清晰严谨，对内容的编排力求系统完整。阅读本书只需要熟悉线性规划的一些基本内容。

由于学识有限，经验不足，书中肯定有不少的错误和疏漏，恳请广大读者批评指正。

在本书的写作过程中，一直得到国防科工委指挥技术学院陈庆华教授的关怀和鼓励，他仔细审阅了本书的原稿，并提出了许多宝贵建议；国防科技大学系统工程与数学系研究生陈浩光和汤泽滢两位同学为作者整理了部分资料。在此，一并表示感谢。

作　者

1994年11月于长沙

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　　录

第十一章　NP 完全理论

第十二章　近似算法

参考文献

第一章 图与算法

§1.1 图的基本概念

图 G 是指由非空有限集合 $V(G)$和 $V(G)$中某些元素的无序对的集合 $E(G)$构成的二元组$(V(G),E(G))$. $V(G)$称为 G 的顶点集，其中的元素称为 G 的顶点。$E(G)$ 称为 G 的边集，其中的元素称为 G 的边。在不混淆的情况下，有时记 $V=V(G)$，$E=E(G)$. 如果 $V=\{v_1, \cdots, v_n\}$，那么 E 中的元素 e 与 V 中某两个元素构成的无序对 $\{v_i, v_j\}$ 相对应，记 $e=v_iv_j$ 或 $e=v_jv_i$.

图可以用图形来表示，用小圆圈表示顶点，用小圆圈之间的连线表示边。例如，图 1-1 就表示图 $G=(V, E)$，$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$，其中 $e_1=v_1v_2$，$e_2=v_1v_2$，$e_3=v_2v_3$，$e_4=v_3v_4$，$e_5=v_4v_5$，$e_6=v_5v_2$，$e_7=v_4v_4$.

设 $G=(V, E)$ 是一个图，若 $e=v_iv_j\in E$，则称顶点 v_i 和顶点 v_j 是相邻的，并称 v_i、v_j 为边 e 的端点，也称 e 与 v_i、v_j 关联。若 e_1、$e_2\in E$，且 e_1 和 e_2 有公共的端点，则称 e_1 与 e_2 是相邻的。

两个端点重合的边称为环。如果有两条边的端点是同一对顶点，则称这两条边为重边。既没有环也没有重边的图称为简单图。没有环的图称为无环图。边集是空集的图称为空图。至少有一条边的图称为非空图。一个图的顶点数称为该图的阶。

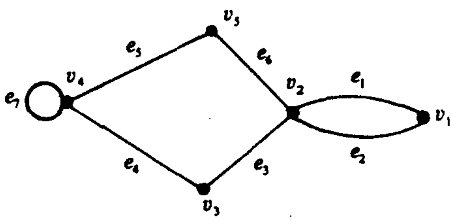

图 1-1

图 G 中顶点 v 的度定义为和 v 关联的边的数目（与 v 关联的每个环算作两条边），记为 $d_G(v)$. 称 $d_G(v)$ 是偶数的顶点 v 为偶点，称 $d_G(v)$ 是奇数的顶点 v 为奇点。$d_G(v)=0$ 的顶点称为孤立点。容易得到下面的定理。

定理 1.1 设 $G=(V,E)$ 是一个图，则

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = 2|E|$$

如果图 G 的某些顶点和边可以排成非空的有限序列 $W=v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$，这里 $v_i\in V(G)(0\leqslant i\leqslant k)$，$e_j\in E(G)(1\leqslant j\leqslant k)$，并且 $e_i=v_{i-1}v_i(1\leqslant i\leqslant k)$，则称 W 为 G 的一条途径。v_0 称为 W 的起点，v_k 称为 W 的终点，$v_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 称为 W 的内部顶点，并把 W 称为 G 的 (v_0,v_k) 途径。k 称为 W 的长。有时我们把途径 $v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$ 简单地记为 $v_0v_1\cdots v_k$. 值得注意的是，由于以顶点 v_{i-1} 和 v_i 为端点的边可能不止一条，因此 $v_0v_1\cdots v_k$ 可能同时表示若干条不同的途径；但是，简单图中的途径 $v_0e_1v_1\cdots v_{k-1}e_kv_k$ 由 $v_0v_1\cdots v_k$ 完全确定。

途径 $W=v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$ 的节是指由 W 中相继项构成的子序列 $v_ie_{i+1}v_{i+1}\cdots\cdots e_jv_j$，它也是一条途径，这一子序列又称为 W 的 (v_i, v_j) 节。途径 $W=v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$ 的逆向途径是指途径 $v_ve_kv_{k-1}$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$\cdots v_1e_1v_0$，记为 W^{-1}. 设 $W_1=v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$ 和 $W_2=v_ke_{k+1}v_{k+1}\cdots e_lv_l$ 是图 G 的两条途径，则称途径

$$W = v_0e_1v_1\cdots e_kv_ke_{k+1}v_{k+1}\cdots e_lv_l$$

为途径 W_1 与 W_2 的衔接，记作 $W=W_1W_2$，也称 W 可以表示为 W_1 与 W_2 的并。

如果图 G 中途径 W 上的边互不相同，则称 W 为 G 的迹。如果图 G 中的途径 W 上的顶点互不相同，则称 W 为 G 的链。易知，图 G 中的链必定是 G 的迹，但 G 中的迹不一定是 G 的链。

如果途径的长至少为 1，且起点和终点重合，则称该途径为闭途径。起点和终点重合且长至少为 1 的迹称为闭迹。起点与内部顶点互不相同的闭迹称为圈。长为偶数的圈称为偶圈，长为奇数的圈称为奇圈。

如果图 G 和图 H 满足 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，则称 H 是 G 的子图，记为 $H\subseteq G$. 特别地，若 $V(H)=V(G)$，$E(H)=E(G)$，则记 $H=G$. 如果 $H\subseteq G$，且 $V(H)=V(G)$，则称 H 为 G 的支撑子图。图 G 中的链和圈都可以看作是 G 的子图。

设 V' 是图 G 的顶点集 $V(G)$ 的一个非空子集，令

$$E' = \{e' \mid e' \in E(G), e' = v_iv_j, v_i、v_j \in V'\}$$

则称 G 的子图 $G'=(V',E')$ 为由 V' 导出的子图，记为 $G'=G[V']$。

设 $E'\subseteq E(G)$，$E'\neq\varnothing$，令

$$V' = \{v \mid v\ 是\ E'\ 中某条边的端点\}$$

则称 G 的子图 $G'=(V',E')$ 为由 E' 导出的子图，记为 $G'=G[E']$。

如果对于图 G 的任意两个顶点 v_i 和 v_j，G 中都存在 (v_i, v_j) 链，则称 G 是连通图。不是连通的图称为非连通图。

如果 $H\subseteq G$，且 H 是连通图，则称 H 是 G 的连通子图。图

H 为图 G 的极大连通子图是指 H 为 G 的连通子图，并且 G 中不存在连通子图 H' 使得 $H \subseteq H'$，$H' \neq H$. 图 G 的极大连通子图又称为 G 的连通分支。由此可知，连通图恰有一个连通分支；而非连通图则有两个或两个以上的连通分支。

下面再介绍图的几种运算。

若 $E_1 \subseteq E(G)$，从图 G 中删去 E_1 的所有边得到的图记为 $G-E_1$，通常把 $G-\{e\}$ 简记为 $G-e$. 若 $H \subseteq G, E_2 \subseteq E(G) \setminus E(H)$，且 E_2 中每条边的端点都属于 $V(H)$，在图 H 中添上 E_2 的所有边得到的图记为 $H+E_2$. 常常简单地用 $H+e$ 表示 $H+\{e\}$.

若 $V_1 \subseteq V(G)$，且 $V_1 \neq V(G)$，则把从图 G 中删去的所有顶点以及与 V_1 中顶点关联的边得到的图记为 $G-V_1$. $G-\{v\}$ 常常简记为 $G-v$. 容易知道：

$$G[V'] = G - (V(G) \setminus V')$$

若 $H_1 \subseteq G$、$H_2 \subseteq G$，则把顶点集为 $V(H_1) \cup V(H_2)$，边集为 $E(H_1) \cup E(H_2)$的图称为 H_1 与 H_2 的并图，记为 $H_1 \cup H_2$. 若 $E(H_1) \cap E(H_2) = \varnothing$，则称 $H_1 \cup H_2$ 为 H_1 与 H_2 的和，记为 $H_1 + H_2$.

设 e 是图 $G=(V,E)$的一条边，且 $e=v_iv_j$，我们从 G 中删去 e，并把 v_i 和 v_j 重合为一个顶点 y，得到一个新的顶点集

$$V' = (V \setminus \{v_i, v_j\}) \cup \{y\}$$

而把 G 中所有与 v_i 或与 v_j 关联的边都改为与 y 关联，G 中既不与 v_i 也不与 v_j 关联的边不变，得到一个新的边集 E'，这样产生的新图 $G'=(V',E')$称为图 G 关于边 e 的收缩。顶点 y 称为收缩 e 产生的人造顶点。

设 $G=(V,E)$是一个图，S 为 V 的一个非空真子集，$\bar{S} = V \setminus S$，记

$$[S, \bar{S}] = \{v_iv_j \in E \mid v_i \in S, v_j \in \bar{S}\}$$

如果$[S,\bar{S}] \neq \varnothing$，则称$[S,\bar{S}]$是 G 的一个边割。若 E' 是 G 的一

个边割，但 E' 的任何真子集都不是 G 的边割，则称 E' 为 G 的极小边割。G 的极小边割又称为 G 的割集。

一个图的边割与圈有如下的关系。

定理 1.2 设 C 和 $[S,\ \bar{S}]$ 分别是图 G 的圈和边割，则

$$|E(C)\cap[S,\bar{S}]|\equiv 0(\mathrm{mod}2)$$

证明 当 $E(C)\cap[S,\bar{S}]=\varnothing$ 时，$|E(C)\cap[S,\bar{S}]|=0$. 当 $E(C)\cap[S,\bar{S}]\neq\varnothing$ 时，设 $C=v_1e_1v_2e_2v_3\cdots v_pe_pv_1, v_1\in S$，$v_p\in\bar{S}$，从而 $e_p\in[S,\bar{S}]$. 又设 $E(C)\cap[S,\bar{S}]=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$，且 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant p$. 记 $\hat{V}=\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\}$，由 $v_1\in S$ 知 $v_{i_1}=v_1\in S$，因此根据 $[S,\bar{S}]$ 的定义有

$$\{v_{i_j}\in\hat{V}\,|\,j\text{ 为奇数}\}\subseteq S$$

$$\{v_{i_j}\in\hat{V}\,|\,j\text{ 为偶数}\}\subseteq\bar{S}$$

由 $v_p\in\bar{S}$ 知 $v_{i_k}=v_p$，即 $v_{i_k}\in\bar{S}$，即 k 为偶数。于是 $|E(C)\cap[S,\bar{S}]|$ 为偶数。

§1.2 有向图的基本概念

有向图 D 是指由一个非空的有限集合 $V(D)$ 和 $V(D)$ 中某些元素的有序对的集合 $A(D)$ 构成的二元组 $(V(D),A(D))$。$V(D)$ 称为 D 的顶点集，其中的元素称为 D 的顶点。$A(D)$ 称为 D 的弧集，其中的元素称为 D 的弧。在不混淆时，记 $V=V(D),A=A(D)$。

如果 $V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，那么 $A(D)$ 中的元素 a 与 $V(D)$ 中某两个元素构成的有序对 $\{v_i,v_j\}$ 相对应，记 $a=(v_i,v_j)$，其中 v_i 称为 a 的尾，v_j 称为 a 的头；a 称为 v_i 的出弧，也称为 v_j 的入弧。顶点 v 在 D 中出弧的数目记为 $d_D^+(v)$，称之为 v 的出度；顶点 v 在 D 中入弧的数目记为 $d_D^-(v)$，称之为 v 的入

度。显然有

定理 1.3 设 $D=(V, A)$ 是一个有向图，则

$$\sum_{v\in V} d_D^+(v) = \sum_{v\in V} d_D^-(v) = |A|$$

有向图也可以用一个图形来表示。用小圆圈表示顶点，用小圆圈之间带有箭头的连线表示弧，连线的箭头由弧的尾指向弧的头。例如图 1-2 就表示一个有向图 $D=(V, A)$，

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}\}$，

其中 $a_1=(v_1, v_1)$，$a_2=(v_1, v_2)$，$a_3=(v_3, v_2)$，$a_4=(v_3, v_4)$，$a_5=(v_4, v_3)$，$a_6=(v_2, v_4)$，$a_7=(v_5, v_4)$，$a_8=(v_4, v_6)$，$a_9=(v_6, v_5)$，$a_{10}=(v_6, v_2)$，$a_{11}=(v_6, v_2)$。

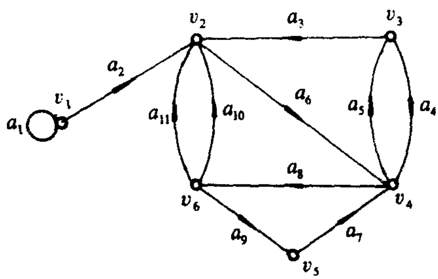

图 1-2

尾和头重合的弧称为环。若两条弧有相同的尾和相同的头，则称这两条弧为重弧。既没有环也没有重弧的有向图称为简单有向图。

如果把有向图 D 中每条弧上的箭头去掉，即把 D 的每条弧 (v_i, v_j) 用边 v_iv_j 代替，得到的图称为 D 的基础图。

有向图中的许多概念可以通过它的基础图去描述。例如，

设 G 是有向图 D 的基础图，如果顶点 v_i 和 v_j 在 G 中相邻，则称 v_i 和 v_j 在 D 中相邻；若 G 是连通的，则称 D 是连通的；D 中的途径是指 D 中这样的一些顶点和弧构成的序列，使这些顶点与这些弧相对应的边构成 G 的途径。类似地定义有向图的迹、链、闭途径、闭迹和圈。

仿照图中子图、支撑子图和导出子图的定义，同样可以给出有向图的子图、支撑子图和导出子图的定义。另外，前一节介绍的图的一些运算也可以照搬到有向图上来。这些都留给读者去完成。

由于有向图中，"方向"是很重要的，因此我们要给出有向图中与方向有关的一些概念。

有向图 D 中的有向途径是指由 D 中某些顶点和弧组成的非空有限序列 $W=v_0a_1v_1\cdots a_kv_k$，其中 $v_i\in V(D)(0\leqslant i\leqslant k)$，$a_j\in A(D)(1\leqslant j\leqslant k)$，且 $a_i=(v_{i-1},v_i)(1\leqslant i\leqslant k)$. v_0 称为 W 的起点，v_k 称为 W 的终点，W 上的其它顶点称为 W 的内部顶点，并称 W 为 D 的有向(v_0,v_k)途径。k 称为 W 的长。有向途径 $v_0a_1v_1\cdots a_kv_k$ 常常简单地用 $v_0v_1\cdots v_k$ 来表示。

有向途径 $W=v_0a_1v_1\cdots a_kv_k$ 的节是指由 W 中相继项构成的子序列 $v_ia_{i+1}v_{i+1}\cdots a_jv_j$，这一子序列也称为 W 的(v_i,v_j)节。如果 W_1 和 W_2 都是有向图 D 中的有向途径，且 W_1 的终点正好是 W_2 的起点，则把 W_2 接在 W_1 的后面就得到 D 的一条新的有向途径 W，记作 $W=W_1W_2$，并称 W 为 W_1 与 W_2 的衔接，或称 W 可表示为 W_1 与 W_2 的并。

如果有向图 D 中的有向途径 W 上的弧互不相同，则称 W 为 D 的有向迹。与图的链、闭途径、闭迹和圈的定义一样，完全类似地定义有向图中的有向链、有向闭途径、有向闭迹和有向圈。为方便计，我们常常把有向链称为路，把有向圈称为回路。

如果对于有向图 D 中的任意两个顶点 v_i 和 v_j，D 中既存在

(v_i,v_j)路，也存在(v_j,v_i)路，则称 D 是强连通的。易知，若有向图 D 是强连通的，则 D 是连通的，反之不然。

图中边割的概念也可以推广到有向图上来。设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，对于任何 $S\subseteq V,T\subseteq V$，定义

$$(S,T)=\{(v_i,v_j)\in A\mid v_i\in S,v_j\in T\}$$

如果 S 为 V 的非空真子集，$T=V\backslash S$，则称(S,T)为 D 的截集，记为$(S,\bar{S})$.

§1.3 图的矩阵表示

已知，描述一个图的最直观的方法是用一个图形来表示。但是要把一个图输入到计算机中去，最简单的方法是用一个矩阵来记录图。

设 $G=(V,E)$ 是一个非空无环图，定义

$$m_{ij}=\begin{cases}1,\text{若顶点 } v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 关联}\\0,\text{否则}\end{cases}$$

这样得到的 $|V|\times|E|$ 矩阵 $\boldsymbol{M}(G)=(m_{ij})$ 称为图 G 的关联矩阵。关联矩阵完整地表达了图中顶点与边的关联关系。例如，图 1-3 所示的图 G 的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{array}{c}\begin{matrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\1&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{matrix}$$

图的关联矩阵有下列明显的性质。

1° 每一列恰好有两个非零元素 1.

2° 每一行的元素之和等于对应顶点的度。

3° 将一个关联矩阵中的两行或两列互换，相当于在同一

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com