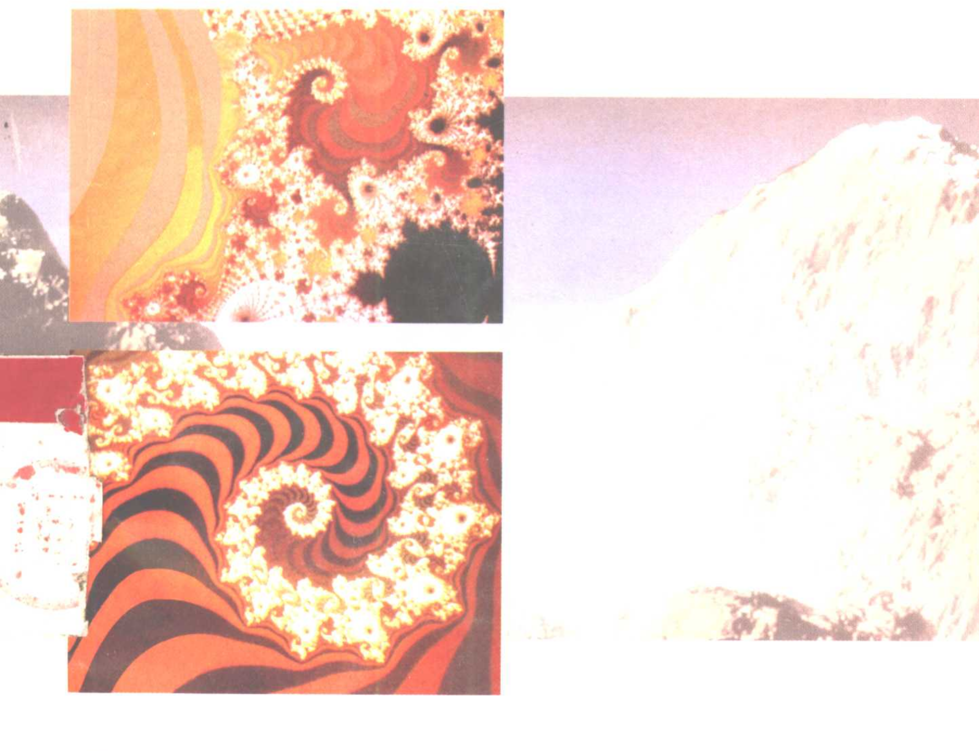
分形几何学

陈颙 陈凌 编著



地震出版社

内 容 提 要

本书为分形几何普及教材。它是作者在中科院研究生院多年讲授分形几何讲稿基础上，为适应广大读者需要经改编而成。本书富有特色，主线鲜明，注重概念，对分形几何的基础、分析计算方法和应用实例均作了介绍，内容并不局限于某专业，适用面广。

本书语言简炼，结构清晰，突出介绍了许多有代表意义的分形实例，并给出一些典型分形计算程序。书中每章末均有一些习题，方便读者自学，随书还可提供软盘一张，内含精选的各种分形绘图程序，可以直接在微机上生成多种精美图形。

本书可供高等院校大学生、研究生学习参考，也适合对分形理论与方法感兴趣的一般读者阅读。

分形几何学

陈颙 陈凌 编著

责任编辑：俸苏华

责任校对：李 瑎

地震出版社 出版

北京民族学院南路 9 号

北京地大彩印厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 7 印张 188 千字

1998 年 7 月第一版 1998 年 7 月第一次印刷

印数 0001—1500

ISBN 7-5028-1482-5/Z・37

(1929) 定价：22.00 元

序

复杂性可能是本世纪最后 10 年各种学科面临的共同问题之一。

传统科学能准确地预测日月食的出现和行星的碰撞，……，但科学家们也同时发现：世界上没有两次台风的途径是完全一样的，没有两次厄尔尼诺现象的发展过程完全是一样的，也没有两次地震所表现出的前兆是一样的。事物本质上的复杂性问题，仿佛到了 20 世纪末才被人们重视起来。传统科学上的难题，只有靠不断创新来解决。

描述复杂现象的一个引人注目的动态，就是分形几何的出现。复杂现象的背后往往存在着一些简单的规律；反过来，利用简单的规则，外加一些灵活的约束，可以产生出万花筒般千变万化的复杂现象。

由 Mandelbrot 这位奇才倡议的分形几何，成为了众多学科的热门话题。分形几何像一个魔术师，似乎给众多的复杂现象找到了简单的普适性的答案。于是，无数的论文、专著、期刊像雪片般问世了，其中不乏创新之作，但也混杂了不少赶时髦的作品。今天，分形几何的发展已不像前 10 年了，它处于一个十字路口，有可能发展，也可能衰亡。本书就是在这个时期写的一本科普教科书。

已经出版了许多关于分形的书，读者可以在本书后的参考书目中找到它们。但本书的目的，则是希望在深入与普及、发展与衰亡中间开辟一条出路，把这个严肃的问题提交给广大读者。

书似其人，……。但我写这本书却是认真的，自从 90 年代开始，我在中国科学院北京研究生院连续讲授了 6 年“分形几何”，

六易讲稿，文献看了不少，同意的却不多，自行其是，有不少怪的观点。如果说一本书也有其关键词的话，则这本书的关键词一是分形与演化（迭代函数系与各种演化过程）；二是有限样本的统计分形。

希望这本小书对于广大读者研究分形几何有些参考价值，也欢迎读者对本书中的错误和不足之处提出批评与建议。

陳颙

1996年12月于香港大学

目　录

第一章　分形和分维

自然界大多数的图形都是十分复杂而且不规则的。事实上关于自然现象的复杂性，人们早已了解到了，古代人们对于自然现象的描述中，很容易找到这种描述复杂性的例子（图 1.1，图 1.2）。中国藏族 10 世纪的壁画对天上云彩形状的刻划（图 1.1）和日本早期对海浪的描述（图 1.2），都充分显示了人们对自然现象复杂性的认识。传统的几何学，习惯用一些简单而规则的基本元素去近似地代表所研究的对象。但天上的云不是球状的，海浪也不是简单的曲面，传统的几何学在绚丽多姿的大自然面前就显得十分软弱无力了。因此人们一直希望能找到能够描述这些复杂现象的几何工具。

图 1.3 给出了山脉的一幅照片。同样，山脉的形状十分复杂，

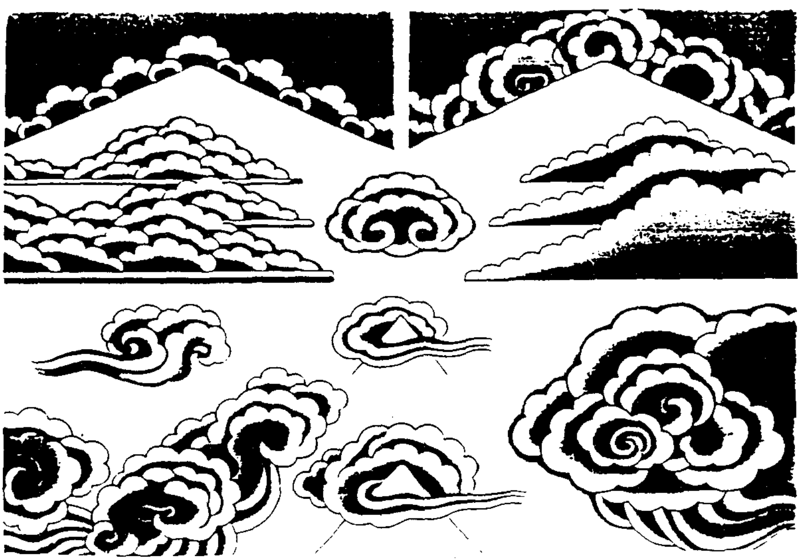


图 1.1　布达拉宫中藏族壁画中的云的形状

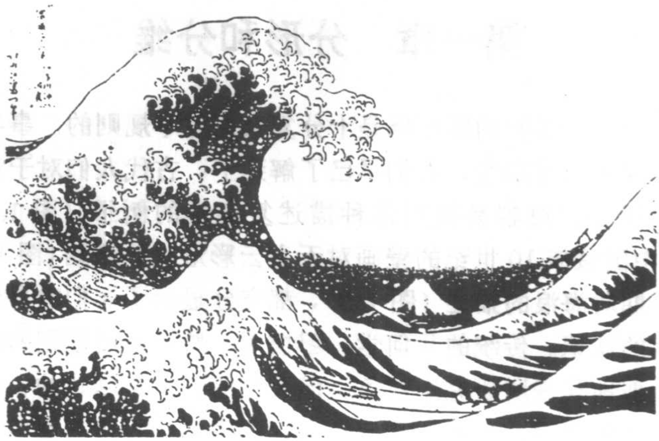


图 1.2　日本传统绘画中对海浪的描述

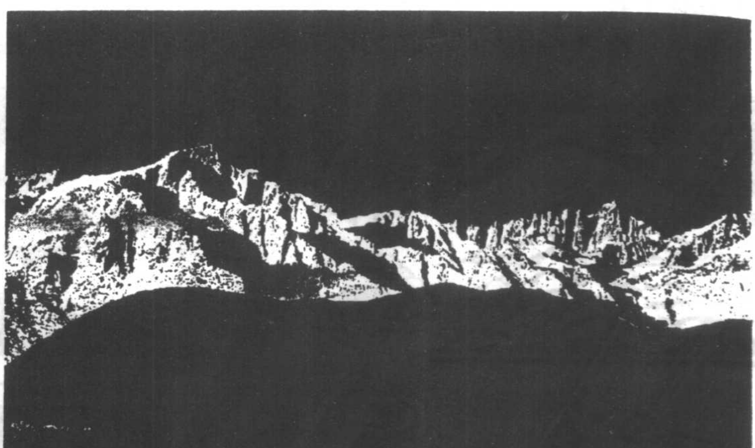


图 1.3　山脉的复杂形态

不同的山有不同的形状，它们都不是用简单的圆锥形就可以代表

的。我们在山脉形状复杂多样性的背后，再深入地想一想，就不禁会问：为什么会有这么多复杂的形状呢？地质学家的研究表明，山脉的形状是长期地质构造运动和至今还在进行的侵蚀作用的结果，那么能否由形状的复杂性推断产生这种复杂形状的过程如何？数学规律又如何？当然，回答这些问题真是太难了！大多数人都会认为：复杂的形状是由复杂的过程所造成的，但也有这样的一种可能性：长期持续并不断重复的简单过程可以产生非常复杂的形状。如果这种可能性存在的话，用以描述复杂性的分形几何与用以解释复杂性的演化过程就发生了联系，几何学与动力学就发生了联系。本书前几章将沿着这样的线索向读者介绍分形几何，但首先我们仍然回到传统欧几里德几何学的经典中。

1.1 欧氏几何和分形几何

普通的几何对象，具有整数维数。零维的点、一维的线、二维的面、三维的体、乃至四维的“时空”，是人们熟知的例子。然而近十几年来，具有不必是整数的分维（fractal dimension）的几何对象——分形（fractal）引起了人们的广泛注意。分形几何的主要价值在于它在极端有序和真正混沌之间提供了一种中间可能性。分形最显著的特征是：本来看来十分复杂的事物，事实上大多数均可用仅含很少参数的简单公式来描述。

维数是几何对象的一个重要特征量。直观地说，维数就是为了确定几何对象中一个点的位置所需的独立坐标的数目，或者说独立方向的数目。在平直的欧氏空间中，维数是自然得到的：地图上的点有经度、纬度两个坐标，一只集装箱有长、宽、高三个尺寸，它们分别是二维和三维的几何对象。欧氏几何中的这种维数就是拓扑维，以后用字母 d 表示。整数维数构成了欧几里德几何学的法律。

现在从欧氏几何维数定义作进一步的推广。把一个正方形的

每个边长增加为原来的 3 倍，得到一个大正方形，它正好等于 $3^2=9$ 个原来的正方形。类似地，把一个立方体的每个边长增加为原来的 3 倍，就得到 $3^3=27$ 个原来大小的立方体。推而广之，一个 d 维几何对象的每个独立方向，都增加为原来的 l 倍，结果得到 N 个原来的对象。这三个数之间的关系是 $l^d=N$，读者不难验证，对于欧氏几何中一切普通的几何对象，这个简单关系都是成立的。现在把这个关系式两边取对数，写成

$$d=\frac{\ln N}{\ln l} \tag{1.1}$$

欧氏几何中由式（1.1）定义的拓扑维 d 都是整数。但若将式（1.1）作为维数的定义，对其不加以取整数的限制，我们则向前完成了一次“飞跃”。下面把这样推广定义的维数称为分维，用大写字母 D 来表示

$$D=\frac{\ln N}{\ln l} \tag{1.2}$$

我们这里再强调一下关系式

$$N=l^d$$

式中的 l 是变换倍数，我们可以把它看作是函数关系中的自变量，而 N 是得到的结果，它是自变量的函数，即 $N=f(l)$。最常见的函数关系有线性关系(图 1.4(a))、指数关系（图 1.4(b))和幂指数关系(图 1.4(c))，它们分别对应

$$N\sim cl+d$$

$$N\sim c^l$$

$$N\sim l^c$$

式中 c，d 皆为常数。从上面变换时的讨论可知，与分维定义有关的函数关系是幂指数关系，简称幂律（power law)。用图示方法研究线性关系，指数关系和幂指数关系最方便的坐标系分别是线性坐标系、半对数坐标系和双对数坐标系(图 1.4(d,e,f))。当我们研究分形与分维问题时，最经常用到的是双对数坐标。

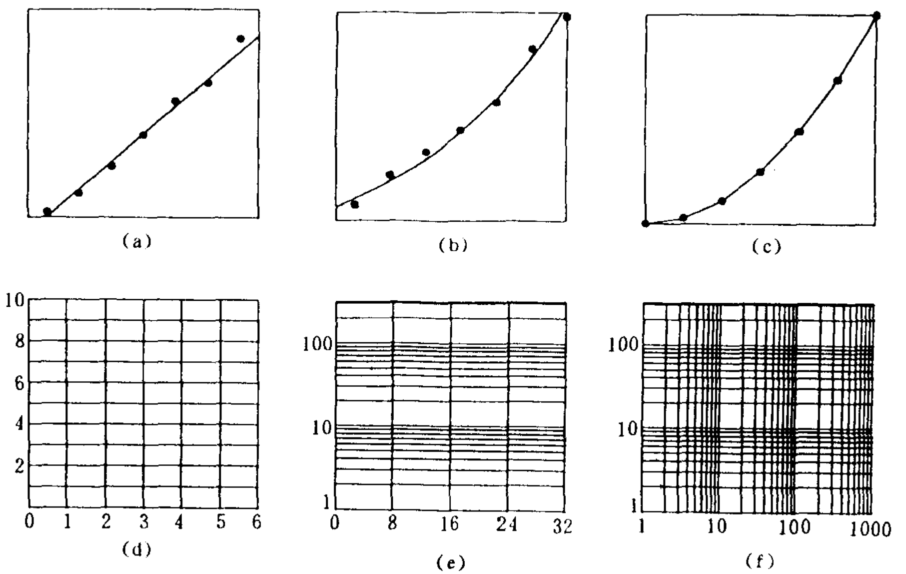


图 1.4 几种函数关系，以及
研究这些函数关系常用的坐标系
(a) 线数；(b) 指数；(c) 幂指数；(d) 线性坐标系；
(e) 半对数坐标系；(f) 双对数坐标系

1.2 自相似性和标度不变性

地质现象的描述，离不开标度。在对一些地质现象拍照时，一定要放上一个能表示尺度大小的物体（作为一种特征尺度），如一枚硬币，一把锤子或站上一个人。没有这些物体，很难确定这些照片反映的是 10m 还是 10km 范围的现象。如果我们有一幅关于岩石海岸线的照片，而没有表示特征长度的物体，一棵树或一所房屋，那么就很难确定照片是从多高的地方拍摄的。这是因为海岸线具有自相似性，即将海岸线的一部分放大后，它与原来的海岸线看起来是相似的。如果几何对象的一个局部放大后与其整体

相似，这种性质就叫做自相似性（self-similarity）。地球科学中许多现象都具有自相似性。1860 年，Rukin 在一本书中写道："当观察一块石头时，你会发现它像一座缩微的山脉。大自然的神工鬼斧，可以把大尺度的山脉缩微成小尺度。在一块 1m 大小的石块上，你可以找到自然中各种图形和构造的变化形态。石块上的苔藓像森林，晶体颗粒的边缘像悬崖，岩石的表面像山脉……。"当观测标度变化时，几何体（或集合）的许多性质保持不变。这种标度不变性（scale invariant）在地学中也经常见到。具有自相似或标度不变性的几何对象，我们说它们是分形的。研究分形体的数学基础是测度论(measure theory)和公度拓扑学(metric topology)。由测度论给出的分形定义(mandelbrot,1982)对于不熟悉测度论的人来说比较难以理解，而且在实际中也难于应用。下面给出的两个定义，在物理上易于理解，但不够精确，也不够数学化。

定义 1（Mandelbrot，1986）：部分以某种形式与整体相似的形状叫做分形。

定义 2（Edgar，1990）：分形集合是这样一种集合，它比传统几何学研究的所有集合还要更加不规则（irregular），无论是放大还是缩小，甚至进一步地缩小，这种集合的不规则性仍是明显的。

分形一词是从拉丁文 fractus 转化而来的。它的原意是"不规则的、支离破碎的"物体，英文字典中出现 fractal 一词是 1975 年以后的事情。而在山西五台山南山寺的影壁墙上的碑文中（图 1.5），早在清朝时代就有了"日月光明，分形变化"的语句。

自然界的许多系统、现象和过程都具有分形特征。比如星云的分布、海岸线的形状、起伏的山脉、地震、河网水系分布、湍流、凝聚体、相变、人的血管系统、肺膜结构、城市噪音、剧烈变化的气候、股市等等。其复杂形态都可以用幂指数函数的 D（即分维）来描述。今天，分形几何已成为描述自然界，特别是许多不规则地学现象的有力工具。翻开任何一本 90 年代的文献目录，"分形"两字频繁出现。关于分形和分维的国际讨论会每年至

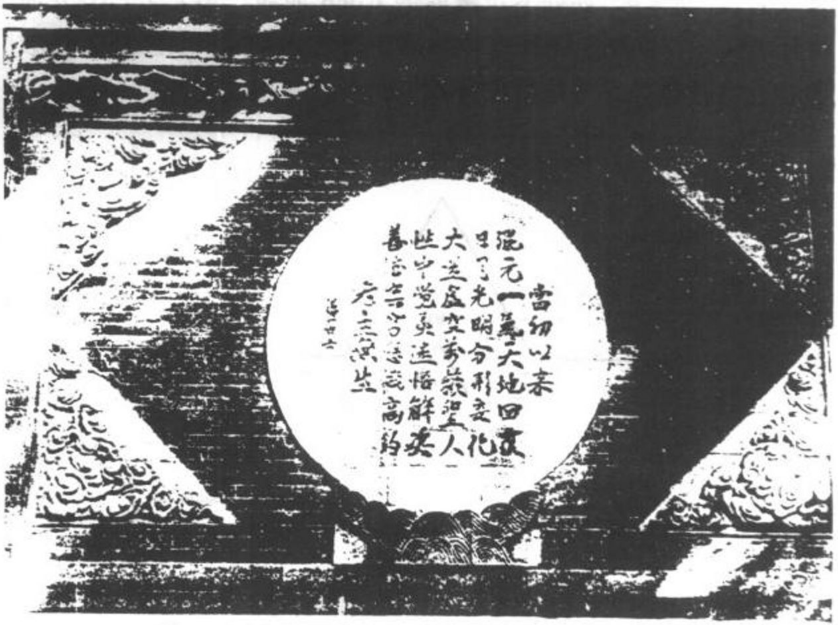


图 1.5　山西五台山南山寺的影壁上，写着“当初以来，混元一气，天地回覆，日月光明，分形变化……”的语句。现今南山寺中该影壁是 18 世纪重修的

少有好几次。

1.3　Koch 曲线

下面以最简单的 Koch 曲线来说明什么是分形。

平面上($d=2$)有一单位线段(图 1.6(a))，用以下迭代方法造出 Koch 曲线。第一步，将单位线段三等分，将中间部分用两条长 1/3 的折线来替代(图 1.6 (b))；第二步，将图 1.6(b)中的每条线段三等分，中间的一段用长 $1/3^2$ 的两条折线替代，得到图(1.6(c))；不断重复这样的迭代作法，无究次迭代后就生成了具有无穷

多弯曲、处处连续、处处不可微商的 Koch 曲线。事实上，Koch 曲线是经常用作模拟雪花和海岸线形状的数学模型（请注意：上述数学的迭代过程对应的是物理世界中的一种演化过程）。

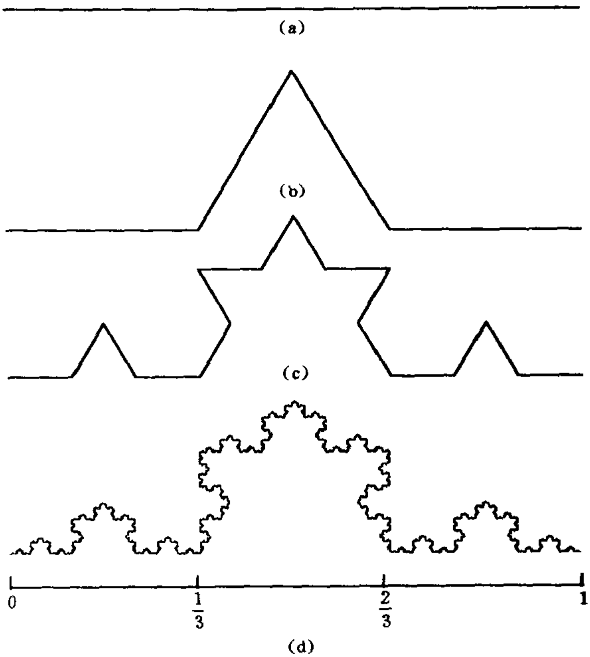


图 1.6 Koch 曲线的自相似特征

(a) 单位线段；(b) 单位线段三等分，中间一段用与其长度相同的两段替代；(c) 将 (b) 得到的图形中的线段再三等分，中间用与其长度相同的两条折线替代；(d) 不断重复以上迭代作法得到 Koch 曲线

Koch 曲线是分形的，因为它是自相似的。自相似性就是跨尺度的对称性。它意味着递归，在一个图形内部还有图形 (pattern)。从图 1.6 (d) 中可以清楚地看出这一点。自相似性指的是，把要考虑的图形的一部分放大，其形状与整体相同。设想把图 1.6 (d) 中 Koch 曲线区间 [0, 1/3] 中的图形放大 3 倍，放大后的图形与原来的曲线形状完全相同。把区间 [2/3, 1] 放大

3 倍，也会得到同样结果。虽然区间［1/3，1/2］，［1/2，2/3］的图形是倾斜的，但是把它放大，也会得到同样的结果。若把区间［0，1/9］的图形放大 9 倍，同样也可以产生与原来相同的图形。对更小的部分进行放大也是如此。不论多小的部分，若把它放大到适当大小，应该能得出与原来相同的图形。

既然 Koch 曲线是分形的，下面求其分维。将图 1.7 中部的图

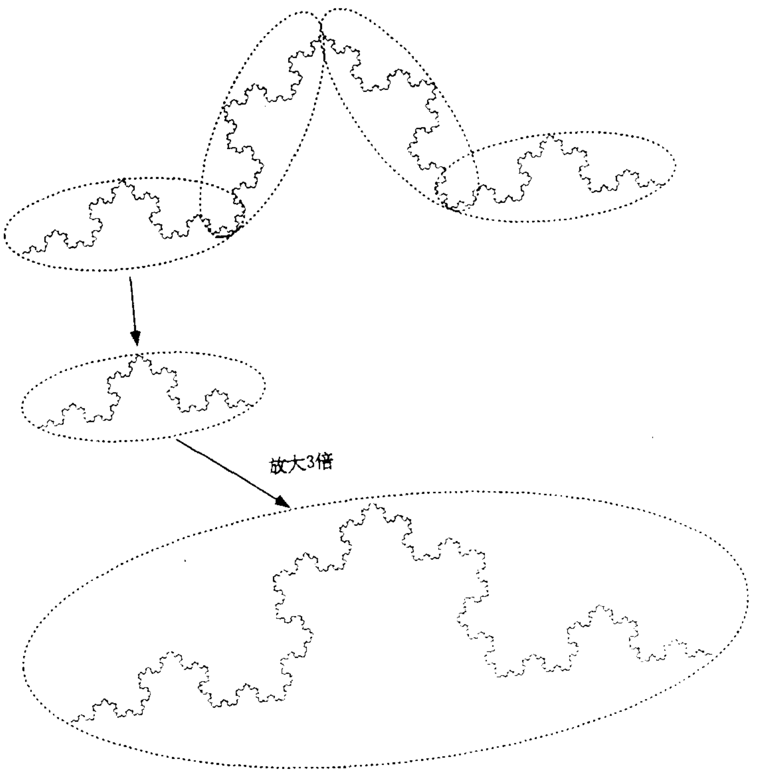


图 1.7 将一个 Koch 曲线（中部）放大了 3 倍后，得到下部的曲线，通过分解，可以看出，放大的曲线是由 4 个原来的 Koch 曲线组成的（上部）

形放大 3 倍后，得到图 1.7 下部曲线，它是由 4 个原来的图形组成的，因此，Koch 曲线的分维 D 为

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

在第 n 步迭代时，每个线段的长度为 $(1/3)^n$，一共有 4^n 个这样的线段。因此，Koch 曲线的长度在第 n 步时为

$$L_n = (4/3)^n$$

显然当 $n \to \infty$ 时，$L_n \to \infty$。这里我们见到一有趣的结果。一般（欧氏几何中）物体的长度与测量单位无关。对于镶嵌于平面之上的 Koch 曲线，其面积 S 为零，而当 $n \to \infty$，长度 $L \to \infty$。显然，S 和 L 都不能很好地描述 Koch 曲线这样的分形，而分维 $D=1.26$ 恰好反映了这种曲线的不规则性和复杂性。$D=\ln 4/\ln 3$ 是它不规则性的度量。

下面是产生 Koch 曲线的程序代码：

产生 Koch 曲线的计算机迭代算法（Basic 语言）

```
110'
110'  VON KOCH CURVE
120'
130  N=12: PI=3.14159
140  DIMX(2^(N+1)-2,Y(2^ (N+1)-2)
150  SCREEN 2,  0: CLS
160  WINDOW (0,-2/3)-(1,0)
170  'VIEW(0,0)-(599,399)
190  A=SQR (1/3) * (COS(PI/6)
200  B=SQR (1/3) * (SIN(PI/6)
210  A1=A: A2=B: A3=B: A4=-A
220  B1=A: B2=-B: B3=-B: B4=-A
230  '
240  X(0)=0: Y(0)=0
250  FORM=1 TON
260  L2=2^ (M-1)-1: L1=L2*2+1: L3=L1*2
```