医用
高等数学

张惠安 · 赵　廉/编著

湖南科学技术出版社

医用高等数学

主　编　张惠安　赵　廉

（以下按姓氏笔画排列）

主　审　刘泗章　孙玉文

副主编　刘礼恩　刘明芝

　　　　易非易　黄凤娟

编　者　马建中　车　文

　　　　王艳红　刘建华

　　　　刘　鑫　孙桂秋

　　　　李飞宇　郑洁刚

　　　　杨立群　赵修忠

湖南科学技术出版社

医用高等数学

编 著 者：张惠安　赵　廉
责任编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路 3 号
印　　刷：湖南省新华印刷二厂
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：邵阳市双坡岭
邮　　编：422001
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1996 年 7 月第 1 版第 1 次
开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：16
字　　数：397,000
印　　数：1—6,200
征订期号：地科 194—29
ISBN 7—5357—1915—5/O・150
定　　价：19.80 元

序

数学从来是人类智力训练和精神遗产的一个重要组成部分. 在当今，数学又是从事现代医学教学、科研不可缺少的工具.

由湖南医科大学等六所医科院校联合编写的《医用高等数学》将数学理论、方法与医学应用有机地融为一体，真正做到了逻辑条理通达严谨，取材内容生动活泼，语言文字简洁流畅，堪称一本在医学领域内难以多得的数学著作.

人们经历了近二百年的不断探索，终于把极限概念建立在坚实的数学基础上，最终体现为寥寥数语的“ε—δ”语言. 它是一把打开微积分门扉的钥匙，且贯穿微积分始终. 然而初学者往往不能一下子领悟它，于是就有所谓“形象化”的描述. 该教材采用了平行的两种描述极限的方式：形象直观的定义与严格的数学定义，犹如设置两块跳板过河，既相互独立，又相互映照，相得益彰，形成了该教材特有的风格.

该教材内容充实. 从微积分到线性代数，从微分方程到概率论，覆盖了当今大学基础数学的各主要门类，形成了有特色的医用高等数学. 本书可作为本科生、进修生及研究生的教材，也可供生物科学和医学工作者参考.

当前，数学教育的改革势在必行. 我国在近几年开展的“全国大学生数学模型竞赛”生机勃勃，已有愈来愈多的院校参加，学生不论专业，面对同一套试题. 这就给教师提出一个值得深省的问题，如何提高学生解决实际问题的能力. 教材中构造的大量医学数学模型无疑是对学生一种良好的启迪与训练.

任重而道远，愿在我国医学田园中辛勤耕耘的数学工作者，培育出更多更美的科技之花。

侯振挺

一九九六年四月

前　言

自从1983年湖南教育出版社出版《医学专业高等数学》以来，在全国医科院校的范围内，医用数学教材有如雨后春笋，新作不断涌现. 从内容到风格多种多样，形成百舸扬帆，万水竞流的局面.

十多年来，题材取舍的框架基本形成. “模糊数学”、“计算机知识”等内容不再出现在医用高等数学教材之中，此外还有若干一致认同的准则：教学内容与医学应用相结合；以阐明基本概念，介绍基本方法为主，理论推导为辅，省略一些冗长的数学证明；培养学生分析问题和解决问题的能力等.

去年年初，湖南医科大学、中国医科大学、沈阳医学院、衡阳医学院、湖南中医学院、白求恩医科大学等院校的同仁，一起在总结多年教学、科研经验的基础上，对各自的教材选取精华，合作编写了这本《医用高等数学》. 在编写过程中，我们多次讨论，力求做到：首先，按照课程要改革、学时要缩短的原则及各医学专业教学、科研的实际需要精选各章节内容，着重写清楚高等数学的基本概念、主要方法，适当照顾数学自身的基本理论，为学生正确使用高等数学知识去学习医学有关课程和进行科学研究提供必要的数学基础知识；其次，力求密切联系医学实际，培养学生分析、解决实际问题的能力，因此各章节都有医学实例、数学模型及其解法；再者着眼现代化，反映新进展，加强数值计算；最后，尽量做到深入浅出，层次分明，文字通顺、简捷，说理透彻，图表正确，便于自学.

此外，第一章的极限部分，采用了通俗语言和 ϵ—δ 语言两种平行的描述方式. 这就是§1.2与§1.2′的内容，教师在讲授时可酌情选用.

全书共分九章，有一元微积分，多元微积分，微分方程，概率论，线性代数等，并配有大量习题和答案. 总学时为52～80. 并用“*”号进行调节，适合作为医学院校各专业的必修课教材，如果再进行适当的增删，也可作为研究生、业大生教材及医学工作者的参考书.

本书在编写、出版过程中得到了各参编学校的领导、教务处领导和湖南科学技术出版社的热心关怀、支持和帮助；谢嘉平教授在百忙之中审阅了其中的部分章节. 在此一并致谢.

由于我们水平不高，经验不足，时间仓促，必有许多缺点错误，敬请各界同仁批评指正.

编　者

1996年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学的研究对象之一，而有关函数概念及其特性等读者已在中学学过一些，因此本章是在总结的基础上对某些方面再做适当深化拓广．同时介绍曲线的直线化，这是将非线性问题变成线性问题的一个重要方法．

极限是高等数学的一个重要工具，高等数学中几乎所有的重要概念都离不开它，并且有了它才能使有些初等数学不能解决的问题得到解决．

函数的连续性是可微的必要条件，它又是保证可以积分的充分条件，因此连续函数是高等数学研究对象的主要函数，在此将介绍函数连续、间断概念，并提出连续函数在闭区间上的一些性质，为后继章节作好准备．

§1.1* 函　　数

一、变量、常量、区间

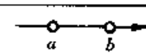
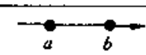
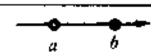
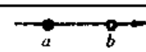
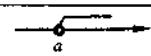
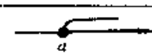
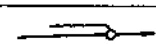
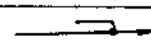
宇宙中的一切事物都是处在不间断的运动变化之中．把在某个运动过程中时时处处变化着的量称为变量(variable)；时时处处相对静止状态的量称为常量(constant)．如对每个具体人来说，在年龄时间的增长过程中，身高、体重都是变量，但器官个数是常量；再如在圆的半径增加过程中，圆的周长、面积都是变量，而其周长与直径之比却是常量(即圆周率)．

常量(也称常数) 可以看成是一个特殊的变量，即在某个运动过程中，量皆取相同的值．

我们常用字母 x，y，z，t，…与 a，b，c，d，…分别表示变量与常量．

除特别声明者外，本书所说的数都是实数．将全体实数组成的集合称为实数集，表记为 R．则变量的变化范围是 R 的子集，其中许多可用所谓区间(interval)来表示，现将各种区间的定义、名称、符号及图象列表如下(a 与 b 是两个实数，$a<b$)．

表 1—1　　　　**各种区间及其表示**

定义	名　称	符　号	图　象
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	左闭右开区间	$[a, b)$	
$\{x\mid a<x\}$	无穷区间	$(a, +\infty)$	
$\{x\mid a\leqslant x\}$	无穷区间	$[a, +\infty)$	
$\{x\mid x<a\}$	无穷区间	$(-\infty, a)$	
$\{x\mid x\leqslant a\}$	无穷区间	$(-\infty, a]$	

除表1—1所列出的各区间外，还有几个特殊区间要求熟悉：区间 $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=R$，开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$（其中 δ 是某个正数）称为点 a 的 δ 邻域（neighbour hood）.

二、函数概念

在某个变化过程中，常常有两个或几个变量同时变化，而且它们的变化是互相联系着的，这就需引出函数概念.

定义1 如果对于非空数集 D 中的任意 x，按照某一确定的对应关系 f 都有 R 中唯一一个实数 y 与之对应，则称对应关系 f 是定义在数集 D 上的函数（function）. 记为

$$f: D\to R$$

x 称为自变量(independent variable)，y 称为因变量(dependent variable)或 x 的函数值，D 称为定义域(domain of definition)，函数值的集合称为值域(range)，可记为 $f(D)$.

习惯上，我们把变量 x、y 之间的函数关系记作

$$y=f(x),$$

还称 y 是 x 的函数，这虽与函数值有混淆，但有时会带来说话上的方便，因此仍按习惯说法.

在学习函数定义时，应注意它有两个要素，即定义域和对应规则. 只有这二者确定后，函数才算完全确定. 例如

$$f(x)=\lg x^2 \quad \text{和}\ g(x)=2\lg x$$

不能认为是同一函数，因为它们的定义域不同.

定义域就是使得函数有意义的自变量的全体. 因此在实际问题中定义域是由问题的实际意义确定的，但当我们只是在数学上一般地研究由某一具体解析式所规定的函数时，则定义域由解析式本身确定.

例1 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ 的定义域.

解 此函数是函数 $\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 与函数 $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的和，故它的定义域是这两个函数定义域的交集. 要使得函数 $\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 有意义，必须使 $2-x^2>0$ 即 $|x|<\sqrt{2}$，因此其定义域为 $(\sqrt{-2},\sqrt{2})$. 对于函数 $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$，必须使 $\left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1$，即 $0\leqslant x\leqslant 4$，因此其定义域为 $[0,4]$. 故函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的定义域为 $(\sqrt{-2},\sqrt{2})\cap[0,4]=[0,\sqrt{2})$.

例2 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$，$u=\varphi(x)=x+1$，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 易知 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$ 的定义域为 $|u|\leqslant 2$，即 $[-2,2]$，$\varphi(x)=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 为了要使得 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$ 有意义，必须将 x 取在 $[-3,1]$ 才能使 $u=\varphi(x)=x+1$ 的值域在 $[-2,2]$ 内，故 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[-3,1]$.

对应规则 f 具有广泛的意义，不仅它的表达形式有很多，而且它的性质给今后讨论或运算带来不少说法，学习时要多加注意，下面我们还要详细讨论.

三、函数的表示法及特性

1. 函数的表示法

函数概念中的对应规则有很多表达形式，一般可分为下面三种：

（1）解析法

将自变量和因变量之间的对应关系用数学式子表达出来的方法称为解析法．如半径为 R 的球的体积可表为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$．又如在生物学、肿瘤学及流行病学中常用的生长模型 $N(t)=\frac{M}{1+Ae^{-\lambda_0 t}}$，其中 M、A、λ_0 均为常数．它表示生物群体的大小 N 随着时间 t 的变化规律．

解析表示法的优点是形式简明，便于进行理论研究．

（2）列表法

列表法是用表格列出一系列自变量的值与对应的因变量的值，以示其间的对应关系．如诊断糖尿病，可作葡萄糖耐糖量试验，其办法是先测被试者清晨空腹的静脉血糖一次，然后让其口服一次葡萄糖（按体重每公斤 1.75g），再隔 1，2，3 小时，各测一次血糖．假定对两位被试者测得结果如下表（表 1—2）：

表 1—2 　　　　**血糖含量表**

口服葡萄糖后时间 t（小时）	0（空腹）	1	2	3
1 号被试者血糖水平 y_1（mg%）	100	150	120	95
2 号被试者血糖水平 y_2（mg%）	150	230	210	190

医生根据以往资料，可以从函数表格中的数据确诊 1 号为正常人，2 号血糖值高，为糖尿病患者．

这种表示法的优点在于知道了表上自变量的值，不经演算就能立即得到对应的函数值，缺点是不能得出函数的任意值，亦不便于理论推导．

（3）图象法

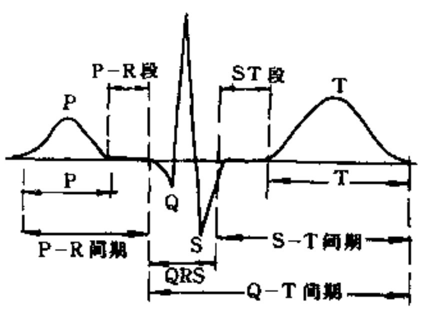


图 1—1

图 1—2

图象法是把自变量与因变量之间的函数关系借助图形表示出来．如检查心脏病常用心电图．心电图是将心肌活动过程所产生于体表的电位差随时间记录下来的图象，典型心电图由 P 波、P-R 段、QRS 波群、ST 段、T 波组成，见图 1—1．图 1—2 是一患者心电图，由于 T 波倒置，可确定为冠状动脉供血不足．

图象法的优点是直观性强，但不便于作理论推导和演算．

最后还得提一下分段函数的概念．在定义域内的不同区间内由不同解析式表示的函数叫分段函数．如某出租车票价与里程的函数关系可表为

$$f(x)=\begin{cases}1.0\text{ 元，当 } 0<x\leqslant 3\text{ 公里；}\\1.6\text{ 元，当 } 3<x\leqslant 5\text{ 公里；}\\2.1\text{ 元，当 } 5<x\leqslant 7\text{ 公里.}\end{cases}$$

在求分段函数的函数值时，应将不同范围内自变量的值代入相应的函数表达式，如乘坐4公里(约4站)则应付1.6元，即 $f(4)=1.6$ 元.

2. 函数的几种特性

(1) 单值性与多值性

自变量 x 取定义域内一个值时，按函数定义只有一个确定的值与之对应，我们就说此函数是单值的，如 $y=x^2$，$y=\sin x$、$y=e^x$ 都是单值的. 但有时亦遇到如抛物线 $y^2=2px$（或 $y=\pm\sqrt{2px}$），圆周 $y^2=r^2-x^2$（或 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$），对一个 x 有两个 y 与之对应，有时亦把它称为多值函数. 由于我们研究的函数是单值的，遇到多值函数时是将其分成几个单值函数处理，如圆周分成上半圆周和下半圆周处理（即分成 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 处理）.

(2) 函数的有界性

设函数的定义域为 D，若存在一个正数 M，使得对于任何 $x\in D$，总有

$$|f(x)|\leqslant M\quad(\text{或 } -M\leqslant f(x)\leqslant M),$$

则说 $f(x)$ 在区域 D 上为有界函数（bounded function）.

例如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在区域（$-\infty$，$+\infty$）上都是有界函数，因为存在 $M=1$，对于任何 $x\in$（$-\infty$，$+\infty$）都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$ 成立. 而 $y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 都不是有界函数，因找不到那样一个正数 M，使得对于 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的所有 x，其函数值的绝对值都小于 M，这点可从图形看出. 要注意，我们说的是函数值有界而不是定义域有界，所以 $y=\sin x$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内是有界的. 另外 M 只要存在，个数就不唯一，如 2，3，3.5，…都可作为正弦函数的 M.

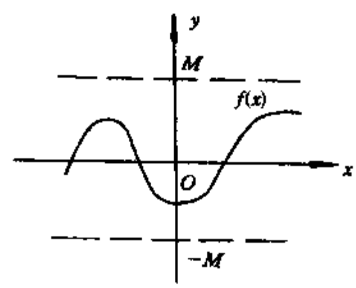


图 1—3

(3) 函数的奇偶性

若函数 $y=f(x)$ 在定义域内满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数(even function).

若函数 $f(x)$ 在定义域内满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数(odd function). 如 $y=x^2$、$y=\cos x$ 为偶函数，$y=x^3$、$y=\sin x$ 为奇函数，$y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数、也非偶函数. 偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

(4) 函数的增减性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若在 D 中任取 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 是单调增加的. 反之，任取 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单调减少的.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数(monotone function). 若函数在某区间内是单调的，这个区间称为单调区间.

如 $y=x^2$ 在区间(0，$+\infty$）上是单调增加函数，在（$-\infty$，0］上是单调减少函数，而在（$-\infty$，$+\infty$）上不是单调函数.

(5) 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在非零常数 T，使得对定义域中任意 x，都有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数(periodic function). T 为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期是指最小正周期.

3. 复合函数与反函数

(1) 有时因变量 y 与自变量 x 的联系不是直接的，而是通过另外的变量间接联系起来的.

定义 2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域全部包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的复合函数 (compound function)，其中 x 称为自变量，u 称为中间变量.

例如：$y=e^{\cos x+1}$是由 $y=e^u$，$u=\cos x+1$ 所构成的复合函数.

$y=\sqrt[3]{\lg a^x}$ ($a>0$，$a\neq1$) 是由 $y=\sqrt[3]{u}$，$u=\lg v$，$v=a^x$ 三个函数构成的复合函数.

学习复合函数时要会将一个复合函数分解为若干个简单函数的复合，这里说的简单函数是指基本初等函数或常数与基本初等函数（在下一段介绍）经四则运算得出的函数. 并且还应注意，并不是任何两个函数都可以复合成复合函数.（为什么?）

(2) 有时自变量与因变量的依赖关系可以相互交换，所以下面给出反函数概念.

定义 3 设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果对于任意 $y\in f(D)$ 有唯一一个 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，那么就让这个 x 与 y 对应，则在 $f(D)$ 上定义了一个新函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D).$$

从反函数的定义不难看到，函数 $y=f(x)$ 的定义域，正好是它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域；函数 $y=f(x)$ 的值域，正好是它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域. 按照对应关系 f 来说，D 与 $f(D)$ 之间必须是一一对应的，为了保证这种一一对应关系，即使得函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数存在，只要函数 $f(x)$ 在 D 上是单调的.

例如函数 $y=a^x$ ($0<a\neq1$) 的定义域是 R，值域是 $(0,+\infty)$，是单调函数，所以有反函数存在，反函数为 $x=\log_a y$，$y\in(0,+\infty)$.

要注意，人们在使用符号时，习惯上总是将 x 作自变量，y 作因变量. 因此一般来说，函数 $y=f(x)$ 的反函数不是写作 $x=f^{-1}(y)$，而是写为 $y=f^{-1}(x)$，如 $y=a^x$ 的反函数不是写作 $x=\log_a y$，而是写为 $y=\log_a x$，本来函数 $y=f(x)$ 的图象与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象是同一个，但当 x 和 y 互换位置后，函数 $y=f(x)$ 的图象与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象就不同了，是关于直线 $y=x$ 对称的（图 1—4），因此反函数的定义和习惯表示法在学习时要注意区别.

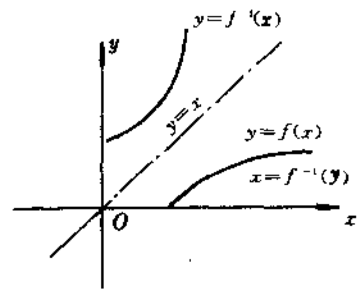


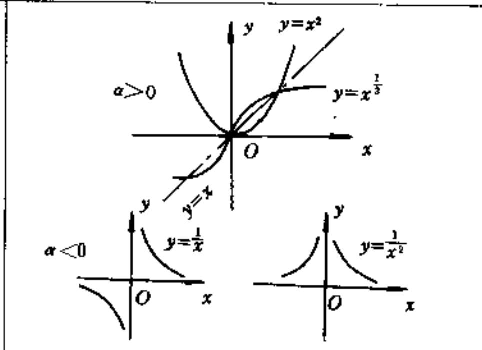
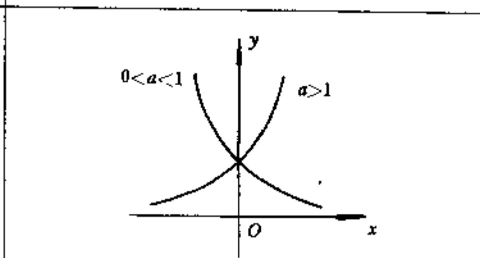
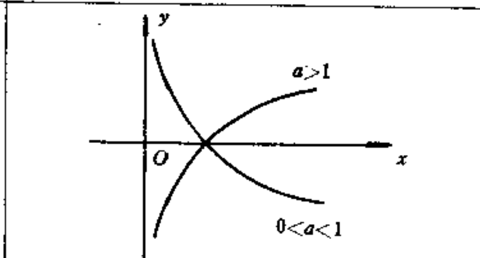
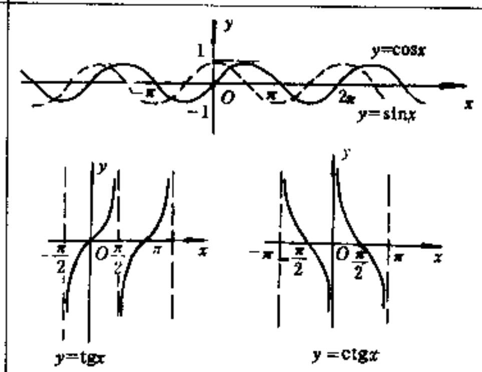
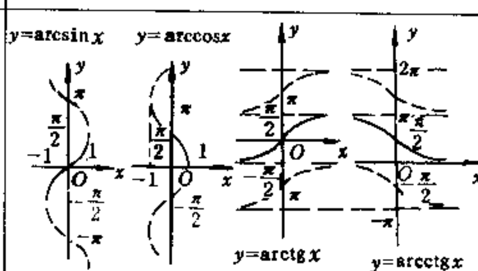
图 1—4

四、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等称为基本初等函数，这些函数在中学都已学过，但为了今后的学习和查阅方便，把这些函数的表达式、定义域、图象和一些简单性质列表如下（表 1—3）.

表 1—3　　基本初等函数表

函数名称	表达式	定义域	图　象	简单性质
幂函数	$y=x^{a}$	a 取值不同函数的定义域不同		图象都经过(1,1)点，a 为偶数时，图象关于 y 轴对称 a 为奇数时，图象关于原点对称 a 为负数时，图象在原点间断
指数函数	$y=a^{x}$ $\begin{pmatrix}a>0\\ a\neq 1\end{pmatrix}$	$(-\infty,+\infty)$		图象都经过点(0,1) 当 $a>1$ 时，a^{x} 为增函数 当 $0<a<1$ 时，a^{x} 为减函数
对数函数	$y=\log_a x$ $\begin{pmatrix}a>0\\ a\neq 0\end{pmatrix}$	$(0,+\infty)$		图象都经过点(1,0) 当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 为增函数 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 为减函数
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数，有界函数 周期 $T=2\pi$
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		偶函数，有界函数 周期 $T=2\pi$
	$y=\mathrm{tg}x$	$x\in R$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$		奇函数，周期 $T=\pi$
	$y=\mathrm{ctg}x$	$x\in R$ $x\neq k\pi$		奇函数，周期 $T=\pi$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		奇函数，增函数
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		非奇非偶，减函数
	$y=\mathrm{arctg}x$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数，增函数
	$y=\mathrm{arcctg}x$	$(-\infty,+\infty)$		非奇非偶，减函数

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所得到的函数统称为初等函数（elementary function）.

例如多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x),Q(x)$ 为多项式，以及 $y=\log_a x+\dfrac{e^{\sin\sqrt{x}}-1}{x^2}$ 等都是初等函数．但是分段函数，如

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{当 } x<0;\\ 0 & \text{当 } x=0;\\ 1 & \text{当 } x>0\end{cases}.$$

就不是初等函数.

由于实际的需要，有必要将函数概念进一步拓宽．例如，若把定义域和值域均由实数集推广到复数集，这种对应规则，叫复变函数．若把定义域和值域都改为任意的集合，在这两个集合上定义的对应规则称为映射．如病情的"轻"、"中"、"重"分别对应着"＋"、"＋＋"、"＋＋＋"，这是所谓的一一映射．以上这些"拓广了的函数"概念，实际上很有用，但已超出本书范围，这里不再讨论.

五、曲线的直线化

曲线直线化的基本方法就是通过对坐标轴上度量尺度的变换，使得一个在原坐标系下的曲线，化成在新坐标系下的直线.

例 3 化 $y=\dfrac{1}{x}$ 为直线.

解 设 $X=\dfrac{1}{x}$，$Y=y$．即将横坐标轴由原来的普通度量尺换成了现在的倒数度量尺，纵坐标轴仍用普通度量尺，则 $y=\dfrac{1}{x}$ 在新坐标系上就成了直线 $Y=X$.

在生产尤其是医药学科中，较多见的是幂函数和指数函数（或对数函数），有时为了简化对问题的研究，常用变数代换法，将这类函数化为线性函数.

例 4 某些实验数据经判定，其经验公式是幂函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$，$(x>0)$．它的图形在普通坐标纸上是一条抛物线.

现在将其线性化，对上式两边同时取常用对数，得 $\lg y=\lg\dfrac{1}{2}+2\lg x=2\lg x-0.3010$，令 $Y=\lg y$，$X=\lg x$ 得 $Y=2X-0.3010$．显然这是斜率为 2，截距为 -0.3010 的直线方程．可见，此幂函数如果在横轴和纵轴均用对数尺度的双对数坐标纸上作图必是一条直线．所以，如实验数据在双对数坐标纸上作图，其图形呈直线的话，则其经验公式是幂函数.

例 5 一次静脉注射某药后，血药浓度随时间的变化规律可用一个具有负指数的指数函数来刻划．设 $C(t)$ 表示时刻 t 的血药浓度，C_0 表示 $t=0$ 时的血药浓度，k 为消除速率常数，则

$$C(t)=C_0e^{-kt},$$

它的图形在普通坐标纸上是一条指数曲线，欲将其线性化，对上式两边同时取常用对数，得

$$\lg C(t)=\lg C_0-kt\lg e=\lg C_0-0.4343kt,$$

令 $Y=\lg C(t)$，得

$$Y=\lg C_0-0.4343kt.$$

显然这是一以 $-0.4343k$ 为斜率，以 $\lg C_0$ 为截距的直线方程．如果在横轴是时间 t（普通尺），纵轴是 $\lg C(t)$（对数尺）的对数坐标纸上作图，必是一条直线，所以，如果实验数据在单对数

坐标纸上作图，其图形呈直线的话，则其经验公式是指数函数.

可见曲线的直线化是将非线性问题变成线性问题处理的有效方法之一.

§1.2 极限的直观描述

为了掌握变量的变化规律，有时不仅要考察变量在变化过程中的取值情况，还要从它的变化过程中来判断它的变化趋势，现在分两种情况进行讨论。

一、数列极限

数列的概念：数列（sequence）就是能用自然数编号的一串数。记为 $\{a_n\}$：a_1，a_2，…，a_n，…. 或者说数列是一个定义在正整数集合上的函数，即 $a_n=f(n)$.

例 1 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，…

例 2 $\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$：1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$，…，$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，…

例 3 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…

例 4 $\{(-1)^{n-1}\}$：1，-1，1，…，$(-1)^{n-1}$，…

在上面的这些数列中，我们不仅要知道 n 取每个值时，数列 $\{a_n\}$ 的取值情况，而且要知道当自变量 n 越来越大的变化过程中(记 $n\to\infty$)，数列 $\{a_n\}$ 的变化趋势. 可以看到，在例 1 中，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 越来越接近于零（见图 1—5），在例 2 中，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$ 也越来越接近于零，不过是振动着接近于零（见图 1—6）. 在例 3 中，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 越来越接近于 1（见图 1—7）.

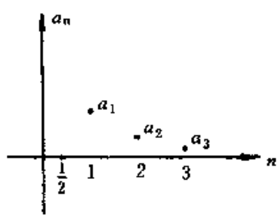


图 1—5

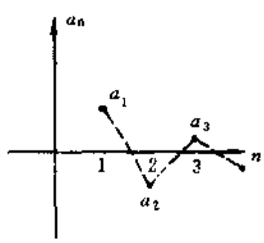


图 1—6

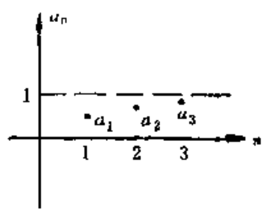


图 1—7

而例 4 中，当 $n\to\infty$ 时，$a_n=(-1)^{n-1}$ 无确定的趋向，把这种趋向抽象成下面的数列定义：

定义 4 对于数列 $\{a_n\}$，若存在常数 A，当 n 无限增大时（记 $n\to\infty$），a_n 无限接近常数 A，并且要多近就多近，则把常数 A 称为数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限(limit)，也称为数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. 记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A.$$

上面的定义只是描述性的，没有用量来刻划，但又如何用量来刻划 a_n 无限接近常数 A，并且要多近就多近呢？可以换成，当 $n\to\infty$ 时，$|a_n-A|$ 要多小就多小，而刻划 $|a_n-A|$ 要多小就多小可以用"任给一个正数 ε 不论多么小，$|a_n-A|$ 比 ε 还小，但只要 n 适当大，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 就对一切 a_n 都成立.

总之，对数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 用量化来描述时，可以这样说：任给 $\varepsilon>0$ 不论多小，总存在一个时刻（这里指某一项），在这时刻以后（这里指某一项以后）的一切 a_n，都有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

成立，则就把 A 作为数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

例如对数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 来说，当 $n\to\infty$ 时，$|a_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$ 可以任意小，譬如说：要想 $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.1$，只需 $n>10$，即存在的时刻为第 10 项，第 10 项以后的一切 $a_n=\frac{1}{n}$，都有 $|a_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.1$；要想 $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.01$，只需 $n>100$，即存在的时刻为第 100 项，第 100 项以后的一切 $a_n=\frac{1}{n}$，都有 $|a_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.01$. 这样就可以把 0 作为数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

二、函数极限

和数列极限一样，函数 $y=f(x)$ 的极限也是讨论自变量 x 的变化过程中，函数值 y 的变化趋势，只是数列 $a_n=f(n)$ 的自变量 n 是整序变量（即 n 取一切正整数），而函数的自变量是连续变量，并且它的变化过程可以是 $|x|$ 无限增大（记 $x\to\infty$），也可以是 x 越来越靠近某点 x_0（记 $x\to x_0$），于是可以分两种情况给出函数极限的定义如下：

定义 5 对于函数 $y=f(x)$，$x\in R$，如果存在常数 A，当自变量 $|x|$ 无限增大时（即 $x\to\infty$ 时），函数值无限接近常数 A，并且要多近就多近（即 $|f(x)-A|$ 要多小就多小），则把常数 A 称为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

从几何图形上看，函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 表示随着 x 的增大，曲线 $f(x)$ 与直线 $y=A$ 越来越靠近，并且曲线 $y=f(x)$ 上的点与直线 $y=A$ 上的对应点的距离 $|f(x)-A|$ 要多小就多小（见图 1—8，图 1—9 和图 1—10）.

例 5 函数 $f(x)=2+\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时，以 2 为极限（即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$）. 因为

$$|f(x)-A|=\left|\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\right|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$$

当 $x\to\infty$ 时可以任意小（见图 1—8）.

例 6 函数 $f(x)=2^{-x}$ 当 $x\to+\infty$ 时，以 0 为极限. 因为

$$|2^{-x}-0|=\left|\frac{1}{2^x}\right|$$

当 $x\to+\infty$ 时可以任意小（见图 1—9）. 同理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x=\frac{\pi}{2}$

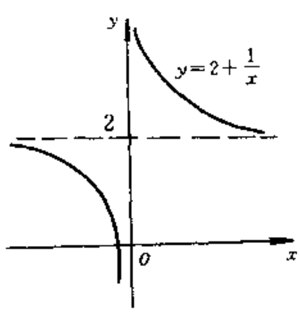


图 1—8

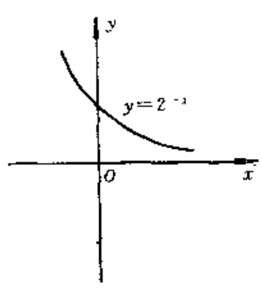


图 1—9

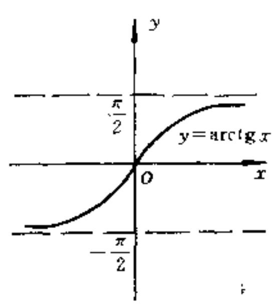


图 1—10

定义 6 对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在常数 A，当自变量 x 无限接近某点 x_0（但不等于 x_0）时（即 $x\to x_0$ 时），函数值无限接近常数 A，并且要多近就多近（即 $|f(x)-A|$ 要多小

就多小),则把常数 A 称为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

从几何图形上看出，函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 表示，当 $x\to x_0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上的点与直线 $y=A$ 的对应点间的距离 $|f(x)-A|$ 可以任意小(见图 1—11,图 1—12).

例 7 函数 $f(x)=x+3$ 当 $x\to 1$ 时以 4 为极限(即$\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4$). 因为 $|f(x)-A|=|(x+3)-4|=|x-1|$ 当 $x\to 1$ 时可以任意小（见图 1—11).

例 8 函数 $f(x)=\sin x$ 当 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时以 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为极限$\left(\text{即}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 因为 $|f(x)-A|=\left|\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\right|\leqslant\left|x-\frac{\pi}{3}\right|$（此不等式可以在 §2.4 中用拉格朗日中值定理证明得到)，所以当 $x\to\frac{\pi}{3}$时，$|f(x)-A|\leqslant\left|x-\frac{\pi}{3}\right|$可以任意小（见图 1—12). 但是$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在,因为 $\sin x$ 当 $x\to\infty$ 时它的函数值在 -1 和 1 之间摆动,不趋于任何确定的常数. 故$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

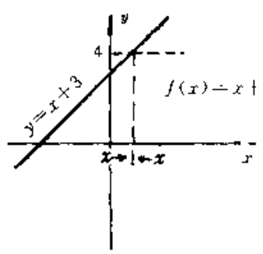


图 1—11

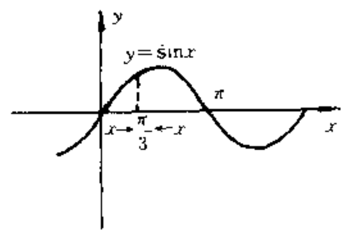


图 1—12

学习函数极限概念时，读者要注意:

(1) 有时我们还需要区分 x 趋于无穷大的符号，如果 x 从某一时刻起，往后总是取正值且无限增大，则称 x 趋于正无穷大，记作 $x\to+\infty$；如果 x 从某一时刻起，往后总是取负值且$|x|$无限增大，则称 x 趋于负无穷大，记作 $x\to-\infty$.

"$x\to x_0$"是指 x 从 x_0 的左右两侧趋近 x_0（但不等于 x_0)，如果仅从 x_0 的左侧趋于 x_0，即 $x\to x_0-0$，这时的极限称为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限(limit on the left),记作 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$. 类似可以定义右极限(limit on the right). 记作 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$.

例 9 考察 $f(x)=\begin{cases}1,\text{当 } 0<x<2;\\ 2,\text{当 } 2\leqslant x<3\end{cases}$ 当 $x\to 2$ 时的极限. 因为 $\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=1$，而 $\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=2$(见图 1—13),所以此时左右极限不相同.

显然可以看出：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 同时存在,并且 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$(即左,右极限同时存在且相等).

(2) 我们研究 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限，是指 x 充分接近于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势，而不是求 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 的函数值. 因此，研究 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限问题与 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 是否有定义无关.

例如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\begin{cases}x+1,\text{当 } x\neq 1\text{ 时},\\ \text{无意义},\text{当 } x=1\text{ 时},\end{cases}$ 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，但是 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=2$. 所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ 与 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 是否有定义无关（见图

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com