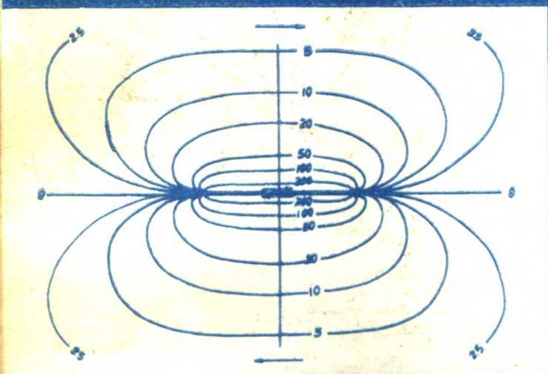
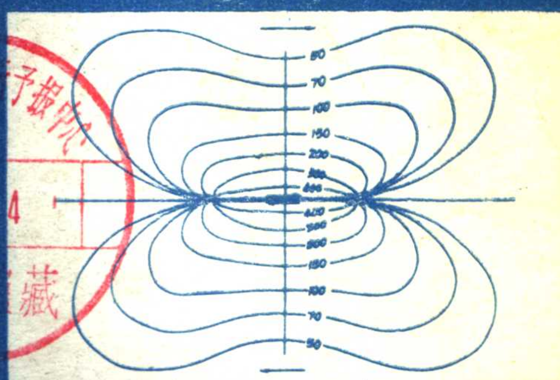


静力位错理论



黄立人 顾国华 编

地震出版社

静力位错理论

黄立人　顾国华　编

地震出版社

1982

内 容 提 要

本书概要叙述了静力弹性位错理论的一些基本原理和运算方法，主要介绍了各向同性的无限、半无限介质和各种介质结构模型中的静力弹性位错问题，以及应用位错理论研究位移场、应力场和倾斜场的一些实例。此外，还阐述了静态形变资料的反演问题。

本书可供从事地震地质、地球物理和地形变研究的科技人员参考。

静 力 位 错 理 论

黄立人 顾国华 编

地震出版社出版

北京复兴路63号

北京丰台岳各庄印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

850×1168 1/32 11 印张：277 千字

1982年 4 月 第一版 1982年 4 月 第一次印刷

印数：001-3000

统一书号：13180·128 定价：1.40元

编者的话

研究地震过程中断层面的粘滑、倾滑、蠕动以及错动引起的位移场、倾斜场和应力场的变化，这是研究地震震源机制和探索地震预报的一个重要途径。位错理论是开展这些研究的有力工具。

二十多年以来，不少学者将固体物理中的位错理论用于研究地壳在不同介质条件下破裂时所产生的静态场，取得了很大的进展。近来，应用地形变台站和大地测量复测资料，研究地震的动力学过程和地震前后的静态和准静态的形变场，已成为一个重要的研究内容。

鉴于国内还没有一本系统介绍位错理论的书籍，我们根据有关论文，整理编写此书，供从事地形变、地震地质和地球物理工作同志参考。

本书主要介绍了静力学弹性位错理论，其中包括基本概念，无限和半无限介质的静力弹性位错理论，各种介质结构模型中的静力弹性位错以及近年来应用弹性位错理论研究形变场的一些成果，每一部分相应附有实例。本书没有涉及动力学弹性位错理论和介质非弹性的位错理论。

为了便于查对，没有将全书的公式符号统一起来，而沿用主要参考文献中所用的记号，但都作了必要的说明，不会造成阅读上的困难。

陈鑫连同志审阅修改了本书全稿，覃忠德同志绘制了全部插图，在此谨致谢意。

黄立人　顾国华

1982年

目　　录

编者的话
第一章　基本原理 ………………………………………… (1)
§1.1 弹性理论的基本公式与基本定理 ……………… (2)
§1.2 晶体位错与弹性位错理论的一般概念 ………… (13)
第二章　各向同性均匀介质中的静力弹性位错理论 ………………………………………… (18)
§2.1 各向同性无限介质中的静力弹性位错 ………… (18)
§2.2 无限介质中的沃尔特拉位错 …………………… (25)
§2.3 半无限各向同性介质中的静力弹性位错 ……… (39)
§2.4 断层产生的形变场 ……………………………… (111)
第三章　各种不同结构介质中的静力弹性位错 … (178)
§3.1 水平分层介质中的静力弹性位错 ……………… (178)
§3.2 倾斜分层介质中的静力弹性位错 ……………… (212)
§3.3 垂直分层介质中的静力弹性位错 ……………… (233)
§3.4 球状介质中的静力弹性位错 …………………… (250)
第四章　反演问题和准静态位错问题 ……………… (283)
§4.1 静态位移资料的反演 …………………………… (283)
§4.2 静态应变资料的反演 …………………………… (319)
§4.3 准静态位错问题 ………………………………… (329)

第一章 基本原理

自从1958年J.A.Steketee将弹性位错理论引入到地球物理学中以来，弹性位错理论已经成为地球物理学，尤其是地震学的一个重要组成部分。

根据弹性位错理论的观点，地壳的破裂现象可以看作是弹性介质内的一种位移突变。因而，如果不考虑破裂现象的时间进程，就可以用静力弹性位错理论来研究这种位移突变造成的弹性场（地球物理场）的变化。反过来，知道了弹性场的变化也可以根据位错理论推断产生这种变化的原因。

虽然理想介质（均匀、无限、各向同性的弹性体）中的位错理论，早在本世纪初就已经建立，但是要把这种理想化模型的理论应用于真实（地球）介质（尽管也要作许多简化），仍然需要做许多艰苦的工作。二十多年来，许多学者在这方面作出了贡献。他们首先把无限空间的位错理论发展为半空间的理论，然后把形状不规则的任意位错面简化为点源式矩形位错面，先后求得了倾滑和走滑位错的位移场公式，并把它们应用于地震形变场的研究。以后许多学者陆续研究更加接近地壳介质真实情况的弹性介质的位错现象，发展了各种不均匀分层介质及球形介质的位错理论，解释了更为复杂的地震现象，取得了许多有意义的结果。这方面的工作还在不断深入。同时，考虑到地壳介质具有一定的塑性，正在研究更为复杂的弹塑性位错理论。

除了静力弹性位错理论本身的发展之外，最近几年，在位错理论的应用方面也有进展。一个是结合反演理论从地震造成的静态场变化来推求震源参数，另一个是把位错理论用于研究断层的蠕动和粘滑等准静态现象，这些都为弹性理论开拓了新的研究领域。

§1.1 弹性理论的基本公式和基本定理

一、基本公式

设在笛卡尔直角坐标系中，质点（x_1，x_2，x_3）的位移分量为$u_1(x_1,x_2,x_3)$，$u_2(x_1,x_2,x_3)$，$u_3(x_1,x_2,x_3)$，应变张量为e_{ij}，脚标$i,j=1,2,3$。

应变与位移的关系式为

$$e_{ij}=e_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)。\tag{1.1}$$

各分量为

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1};\qquad 2e_{12}=2e_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2};\qquad 2e_{23}=2e_{32}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3};\qquad 2e_{13}=2e_{31}=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}。$$

当弹性体的介质连续、均匀、变形甚微，且在初始应力等于零的条件下，则应力与应变的关系为

$$\tau_{ij}=\tau_{ji}=C_{ijkl}\cdot e_{kl}=C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}。\tag{1.2}$$

式中τ_{ij}为应力张量，C_{ijkl}为弹性模量，当C_{ijkl}的脚标i与j，k与l，或ij与kl的位置互换时，弹性模量不变。

在各向同性介质中，则有

$$\tau_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kl}+2\mu e_{ij},\tag{1.3}$$

式中λ和μ为拉梅常数，δ_{ij}为克朗内克（Kronecker）符号。当$i=j$时，则$\delta_{ij}=1$；当$i\neq j$时，$\delta_{ij}=0$。于是式(1.3)可写为

$$\tau_{11}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{11};$$

$$\tau_{22}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{22};$$

$$\tau_{33}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{33};$$

$$\tau_{12}=\tau_{21}=\mu e_{12};$$
$$\tau_{23}=\tau_{32}=\mu e_{23};$$
$$\tau_{13}=\tau_{31}=\mu e_{13}。$$

式中（$e_{11}+e_{22}+e_{33}$）常用θ表示。

从而，经简单代换，即可得出在各向同性介质中的应力与位移的关系式

$$\tau_{kl}=\lambda\delta_{kl}u_{n,n}+\mu(u_{k,l}+u_{l,k})。\tag{1.4}$$

式中 $u_{k,l}=\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}$。

当弹性体受体力作用时，其平衡方程为

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}+\rho f_i=0。\tag{1.5}$$

式中 $\rho(x_1,x_2,x_3)$为介质的密度，$f_i(x_1,x_2,x_3)$为x_i方向上单位质量所受的体力。

若取$\overset{\nu}{T}_k$表示单位面积元上的法向力，不论在弹性体内还是在界面上，当面元的法线为ν_l时，则

$$\overset{\nu}{T}_k=\tau_{kl}\cdot\nu_l。\tag{1.6}$$

此时，弹性体内单位体积的弹性应变能为

$$W=\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}。\tag{1.7}$$

二、贝蒂(Betti)互易定理

同一弹性体有两组不同的体力（F_k^1、F_k^2）、应力（τ_{kl}^1、τ_{kl}^2）和位移（u_k^1、u_k^2），假设第一组力作用于第二组力所产生的位移而做的功等于第二组力作用于第一组力所产生的位移而做的功，这就叫做贝蒂互易定理，其表达式为

$$\iiint u_k^1F_k^2\rho dV+\iint u_k^1\tau_{kl}^2\nu_l dS=\iiint u_k^2F_k^1\rho dV+$$
$$+\iint u_k^2\tau_{kl}^1\nu_l dS。\tag{1.8}$$

式中ν_l为面元dS的法线，dV为体积元。

三、单位体力所产生的位移场和应力场

在各向同性的均匀介质中，对于三维的弹性位错问题，常取作用于一点的单位体力所产生的位移场和应力场的公式。

在有体力作用时，式（1.5）可改写为

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta+\mu\nabla^2(u,v,w)+$$
$$+\rho(X,Y,Z)=0。\qquad (1.9)$$

式中x，y，z为点的坐标；u，v，w为位移量；X,Y,Z为单位体积的体力分量；ρ为密度；∇^2为拉普拉斯算子；

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}。$$

式（1.9）的通解是其特解加上无体力作用时方程的通解，其方程为

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta+\mu\nabla^2(u,v,w)=0。\qquad (1.10)$$

取一定边界条件，以求式（1.9）的解。

由弹性理论可知，位移u可以用标量位ϕ和矢量位（F,G,H）表示：

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}。\qquad (1.11)$$

同理，体力为

$$X=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}。\qquad (1.12)$$

于是式（1.9）为

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi+\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 H-\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 G\right)+$$
$$+\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)=0。\qquad (1.13)$$

若能求得下式的特解，便可求得式（1.13）的特解：

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi+\rho\Phi=0,\\&\mu\nabla^2E+\rho L=0,\\&\mu\nabla^2G+\rho M=0,\\&\mu\nabla^2H+\rho N=0。\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

其中四个函数分别为

$$\left.\begin{aligned}&\Phi=-\frac{1}{4\pi}\iiint\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}+Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}+\right.\\&\qquad\left.+Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'dy'dz',\\&L=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}-Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'dy'dz',\\&M=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}-Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\right)dx'dy'dz',\\&N=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}-X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\right)dx'dy'dz'。\end{aligned}\right\}\tag{1.15}$$

式中X'，Y'，Z'表示有限体（T）中任一点（x'，y'，z'）处的体力X，Y，Z值，r为此点到点（x，y，z）的距离，积分域为T。X，Y，Z可用式（1.12）求得。在T内，X，Y，Z取一定值，在T外任一点都为零。

现使T的各向线度都趋于零，设$\iiint X'dx'dy'dz'$为有限值。设X_0为作用于点（x'，y'，z'）处的x轴方向的体力，使

$$\rho\iiint X'dx'dy'dz'=X_0,\tag{1.16}$$

因此

$$\Phi=-\frac{1}{4\pi\rho}X_0\frac{\partial r^{-1}}{\partial x},\qquad L=0,$$

$$M=\frac{1}{4\pi\rho}X_0\frac{\partial r^{-1}}{\partial z},\qquad N=-\frac{1}{4\pi\rho}X_0\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}.$$

而 $\nabla^2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=2\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}$，因此得

$$\Phi = \frac{X_0}{8\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad F = 0,$$

$$G = -\frac{X_0}{8\pi\mu}\frac{\partial r}{\partial z}, \qquad H = \frac{X_0}{8\pi\mu}\frac{\partial r}{\partial y}。$$

相应地，位移为

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{(\lambda+\mu)X_0}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{X_0}{4\pi\mu r}, \\ v &= -\frac{(\lambda+\mu)X_0}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}, \\ w &= -\frac{(\lambda+\mu)X_0}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z}。 \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

一般情况下，力（X_0，Y_0，Z_0）作用于点（x'，y'，z'）时，则

$$(u,v,w) = \frac{\lambda+3\mu}{8\pi(\lambda+2\mu)\mu}\left(\frac{X_0}{r}, \frac{Y_0}{r}, \frac{Z_0}{r}\right) + \\ + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left(\frac{x-x'}{r}, \frac{y-y'}{r}, \frac{z-z'}{r}\right)\times \\ \times\frac{X_0(x-x')+Y_0(y-y')+Z_0(z-z')}{r^2}。 \tag{1.18}$$

用通常采用的符号来表示，作用在$Q(x_1,x_2,x_3)$点的m方向上的单位体力在$P(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$点处产生的k方向的位移分量可以写成

$$U_k^m(P,Q) = \frac{1}{8\pi\mu}(\delta_{km}r_{,nn} - \alpha r_{,mk})。 \tag{1.19}$$

式中，$\alpha = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$，$r$为$P(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$到$Q(x_1,x_2,x_3)$的距离，$r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}$，$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial\xi_n}$，$r_{,mk} = \frac{\partial^2 r}{\partial\xi_m\partial\xi_k}$。

在研究二维位错问题时，通常要用到平面应变问题中作用于一点某方向的力所产生的场。先研究在无体力作用时，平面问题的通解，然后根据复变函数的奇异点，找出上述作用力产生的场。

在没有体力作用时，（x_2，x_3）平面内应变问题的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\tau_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_3}=0,\\ \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{33}}{\partial x_3}=0。\end{aligned}\right\}\tag{1.20}$$

而

$$\left.\begin{aligned}\tau_{22}&=\lambda\varDelta+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\\ \tau_{23}&=\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\\ \tau_{33}&=\lambda\varDelta+2\mu\frac{\partial \mu_3}{\partial x_3}。\end{aligned}\right\}\tag{1.21}$$

式中

$$\varDelta=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3},\tag{1.22}$$

$\varDelta$为面膨胀量。再设

$$2w=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\tag{1.23}$$

w为旋转量。

由平衡方程（1.20）可知，应力分量可以用一双调和函数$A(x_2,x_3)$表示。此函数亦称为应力函数或Airy函数，即

$$\tau_{22}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2},\quad \tau_{23}=-\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3},\quad \tau_{33}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2},\tag{1.24}$$

A满足：

$$\nabla^4 A=0,$$

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2,\text{ 而 }\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}。$$

可以把（1.20）平衡方程改用膨胀量和旋转量表示：

$$
\left.\begin{aligned}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial x_2}-2\mu\frac{\partial w}{\partial x_3}=0,\\
(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial x_3}-2\mu\frac{\partial w}{\partial x_2}=0。
\end{aligned}\right\}\tag{1.25}
$$

可以证明$\varDelta$与w为平面上的调和函数，因而$(\lambda+2\mu)\varDelta+i2\mu w$可以表示为$x_2+ix_3$的函数。今引进$x_2+ix_3$的函数$\xi+i\eta$，

$$
\xi+i\eta=\int[(\lambda+2\mu)\varDelta+i2\mu w]d(x_2+ix_3),\tag{1.26}
$$

得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial x_2}=\frac{\partial\eta}{\partial x_3}=(\lambda+2\mu)\varDelta=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\nabla^2A,\\
-\frac{\partial\xi}{\partial x_3}=\frac{\partial\eta}{\partial x_2}=2\mu w
\end{aligned}\right\}\tag{1.27}
$$

由式（1.22），（1.23）及（1.25）解u_2，u_3得

$$
\left.\begin{aligned}
u_2=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_3\eta}{2(\lambda+2\mu)}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{x_3\xi}{2\mu}\right)+u_2',\\
u_3=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{x_3\eta}{2(\lambda+2\mu)}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_3\xi}{2\mu}\right)+u_3'。
\end{aligned}\right\}\tag{1.28}
$$

式中$u_3'+iu_2'$是x_2+ix_3的函数。可以设

$$
u_2'=\frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad u_3'=\frac{\partial f}{\partial x_3},
$$

f为一平面调和函数。因此又得

$$
\left.\begin{aligned}
u_2=\frac{\xi}{2\mu}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}x_3\frac{\partial\xi}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_2},\\
u_3=\frac{\eta}{2(\lambda+2\mu)}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}x_3\frac{\partial\eta}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_3}。
\end{aligned}\right\}\tag{1.29}
$$

由复变函数论可知，当

$$
(\lambda+2\mu)\varDelta+i2\mu w=B(x_2+ix_3)^{-1}\tag{1.30}
$$

时（式中B为常量），原点显然是一简单极点。由式（1.26）解得

$$\xi+i\eta=B\ln(x_2+ix_3)=B(\ln R+i\theta), \tag{1.31}$$

式中R，θ为（x_2，x_3）平面上的极坐标。因此

$$\left.\begin{aligned}u_2&=\frac{B}{2\mu}\ln R+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}B\frac{x_3^2}{R^2}+u_2',\\ u_3&=\frac{B}{2(\lambda+2\mu)}\theta-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}B\frac{x_2x_3}{R^2}+u_3'。\end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

为了使u_3为单值，必须使

$$u_3'=-\frac{B}{2(\lambda+2\mu)}\theta,$$

$$u_2'=\frac{B}{2(\lambda+2\mu)}\ln R。$$

所以有

$$\left.\begin{aligned}u_2&=\frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}B\ln R+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}B\frac{x_3^2}{R^2},\\ u_3&=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}B\frac{x_2x_3}{R^2}。\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

应力分量则为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{22}&=B\frac{x_2}{R^2}\left(\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{x_3^2}{R^2}\right),\\ \tau_{33}&=B\frac{x_2}{R^2}\left(-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{x_3^2}{R^2}\right),\\ \tau_{23}&=B\frac{x_3}{R^2}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{x_2^2}{R^2}\right)。\end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

利用式（1.6）可以求得以原点为中心的圆上的合力。在x_2轴上合力为

$$\int_0^{2\pi}\left(\tau_{22}\frac{x_2}{R}+\tau_{33}\frac{x_3}{R}\right)Rd\theta=2\pi B, \tag{1.35}$$

在x_3轴方向的合力为零。圆半径可取无穷小，最后得作用于原点x_2轴方向的力，大小为$F=2B\pi$。因此，当大小为F的力作用于原点x_2轴方向时，

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{F}{4\pi\mu}\left[-(2-\alpha)\ln R - \alpha\frac{x_3^2}{R^2}\right],\\ u_3 &= \frac{F}{4\pi\mu}\alpha\frac{x_2x_3}{R^2}; \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{22} &= \frac{F}{2\pi}\left[-(1+\alpha)\frac{x_2}{R^2}+2\alpha\frac{x_2x_3^2}{R^4}\right],\\ \tau_{33} &= \frac{F}{2\pi}\left[(1-\alpha)\frac{x_3}{R^2}-2\alpha\frac{x_2x_3^2}{R^4}\right],\\ \tau_{23} &= \frac{F}{2\pi}\left[-(1-\alpha)\frac{x_3}{R^2}-2\alpha\frac{x_2^2x_3}{R^4}\right]。 \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

式中的 α 与式（1.19）中的相同，R 为点（x_2，x_3）到原点的距离。通过坐标平移和旋转，就可得到作用于平面上任一点处任一方向的力所产生的场。如果用（$x_2-\xi_2$）代替 x_2，用（$x_3-\xi_3$）代替 x_3，可得到作用于点（ξ_2，ξ_3）处 x_2 方向的力 F 所产生的场；用（$x_2-\xi_2$）代替 x_3，用（$x_3-\xi_3$）代替 x_2，可得到作用于（ξ_2，ξ_3）处 x_3 方向的力 F 所产生的场。

四、互易关系

作用于体内一点处的力所产生的场，在该点的邻域中，场的解趋于无限，数学上称这种点为奇异点。把作用于一点处 x_m 方向，大小为 F 的力看作是一定条件下的极限情况，即

$$\lim_{V\to 0}\iiint \rho f_k dx_1dx_2dx_3 = \begin{cases} F & k=m\text{时},\\ 0 & k\neq m\text{时}, \end{cases} \tag{1.38}$$

f_k 在体 V 内不为零，在 V 外为零，V 的各向线度均趋于零。现在证明这种力产生的场的互易关系。

引进记号 $G_m^k(P,Q)$，作用在 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 点处 x_m 方向上大小为 F 的力所产生的在 $P(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 点处 k 方向的位移分量可表示为 $F\times G_m^k(P,Q)$。

对弹性体内两组体力和各自相应的位移可应用互易定理：一组是作用在 Q 点的 x_m 轴方向的力和 P 点处相应的位移，另一组是作用在 P 点 x_k 轴方向同样大小的力和 Q 点处相应的位移，容易证明：

$$G_m^k(P,Q)=G_k^m(Q,P)。\tag{1.39}$$

对式（1.19），利用$r_{,m}'=-r_{,m}$（即$\partial r/\partial x_m=-\partial r/\partial\xi_m$），可直接证明：

$$U_k^m(P,Q)=U_m^k(Q,P)。\tag{1.40}$$

从位移场可求得P处应力场的（kl）分量，用$G_m^{kl}(P,Q)$表示，即

$$G_m^{kl}(P,Q)=G_m^{lk}(P,Q)=C_{klrs}(P)\frac{\partial}{\partial\xi_s}G_m^r(P,Q)。\tag{1.41}$$

在各向同性介质中

$$G_m^{kl}(P,Q)=\lambda(P)\delta_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi_h}G_m^h(P,Q)+$$
$$+\mu(P)\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_k}G_m^l(P,Q)+\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_m^k(P,Q)\right\}。\tag{1.42}$$

设

$$G_{kl}^m(Q,P)=G_{lk}^m(Q,P)$$
$$=C_{klrs}(P)\frac{\partial}{\partial\xi_s}G_r^m(Q,P),\tag{1.43}$$

在各向同性介质中

$$G_{kl}^m(Q,P)=\lambda(P)\delta_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi_h}G_h^m(Q,P)+$$
$$+\mu(P)\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_k}G_l^m(Q,P)+\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_k^m(Q,P)\right\}。\tag{1.44}$$

现在仔细分析式中导数的涵意。以$F\times\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_2^1(Q,P)$为例，显然：

$$F\times\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_2^1(Q,P)=$$
$$\lim_{\Delta\xi_3\to 0}F/\Delta\xi_3\{G_2^1[Q,P(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\Delta\xi_3)]-$$
$$-G_2^1[Q,P(\xi_1,\xi_2,\xi_3)]\}。\tag{1.45}$$

可把此式看成是作用在$P(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\varDelta\xi_3)$点处$x_2$方向大小为$F/\varDelta\xi_3$的力所产生的$Q$点处$x_1$方向的位移分量与作用在$P(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$点处大小相同但方向相反的力所产生的$Q$点处$x_1$方向位移分量之和的极限值。通常把作用于邻近两点上大小相同方向相反的力称为双力或应变核，或者叫做力系。因此可以把此导数看成是P点处x_2轴上的一组双力产生的Q点处x_1方向的位移，只不过量网有所不同。因此，在式(1.43)中，可以把$G^m_{kl}(Q,P)$看作是由（kl）双力或应变核的组合所产生的Q点处x_m方向的位移分量，同样仅有量网上的差别。在各向同性介质中的力系（kl）如图1.1所示。当$k=l$时，其几何意义是无矩双力与膨胀中心的组合，即 Steketee 所谓的A核；当$k\neq l$时，是共平面的互相垂直的有矩双力的组合，即Steketee所谓的B核。图1.1中圆球表示膨胀中心，也就是三个相等而又互相垂直的无矩双力的组合。

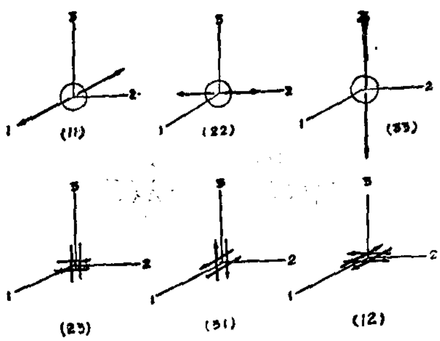


图1.1 （kl）为P处的双力组合，它产生Q点处的位移场。（11），（22）和（33）为A核；（23），（31）和（12）为B核

由式（1.39），（1.41）及（1.43）可得

$$G^{kl}_m(P,Q)=G^m_{kl}(Q,P)。\tag{1.46}$$

相应地P点处（kl）力系所产生的在Q点处应力的（mn）分量，可表示为

$$G^{mn}_{kl}(Q,P)=G^{mn}_{lk}(Q,P)=G^{nm}_{kl}(Q,P)=G^{nm}_{lk}(Q,P)$$

$$=C_{mnrs}(Q)\frac{\partial}{\partial x_s}G^r_{kl}(Q,P)。\tag{1.47}$$

在各向同性介质中，