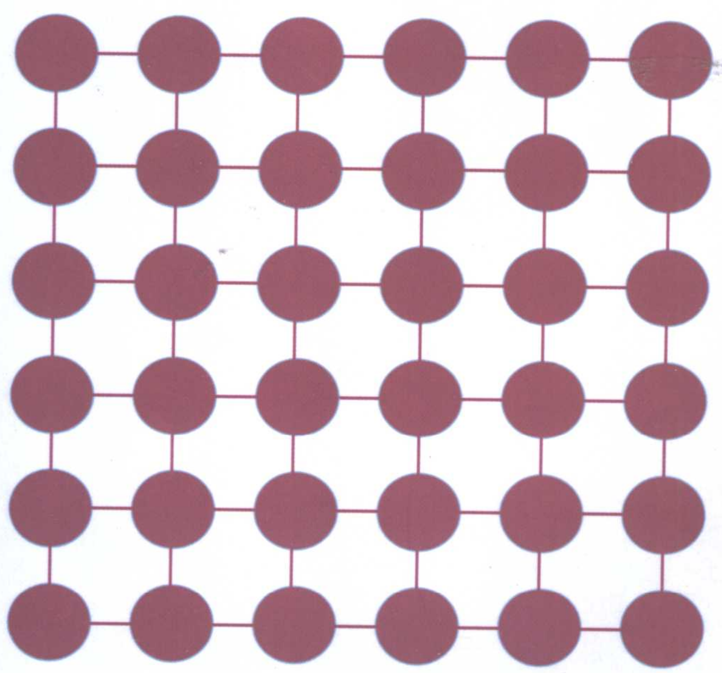
覃 正 著

多体系统动力学压缩建模



科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书介绍多体系统动力学压缩建模的创新理论和方法，提供了多体系统动力学刚性模型柔性子阵压缩的基本思想和对压缩建模方法进行理论分析的基础。本书主要内容包括：系统动力学的能量观、基于离散正交算子的系统方程、柔性压缩的冗余度分析、柔性压缩的主要对象与系统信息、引入离散正交波基的系统方程、柔性多体系统动力学方程数值积分方法、柔性多体系统动力学压缩建模及数值方法的并行计算方法研究等。

本书可供高等院校有关专业的研究生、教师及广大工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

多体系统动力学压缩建模/覃正著. -北京：科学出版社，2000. 8
ISBN 7-03-008514-0

Ⅰ. 多… Ⅱ. 覃… Ⅲ. 系统动力学-系统建模 Ⅳ. M945. 12

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第08578号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2000年9月第一次印刷 印张：11 1/4
印数：1—1 500 字数：255 000

定价：23.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换<新欣>)

前　言

速度快、重量轻、精度高的要求和柔度大的特点，使得现代机械系统中部件和铰点的弹性效应愈来愈不容忽视。以空间柔性机构动力学分析为依据的柔性多体系统动力学是一门新兴的前沿学科。现代科技的高速发展，尤其是现代航空航天技术及现代机器人等技术的迅猛发展，一方面客观上考虑挠性部件的更广义的多体动力学问题已成为人们迫切需要解决的问题；另一方面计算机成为这一领域强有力的工具以后，解决这一领域问题的理论和方法的研究有了现实可能性，所以近年来各国学者在这一领域竞相研究开发，柔性多体系统的研究成为当前国内外多体等系统研究中最主要的研究方向。

由于多体系统的研究在世界各国科技、国防及国民经济中占有重要地位，它的研究细节，国外发达国家对中国是封锁的，如何缩小同国外同类研究的差距，赶上或超过发达国家的研究水平，直接取决于能否不断开拓出多体系统动力学研究中的新思想和新方法。

本书首次将现代通信领域中信道编码前的压缩思想借鉴到多体建模中来，利用离散正交算子在正交域集中信息能量的特性，在动力学建模时对形成主模态矩阵有关的子矩阵 m_{ff}、K_{ff}的进行了能量分布的压缩处理，建立了能量分布相对集中的柔性体动力学模型，根据本书建立的力学模型，截断主模态中可保留较之其他力学模型更多的柔性弹性体变形对方程的贡献，离散正交算子的引入，一方面使 i 柔体动力学方程缩减求解尺寸时产生的误差 Δqf（$n_r\times 1$）成为一个较小值，另一方面由于子矩阵 m_{ff}、K_{ff}的压缩，模态集建立时避免了求解高阶广义特征值问题。离散正交算子的快速算法，使算子的引入具备了良好的实时性计算特性。

本书还将离散正交小波引入系统动力学方程，讨论了按小波标架展开的 i 柔体子阵回复问题。运用离散 Haar 正交小波算子进行了实例分析和比较，针对不同子阵压缩比的协调问题首次建立了模极大值距离协调准则。

为了把理论分析与实验分析相结合，最大限度地为解决工程实际问题创造条件，本书选择 20 世纪 90 代最新出现的 SAR 平面阵天线的自载结构进行数值仿真计算，讨论了分步式展开方式和同步式展开方式的展开机理和过程。对天线外子阵、中子阵和内子阵构成的开环链状系统进行了柔性多体系统动力学分析。最后，还分析了面板关节材料粘弹性阻尼对柔性板弹性变形的影响。

全书共分 6 章。第 1 章，对研究的科学依据和意义进行了简要说明，对柔性多体系统动力学研究的发展和在相关领域里的应用进行了回顾，讨论了大型空间结构与控制的工程应用，对柔性多体系统动力学及刚性（病态）方程组数值方法的研究以及目前柔性多体系统动力学研究中存在的问题给予了较全面的综述。第 2 章，首次将广义离散正交算子与柔性多体系统动力学建模理论相结合，选用 Shabana，Yoo，Haug 等人描述物体大范围转动的方法，运用拉氏第一类方程，详细推导了能量相对集中的柔性多体系统动力学方程。讨论了正交算子快速算法的提取通用项技术，矩阵分块技术和矩阵因子分解技

术。主要研究了柔性体广义质量阵与广义力列阵的计算方法，将其中系统矩阵分离成为时变与常值矩阵的运算，使常值矩阵在前处理中一次计算完成。此外还分析了柔体一致质量阵和刚度阵中各子阵与模态集的关系。第3章，讨论i柔体动力学方程引入离散正交算子后，模态集A^i中主模态矩阵ψ发生的变化。分析了i柔体动力学方程缩减求解尺寸时产生的误差与主模态矩阵的关系，指出惯性耦合或弹性耦合并非柔性系统本身所固有的属性，探讨并结合工程实际给出了柔性体浮动坐标系的建立原则。最后以离散Hadamard正交算子为例进行了实例分析。第4章，首次将离散正交小波引入系统动力学方程，讨论了按小波标架展开的i柔体子阵回复问题。由于从小波标架系数$<\Phi_T, f(x)>$回复出函数$f(x)$的过程在数值计算上十分稳定，系数的误差对函数$f(x)$的回复影响较小，本章运用离散Haar正交小波算子进行了实例分析和比较，首次建立了模极大值距离协调准则。第5章，研究了求解柔性多体系统动力学方程的微分—代数型混合方程组的处理方法，然后对传统数值积分方法求解刚性方程组不再适用的原因进行了分析。针对工程中实时性要求较高，刚性比r较小（r的量级在10以下）的柔性多体系统建立了一个新的高精度单步显式法、针对精度要求较高、刚性比r较大（r的量级在10以上）的柔性多体系统数建立了一个新的无条件稳定单步隐式法；最后，通过分析复杂大系统刚性性质的本质特征，进一步建立了一个新的不降阶数值求解动力学模型的数值方法——组合算法。第6章，首先对星载合成孔径雷达平面阵天线的桁架结构和自载结构从电性能设计的二种不同设计原则上进行了比较分析。然后选择20世纪90年代最新出现的SAR平面阵天线的自载结构进行数值仿真计算，讨论了分步式展开方式和同步式展开方式的展开机理和过程。对天线外子阵、中子阵和内子阵构成的开环链状系统进行了柔性多体系统动力学分析。最后，本章还分析了面板关节材料粘弹性阻尼对柔性板弹性变形的影响。

本书是我国多体系统动力学领域讨论压缩建模的第一部著作。

本书研究工作在西安电子科技大学博士生导师叶尚辉教授的悉心指导下完成。曾余根教授、刘明治教授、贾建援教授给予作者许多帮助和指导。本书工作还得到了上海交通大学工程力学系刘延柱教授、洪嘉振教授，吉林工业大学工程力学系陆佑方教授、冯冠民老师，陕西机械学院机械系刘宏昭教授，西安电子科技大学通信与电子系戴善荣教授、李兵兵老师等的帮助和指导。

科学出版社对本书的出版大力支持。中国博士后基金、国家自然科学基金给本书研究的课题提供了有力资助。在此，作者一并表示衷心感谢。

限于作者的水平，书中错误和疏漏之处，敬请读者批评指正。

作　者

2000年3月于西安交通大学

目　录

第1章 引　论

1.1 多体系统动力学发展概况

继1977年由IUTAM（国际理论与应用力学联合会）主持举行的第一次“国际多体系统动力学讨论会”（慕尼黑，中国无代表参加）之后，1985年9月在意大利的Udine又一次举行了由IUTAM和IFTOMM（国际机器与机构理论联合会）主持的“国际多体系统动力学讨论会”，参加这次会议的共有21个国家的50多名代表，中国有一名代表参加，会上共宣读论文26篇。近十余年来，我国力学工作者对国外学者的大量研究成果给予了极大的关注。1986年北京召开全国多刚体动力学研讨会后，1988年全国柔性多体系统动力学研讨会在长春召开，会上邀请了6位学者作专题报告，1992年11月中国力学学会一般力学专业委员会又发起召开了全国多体动力学——理论、计算方法与应用学术会议。

机械系统中部件和铰点的弹性效应首先在航天器和高速机构领域里引起了人们的广泛关注。实际上考虑了构件弹性影响的研究最早可追溯到20世纪30年代[1]，但是直到60年代有了电子计算机它的发展才真正成为现实。

在航空航天领域中，现代航天器朝着大规模的方向发展，其结构越来越复杂。星载的实验仪器、设备与动力装置对能源的需求越来越多，往往需要安装多块质量轻、柔度相对较大的太阳能电池阵。为了探测星际间的微弱信号，需要安装大型天线，如RAE上的四根天线长228.8m。空间站机器人操作手及目前大型模块化结构的空间站都含有大量的梁、板、壳部件，当系统升空展开时，或卫星进行轨道机动时，这些部件往往产生大的弹性变形、振动，直接影响系统的姿态稳定与控制精度。

Boland等，Kane等，Roberson，Wittenburg，Likins等，Ho等，Hughes等，Meirovitch等[2~9]都为柔性多体航天器动力学的建模作出过杰出贡献。

美国Lehigh大学校长P. Likins[10]早在70年代中期，就对柔性系统作了大量研究。Likins首次提出了用离散坐标描述物体的大位移运动，用模态坐标或有限元节点坐标描述物体的弹性变形，为了满足宇宙飞船、机器人、运输车辆和机械制造设备的高效设计和分析的需要，Likins及其合作者长期从事柔性多体控制系统动力学方程及程序的研究。他们所建立的数学模型和程序功能多种多样，力学系统可以是柔性树结构，闭环树和可变拓扑等系统。内体约束可以包括定常或非定常、完整或非完整约束。在控制系统中，他们提供了8种可供选择的传感器和5种可供选择的执行机构，系统方程可进行数值线性化处理，还备有数值积分子程序〔四阶龙格-库塔法和Sandia软件包（Adam Pease法）〕。

Ho，Hooker[2,11]对内联多刚体末端为柔性体的树状多体航天器动力学进行了研究，Ho用拉氏方法与Newton/Euler方法建立了各个物体的动力学方程，并用他们提出的直接通路法（Direct Path Method）将各物体的运动学量转换到一个指定的主体上，消去物体间的约束力后得到系统的动力学方程。1985年，Ho又建立了每个物体均匀变形体的树

状柔性多体航天器动力学与控制方程，并通过摄动方法（Perturbation Method）对所建立的方程进行线性化，在此基础上研制了 ALLFLEX 通用软件，其特点是能够充分利用结构动力学分析程序（如 SPAR）产生的模态信息。Hooker 也应用直接通路法描述系统的拓扑结构，并采用嵌套体方法自动消去约束反力。

Boland 等[12]把多刚体系统动力学 Roberson/Wittenburg 方法作了直接发展，用 d'Alembert 原理建立任意物体均为变形体的树状及含闭环的柔性多体系统动力学方程，并且推导出了供稳定性分析的线性化方程。

Meirovitch[13~15]对转动柔性体特征值进行了较深入的分析并将由他发展的准坐标形式的拉氏方程推广到柔性体系统。

Kane 等[16~17]对复杂航天器建模的各种动力学原理进行了理论上的比较，并对运动基座上固结悬臂梁的模型进行了动力学分析，指出了几何非线性变形对柔性体动力学响应的影响以及目前的多体程序因为对变形体采用线性假设离散，在许多工况中会得到完全错误的结果。

Hang[18]用有限元法得到挠性体的质量分布、刚度分布特征量及弹性变形模态，其弹性变形用结构力学中的静力修正模态和振动模态来描述，刚体转动用方向余弦或欧拉参数来描述，整个方程用虚功原理来推导，在受约束的多体系统中，挠性体和刚体的耦合运动方程编入到 DADS（动力学分析和设计系统）动力学程序之中，以便进行数值积分，解的是一组微分—代数混合型运动方程组。Hang 是机械领域中著名的学者，美国《结构振动》杂志主编，依阿华大学 CAD 中心主任，他的卓有成效的工作倍受同行关注。

Lilov[19]利用虚功原理推导柔性系统动力学方程时，用大位移广义坐标及节点处相对运动伪速度来描述刚体运动，用形状参数描述弹性体小变形，他把刚体系统和柔体系统统一在一组方程中，既可处理刚体系统，又可处理柔性系统。

Modi[20]将 74 年以前关于带柔性附件的航天器姿态动力学与控制的研究成果进行了比较全面的总结。

1991 年 Huston[21]将近年来多体动力学模拟和分析方面的最新进展进行了评述，对于柔性多体系统他指出，某些分析工作者提倡集总参量模型（Iumped Parameter Models），在这些模型中，系统是通过由弹簧和阻尼器连接起来的各刚体来模拟的，这些弹簧和阻尼器模拟了柔性效应，其他一些人则利用弹性力学原理、模态分析和有限元分析，将柔性效应直接并入多体系统之中。这些方法的相对优点和缺点，特别是它们的精确度、效率和使用的难易，仍在不断争论之中。

在高速机构中，连杆柔性对机构动力学响应的影响自 60 年代初受到重视。按照运动学综合方法设计的高速印刷机抓取机构，在实际运转速度超过设计速度一半时，抓取动作便失灵了。构件的弹性变形对高速机械手动作的精度和稳定性产生了很大影响，随着许多机构主动件速度的提高，激振力（一般惯性力是激振力的主要组成部分）的频率提高了。而构件柔度加大时，系统的固有频率下降了，激振力频率与固有频率的接近增大了振动的振幅和发生谐振的危险。实际上在弹性连杆机构中存在着一种“低阶谐振现象”，即机构在低于其第一阶固有频率（基频）的一系列转速下都可能发生谐振现象。

20 世纪 70 年代初发展起来的运动弹性动力学（Kineto-Elastodynamics）方法，即简称 KED 方法，对解决中、低速机械的柔性动力学问题起了重要作用。早期普遍采用这样

的假定：弹性变形对系统大位移运动不产生影响，而用刚体系统模型得到的惯性力与外力来计算物体的弹性变形。在此基础上，Winfrey[22,23]等人于1971年首先把结构分析的有限元方法引入机构领域，使考虑弹性效应的连杆机构动力学研究取得了很大进展。目前的分析方法分为基本方法和精确方法[24,25,31]。在基本方法中，忽略了刚体运动和弹性变形运动的耦合项，把机构一系列离散位置看作一系列瞬时结构，在由单元或子结构运动方程装配系统运动方程时，坐标变换矩阵被看作是常数阵，使动力学方程简化；在精确方法中，主要计入了刚体运动与弹性变形运动的耦合项，舍弃了瞬时结构的假定，坐标变换矩阵被看作时间的函数，得到的动力学方程比较复杂，关于基本方法和精确方法的研究，国外文献[25]中第5章，国内文献[24]中第3章已作了很好的总结。

按精确方法建立动力学方程时，在弹性小位移前提下，仍然假定弹性变形不影响机构的名义运动（把机构看作刚体系统进行分析得到的运动）建立的动力学方程如下：

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q\} \tag{1.1-1}$$

$\{U\}$、$\{\dot{U}\}$ 和 $\{\ddot{U}\}$ 分别为总体坐标系中系统弹性广义位移、速度和加速度列阵，动力矩阵 $[M]$、$[C]$ 和 $[K]$ 及右端列阵 $\{Q\}$ 中包含有机构刚体运动参数，这些参数都是机构位置和时间的函数。当机构的名义运动和外力给定后，动力矩阵 $[M]$、$[C]$ 和 $[K]$ 及右端列阵 $\{Q\}$ 均为已知量，因而方程（1.2-1）是关于广义坐标 $\{U\}$ 的二阶变系数线性常微分方程组，是一种线性化模型。Turcic 等[27~29]提供了用拉氏方法建立（1.2-1）的详细推导过程，并试图通过实验验证这种假设的合理性，但实验对象为曲柄是惯性很大飞轮的四连杆机构，刚性飞轮足以保持系统的刚性运动不受弹性变形的影响。但对质轻、高速运行的系统，将以上方法用于高精度分析的局限性日益暴露出来。考虑刚–弹耦合的精确模型不断涌现。采用系统的弹性运动不影响刚性名义运动的假设，得到的线性化方程（1.2-1），从理论上讲不是弹性连杆机构完整的多柔体动力学方程。

Thompson 等[30]，Lowen et al[25]将1986年以前关于连杆柔性对高速机构动力学响应的影响作了较全面的评述。特别值得提出的是 Boland，Samin[32~34]等人完成了由刚性系统动力学到柔性系统动力学的转化和拓展，Shabana，Yoo 和 Haug[35]等人建立了柔性系统的动态子结构法。最新出版的著作有 Pfeiffer，F.，Pohl 的“Roboter Dynamik（德文版1992）”以及 Farid. M. L. Amirouche 的“Computational Methods In Multibody Dynamics（1992）”。

由于20世纪80年代以后，航天器与高速机构领域的学者开展了广泛的交流，促进了柔性多体系统动力学理论的发展与完善。文献［21］中著名学者 Huston 认为近十年来 Bainum 和 Kumar（1982），Diarra 和 Bainum（1987），Dubowsky 和 Sunada（1982），Hale 和 Meirovitch（1982），Ho 和 Herber（1985），Hughes（1979），Huston（1980，1981），Ibrahim 和 Modi（1986），Kane，Ryan 和 Banerjec（1987），Levinson（1982），Likins（1975），Lips 和 Modi（1980），Rajaram 和 Junkins（1983），Rosen，Loewy 和 Mathew（1987），Shabana（1985），Wu，Hang 和 Kim（1989），以及 Yoo 和 Haug（1986）的文章代表了这方面的研究。

归纳起来，柔性多体系统动力学方程的建立主要有三类方法：(1) 牛顿-欧拉方法，在推导动力学方程时直接应用动量定理和动量矩定理列出隔离的单个物体的动力学方程，

方程中包含有理想约束力（矩），然后以约束条件（完整约束）为依据消去约束力（矩）。这种方法对于半柔性系统比较合适，特别是当系统中有一个刚性主体的情况，但这种方法只在简单链系统的情况下是可取的，比较典型的是Hooker[36]和Singhs[37]的推导。(2)虚位移方法。从虚位移或虚速度原理出发，演变出拉格朗日第一类方程或进一步根据变分原理建立拉格朗日第二类方程的形式。这种方法是现在普遍应用的同时也是经过实践证明比较有效的方法。(3)牛顿-欧拉方法和虚位移方法的各种变形方法。这些变形方法中大部分是虚位移方法的变形方法，如比较有影响的Kane方法等。不仅国外而且国内的许多学者都在这方面做了工作。目前比较引起人们兴趣的是针对某些具体问题提出的变形方法。

建模方法和数值仿真研究是柔性多体系统动力学分析的核心内容，要迅速而正确地建立系统运动方程，尤其是建立便于计算机进行数值求解的通用性较强的运动方程是极其艰巨而困难的。上述学者的研究实际上早已受到计算效率问题的困扰，一般在对控制微分方程的积分过程中，必须提出方程的系数和动力学系统的参量并且在每一次积分步骤中计算若干次。同时柔性多体系统动力学的大多数数学模型求解规模比较庞大，推导相当繁杂。为了克服这些不足采用符号演算产生动力学方程的表述方法也受到了人们的一定关注。美国机械工程师协会（ASME）的冬季学术年会几次将符号演算列为主题。其中包括1990年度的“符号演算及其对力学的冲击”(Symbolic Computation and Its Impact on Mechanics)。

1976年，Kane的学生Levinson[38]首次进行了将符号演算应用于多刚体系统动力学方程推导的尝试，他编写了以Kane方程为基础的FORMAC程序，推导了一个二体卫星的动力学方程。1978年，Schiehlen和Kreuzer也进行了这方面的工作。与Levinson不同的是Schiehlen和Kreuzer认为建立一个面向多体系统动力学方程推导的专用符号运算系统将会更合适，因为在多体系统动力学方程的推导过程中所必须进行的运算只有5种：(1)矢量以及矩阵的和差运算；(2)矢量以及矩阵的乘积运算；(3)矢量以及矩阵的求导运算；(4)三角关系式的化简；(5)动力学方程的线性化。为了使他们的专用系统尽可能地带有通用性，他们选择了FORTRAN来建立专用符号演算系统，并推导了一个具有弹性支撑的平面四杆机构的动力学方程。近年来，他们在原有基础上进一步发展了该系统，并定名为NEWEUL系统，这实际上是一个以NEWTON-EULER方程为算法基础的专用程序包。

1984年，Macala将符号演算与数值运算联在一起，首先进行符号演算，推导出所需要的方程，然后进行数值运算，最后求出数值解。在符号运算阶段，他使用的是通用符号演算语言MACSYMA，与Levinson不同的是，Macala并不限于用MACSYMA来推导某一具体系统的方程，而是用MACSYMA语言建立了一个名为SYMBOD的推导多刚体系统动力学方程的专用程序，使用者在推导方程时只需输入树形多刚体系统的质量参数和几何结构参数等有关的数据，SYMBOD就能推导出相应的动力学方程来。Macala用SYMBOD推导出简化成四体系统的伽利略卫星的运动方程，随后进行了数值计算，在他所作的符号运算加上数值计算与单纯数值计算的对比运算中，前者比后者快三倍以上。

近年来，德国的Wittenburg和Wolz[39]用Pascal语言编制了应用于机械、车辆、航天器等多体系统的符号公式推导程序MESA VERDE。美国的Kane和Nielan[40]编制了用符

号处理软件 MACSYMA 和 Kane 方法相结合来自动生成高效的多体系统符号公式的计算机符号处理软件。效率、快速及精确性是他们强调的重点。Rosenthal，Dan 和 Sherman（1986），Neilan 和 Kane（1986），Faessler（1986），Schielen（1990）等也在这方面进行了研究，1988 年 Schaechter 和 Levinson 对近期大多数符号演算方面的工作作了记录和讨论。1990 年加拿大哥伦比亚大学工程力学系教授 Modi[41]采用拉格朗日方法建立大型柔性航天器多体动力学模型时，多体动力学运动微分方程的推导也采用了计算机符号演算法，其物理模型是把大型空间站“自由号”主梁骨架作为中心体，其他构件作为柔性附件，且相对中心体有平动和转动，而中心体也视为柔性体，模态数据可以是部件模态或系统模态。经过模态综合赋予柔性多体动力学模型，系统软件由结构动力学模块、柔性多体动力学模块和系统控制模块三部分组成，适用于任意树状柔性多体系统动力学分析仿真。

计算机符号建模的核心内容，就是建立形成力学模型各系数矩阵的功能块，得到各矩阵的符号表达式并尽可能地简化，以至可与人脑所能推演的最简结果相媲美，与数值计算程序相结合，或是求控制力矩，或是数值仿真或是解运动学两类问题，最后通过图形处理软件，得到所要求的曲线。但目前符号演算在柔性多体系统动力学中的应用仍停留在推导方程的水平上，计算机符号建模国外已经开发了一些大型符号计算的专用程序，例如 MACSYMA，REDUCE，SMP 等，有的我国已经引进。利用这些语言的功能函数，可以方便地对方程进行符号推导，但这些专用程序所占内存较大，一般不能在微机上使用，已有国内的学者考虑到我国微机相当普遍的国情，在微机上移植和开发这类软件方面做了工作[41]，使用通用的符号演算系统来处理单一的问题将会因内存占用量大，运算时间长而丧失优越性，研究还有大量理论工作需进一步探讨。

对于一个真实的机构，仅仅研究构件具有的弹性效应还不够，还要研究运动副中存在的间隙等因素的交互影响。这是一项更接近于工程应用，考虑因素更复杂的课题。由于制造误差和磨损，机构运动副中不可避免地存在着间隙，它将引起机构的动作失真稳定性减弱并导致振动等。当运动副在运动过程中发生失去接触现象，再接触时机构的速度，尤其是加速度和运动副反力的幅值可达到不考虑运动副间隙时的几倍至十几倍。

最早最典型的模型是 1971 年 Dubowsky[42,43]建立的冲击副（IPM）一维模型，Dubowsky 利用他建立的模型对曲柄滑块机构进行了计算。考虑接触，自由两种状态，运动副表面弹性用线性弹簧模拟，其刚度由赫兹表面接触理论求出。

1975 年 Dubowsky[44]将 IPM 模型应用在作一般平面运动的梁单元上，提出了冲击梁模型（IBM），运用摄动法对一含运动副间隙和弹性构件的四杆机构进行了分析，数值模拟结果表明，径向力的零后运动副中将发生碰撞，构件的弹性并不影响运动副间隙中的失去接触现象的发生，但碰撞力的幅值会显著地减小，其分析过程颇为复杂。

Townsend 和 Mansour[45~47]稍后建立了一种交变振动模型。该模型假设很小的碰撞连续发生，在模拟过程中不考虑接触状态。但这一模型当运动副中存在着摩擦和非理想弹性时，便难以准确地进行失去接触现象的判断和预测。

1976 年 Miedema 和 Mansour[48]根据动量守恒定理和恢复系数公式来描述碰撞，建立了含接触状态、自由状态和碰撞状态的运动方程，他们将机构的动态响应理解为在零间隙的运动上叠加了圆周振动。若主动件为曲柄旋转一周，在运动副中交替地存在着两个

接触状态区域和两个自由—碰撞状态区域，接触状态的两个区域的存在形式很大程度上依赖于恢复系数、曲柄转速和间隙量。

1978 年 Funabashi，Ogawa 和 Horie[49]用平面一般运动的动力学方程建立了多间隙系统模型。模型考虑了接触与自由两种状态，给出了只具有一个间隙的曲柄滑块机构模拟实例，并用实验进行了证明。Funabashi 等认为，曲柄转速对运动副中的运动状态起很大作用。当运动副发生碰撞时，在输入轴上将产生很大的脉冲力矩，它随着间隙和曲柄转速的增加而增大，即使在很低的转速下，运动副元素也可能发生分离，运动副弹性对机构的特性有一定的影响。

Bahgat，Osman 和 Sankar[50]按同一机构各运动副中不同情况的接触状态建立了数学模型，并给出了一个曲柄摇杆机构多间隙影响时的计算机模拟实例。这种方法仅假设了接触状态，已比较接近于连续接触模型，他们得出的结论是，考虑间隙影响后，角位移和角速度变化很小，但加速度、运动副反力与零间隙情况相比有显著增大，其增大的程度决定于机构尺寸、驱动转速和间隙尺寸。运动副中的状态可分为三种区域：自由运动区域、碰撞区域和接触区域。

80 年代末，Furuhashi 和 Morita 等[51~54]首先建立了连续接触模型，并用拉格朗日方程推导出了系统的动力学方程。得出存在于不同运动副中的间隙对系统的运动学和动力学特性有不同的影响。作者用实验结果对给出的两个曲柄摇杆机构的模拟计算进行了验证。

Bengisu，Hidayetogiu 和 Akay[55]采用连续接触模型，用平面一般运动的动力学方程导出了系统的运动方程。经过分析得出，当运动副反力方向发生突变时反力达到最小值，这时运动副就发生失去接触现象，每个运动副一周内发生两次分离现象，一次分离对曲柄转速很敏感，在高速时，将没有很严重的碰撞而迅速回到连续接触状态，而另一次分离对曲柄转速的敏感程度则妥善的多。

归纳起来，运动副间隙的力学描述主要有二大类模型：阶段运动模型和连续接触模型。

阶段运动模型假设在机构运动的整个过程中有三种状态：1）接触状态：运动副元素相接触而相对运动，此状态进行到失去接触时为止；2）自由状态：运动副元素不相接触的分离运动，此状态进行到发生碰撞为止；3）碰撞状态：运动副元素在短时间内发生相互作用。连续接触模型假设，在机构运动的整个过程中，运动副元素始终保持接触状态，视间隙为无质量的刚性杆。

阶段运动模型对间隙问题的描述比较完整、形象直观并接近于真实情况。但缺点是，由于分段建立模型，理论公式推导繁复、模拟需要反复多次的判断迭代过程，所以计算时间长，不利于向含多间隙的系统推广；基于阶段运动模型的诸缺点和局限性，近年来提出的连续接触模型与阶段运动模型相比，具有模型建立理论较为简单、方程推导方便、计算机仿真占用机时少等优点。尤其重要的是容易进行含多个运动副间隙，以及同时计及运动副间隙和构件弹性等多因素影响的动力分析。缺点是：只适用于含回转副间隙问题的研究，在其他形式的运动副中难以采用，不易于考虑运动副表面的弹性、阻尼、润滑等的影响。

柔性多体系统动力学涉及的内容十分广泛，与其他研究综合考虑（如同上述运动副

间隙的研究综合考虑）难度很大。至今这方面的文献颇不多见。综上所述，柔性多体系统的研究，近期主要在如下四个方面：(1) 柔性多体系统动力学方程的有效建立与简化，编制相应的软件系统以便输入少量描述系统特征的数据由计算机自动建立系统运动学与动力学方程。(2) 建立稳定的、有效的数值计算方法，分析弹性变形对静态偏差、稳定性、动态响应的影响。通过仿真由计算机自动产生系统的动力学响应。(3) 选择合理的结构、参数或控制规律。在某种程度上消除弹性变形带来的不利影响或者利用弹性变形的影响，使其产生积极的效果。(4) 将仿真结果通过计算机终端以方便直观的形式表达出来。

建立柔性多体系统动力学方程主要有如下三个关键性问题：(1) 动坐标系的选择。在刚体情况下我们选择刚体的连体系为动坐标系。当物体被考虑成弹性体时，则没有一个固定不变形的物体存在，柔体内各点的相互位置均在改变。显然质心的相对位置不能像刚体中那样为消除加速度级耦合加以利用。为把复杂的柔性体运动进行分解，我们只能选取一个浮动的坐标系，选择的原则是一方面使最终的动力学方程尽量消除耦合项，另一方面使物体的变形尽可能处理为线性变形。(2) 弹性变形模态的选择，尽管适当选择浮动坐标系以后柔性多体系统动力学方程的形式有所简化，但弹性变形模态坐标的引入还是大大增加了方程的自由度数，从满足工程实际应用来看，还必须选择好弹性变形描述中模态的适当阶次。选择的原则是用尽可能少的 N 项模态表达式来尽可能真实地反映实际运动。(3) 约束问题。实际上就是怎样处理好约束条件的问题，完整、非完整约束，各种不同类型铰接约束性态的多样化，尤其是弹—弹耦合约束等，这是一个考虑因素较多也很重要的问题，目前还未见到有比较成熟的处理方法。

建立柔性多体系统动力学方程时，由于考虑系统中慢变的大位移同相对快变的弹性变形之间的相互耦合，使柔性多体系统动力学方程表现出微分方程组中解的分量变化快的分量很快地趋于它的稳定值，而变化慢的分量缓慢地趋于它的稳定值，这种性质给这类力学模型的数值求解带来了 Stiff 性质。由于柔性多体系统动力学建立起来的数学模型中各种变量变化范围相差很大，Stiff 问题突出，为此许多力学工作者都曾在数值计算上做了大量的研究工作。同时 Stiff 方程的数值求解也引起了计算数学工作者的重视，人们从理论上探讨这类问题的实质，并从各个角度寻求适用的数值解法，关于 Stiff 已有公认的数学定义，也建立了数值稳定性和稳定区域的概念，并且发表了大量数值解法的论文，特别应提到的是 G. Dahlquist，J. C. Butcher，C. W. Gear[56]等人，他们都做了重要的工作，但是现在还有许多尚待解决的问题，非线性问题的数值稳定性的研究还刚刚开始，在解决各种实际问题特别是复杂大系统问题时需要有更适用的算法。Stiff 性质从计算数学的角度讲是数学问题本身的性质，它不依赖于求解这个问题的数值方法。但正是由于这个性质，使得传统的常微分方程的数值积分方法遇到极大困难，也正是由于这个原因，Stiff 微分方程数值积分方法的研究已经成为数值方法中最活跃的研究方向之一。

柔性多体系统动力学分析建立起来的力学模型，多数是非线性 Stiff 微分方程组成非线性 Stiff 微分方程组与非线性代数方程组的微分—代数混合方程组，Stiff 方程目前主要有两大类算法，即频域法和时域法。

频域法是一种传统解法，当系统阻尼满足一定条件或阻尼较小可作振型阻尼处理时，频域法是十分有效的方法。后来对扩展到复数空间的频域法，用来处理一般粘性阻尼系统时，要涉及求解复特征值问题，计算量较大。由于频域法使方程组解耦的正交条件随

着模型方程的复杂化愈来愈不易满足，这种方法在应用上受到了极大限制，特别是对柔性多体系统动力学方程组，该方法本身已无能为力，而时域法不受此限制，所以得到了较快的发展。

虽然对 Stiff 微分方程组的研究已经引起计算数学领域的充分重视，但针对复杂大系统，尤其是直接针对柔性多体系统动力学 Stiff 微分方程组的研究，国外国内都还尚无专门文献。

无论运用何种动力学原理，柔性多体系统动力学分析中的 Stiff 微分方程组均可表为以下两种形式之一：

$$A\ddot{q} = B \tag{1.1-2}$$

$$\begin{cases} A\ddot{q} + C_q^T\lambda = B \\ C(q,t) = 0 \end{cases} \tag{1.1-3}$$

A,B 分别为广义质量矩阵与广义力列阵，C 为约束方程列阵，C_q 为 C 对应的 Jacobi 矩阵，λ 为拉氏乘子列阵。(1.2-2) 式为线性或非线性二阶常微分方程组，(1.2-3) 式为线性或非线性二阶常微分方程组与非线性代数方程组的微分一代数混合方程组。

对于 (1.2-2) 式和 (1.2-3) 式的求解，理论上可以使用处理一阶 Stiff 微分方程的数值方法。但显而易见存在方程降阶的问题。高阶微分方程与微分方程组的互化如下：

已给一个 n 阶方程

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.1-4}$$

设 $y_1=y$，$y_2=y'$，$y_3=y''$，…，$y_n=y^{(n-1)}$，那么解上面 n 阶微分方程就相当于解下面 n 个一阶微分方程的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \cdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \end{cases}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x_1,y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

式中 y_1，y_2，…，y_n 看作自变量 x 的 n 个未知函数。要将 (1.1-2) 式和 (1.1-3) 式降阶为一阶微分方程组的形式，付出的代价是将原来方程组中方程的个数增加一倍。对于隐式方法还等价于使求解非线性代数方程组的次数增加了一倍。若让广义坐标与广义速度作为状态变量，也等价于上述降阶。因此当方程的数目比较大时，其计算耗费一般较大，实际上往往难以应用。只有少数算法如 Gear 算法，由于其具有如下三个优点而被使用：1) 容易改变阶和步长，2) 能够应用高阶的和高稳定的格式，3) 每前进一个步长解隐式方程组所需要的工作量比较小。但 Gear 算法对初值的要求比较苛刻，也不能回避上述问题。

这样，直接处理高阶方程的方法就成为工程上人们十分关注的一个重要课题。

1950 年，Houbolt[57]首先提出了基于 Lagrange 插值公式的步进方法。该方法利用向后差分，由位移导出了速度与加速度的多步隐式公式。Houbolt 方法得到的计算结果比较

光滑，该方法的一个特殊优点是：如果忽略质量和阻尼的影响，那么这种用作系统动力响应分析的方法就约化为一种结构的静力分析方法。1959 年，Newmark[58]给出了在速度、位移的近似关系中引入两个参数 Y_N，β_N 的多步隐式方法。当引入参数 $Y_N \geqslant \frac{1}{2}$，$\beta_N \geqslant \frac{1}{2}Y_N$ 时为无条件稳定，其中以梯形法则 $\left(Y_N=\frac{1}{2}, \beta_N=\frac{1}{4}\right)$ 具有最小的精度误差。Newmark 在这个方法中提出了用加速度计算值与假设值之比来判别算法的稳定性，这是谱半径的早期提法。1966 年，Johson 利用单位圆域变换到 Z 平面左半平面的方法证明了 Houbolt 方法是无条件稳定的。1968 年，Wilson 提出了引进一族积分参数 θ 的单步隐式方法，该方法实际上是线性加速度近似的外推，是对线性的加速度算法的一种修正。Wilson 采用了逼近算子的谱半径 $\rho(A) \leqslant 1$ 作为算法稳定性的判据，在该方法中证明了当取 $\theta \geqslant 1.37$ 时，方法能够达到无条件稳定并给出了一种判断算法稳定性的简单而实用的方法。这种方法在以后证明稳定性问题时得到推广而成为一种较为普遍的方法。1977 年，Zienkwiey 提出了一类基于广义加权残值方法的多步时域方法（类似的算法亦可用广义哈密顿原理推出）。这个算法的贡献主要在于该多步方法包容了许多现存的线性算法。如 Newmark 算法、Houbolt 算法、Wilson-θ 算法等。由于 Zienkwiey-1977 算法的一般性，因而可以对精度及稳定性问题进行统一的研究，对以前的和新的方法进行比较和对照，尤其它所包容的算法都是直接处理高阶（这里指二阶）方程的无条件稳定的方法，因此它可以用来求解 Stiff 微分方程组。后来，Wood 对 $m=2$ 和 $m=3$ 的 Zienkwiey 算法进行了比较，Hibler[59]等对线性隐式算法作了系统研究。从工程应用的角度看，当刚性比不很大、对稳定域要求不很高的情况下，Zienkwiey 算法与线性显式单步方法相比较，其主要缺点是：1）该算法建立为多步法，当前步依赖于前 k 步的信息，算法进入运算时不能自动开始，需要一个初始处理。不能自动开始的算法至少需要二步初始处理，因此增加了额外的贮存。2）不同的开始过程将导致不同的开始规则和计算效果，该算法不可能提供统一的开始值。3）步长改变的点上需要作初始计算，大大增加了算法的复杂性和存贮空间。在分析中，变步长在实用上成为不可能。4）不易向非线性问题推广应用。1980 年，Grown[60]提出了二种新的 PEC 算法，在一定程度上缩短了运算时间并在结构动态分析中进行了应用。1989 年，Gardona 和 Geradin[61]将运动方程映射到方程考虑的某些项的正切空间上完成积分，并给出了具体算例。国内虽然起步晚得多，但 1980 年以来不断有一些算法发表。如：1980 年，任曾勋[62]提出了一种工程解法，通过引入补充未知量构成双直交基来满足求解条件。1981 年，孙焕纯[63]提出了一个改进的 θ 法，其假定加速度在时间步长内是时间的二次函数。算法建立为二级近似加速度一步法。同年，蔡承文等[64]证明了当 $\theta \leqslant 0.9003$ 时，Wilson-θ 法亦无条件稳定并得出了一组较合理的参数选择。1984 年，张策等[65]依据 Bagci 和 Kalaycioglu 的思想给出了状态空间法求稳态解的闭式算法。1989 年，谢闽生[56]提出了一个对非古典阻尼为无条件稳定的线性多步法，该算法基于 Wilson-θ 法对平均加速度法做了又一修正。1990 年，凌复华等[67]根据徐次达的固体力学加权残值法提出了样条—加权残值公式。1990 年，覃正、叶尚辉、刘明治[68]提出了一个非线性逼近的高精度单步显式法，其精度超过了 Newmark 法和 Wilson-θ 法。

目前，除了上述各种直接处理高阶方程组方法的研究以外，近十几年来针对柔性多体系统动力学模型的处理，还发展了一些相关的方法。这些方法是使用上述各种方法之

前对动力学模型所做的准备工作。

对于式（1.1-2）类型的数学模型，由于多体动力学在建模过程中考虑到方程的通用性，矩阵 A 和 B 中包含大量参数，在计算具体问题时，这些参数中相当一部分为零。因此在对方程进行数值积分时，计算机将要花大量时间用在零元素的加、减与乘的运算上。如果先对矩阵 A 和 B 进行符号推导，对于那些含零系数的各项先去掉，这样会大大减少与零元素进行的无效数值运算，节省计算时间。另外在直接数值积分时，必须对大量带下标的变量数组定值，需要许多时间用于对数组元素地址的计算上。如果先展开矩阵 A 和 B，进行符号推导，那么再进行数值积分时各变量都有固定的地址，节省了寻址的计算时间。因此在处理这类数学模型时，人们建立了一种符号—数值方法。即对于获得的数学模型先让计算机进行符号推导，得到一个较为简洁的形式后，再对化简后的方程进行数值积分。

符号—数值方法的主要任务是对数学模型进行计算机符号推导。这要求计算机有足够大的内存，符号推导过程要消耗大量的计算时间。不过对于同样结构形式的系统，符号推导过程只需进行一次。以后的重复数值计算与符号推导是独立进行的两个阶段。因此对数值计算重复次数多的对象，符号推导的优越性就较明显。当然对于结构较简单的系统，或计算次数不多的情况，直接数值计算可能是更好的方案。

对于式（1.1-3）类型的数学模型，实际上前述的各种数值方法都不能直接用来求解。对这类代数—微分混合方程组及其固有的病态，一般必须进行一些“处理”。近年来许多动力学工作者致力于这类数学模型的数值研究工作，其研究方法分为二大类：增广法（Augmented Method）和缩并法（Condensed Method or Eliminated Method），前者将全部广义坐标与拉格朗日乘子作为未知变量统一处理，将方程组变为较大变量数的封闭方程作数值处理。其优点是可直接利用数值算法的计算模块，便于计算机实现。后者是通过数值方法利用计算机自动寻找独立变量个数，选择独立变量，将方程缩并成个数与自由度数相接近的方程组再进行数值积分，这样可有效地克服代数—微分方程的固有病态。但其要对约束方程进行分解，求逆及复杂的矩阵四则运算，进行矩阵分解时，动力学方程也要作相应的行列变换，导致原方程结构的变化，破坏原方程的稀疏性。

增广法的做法是将式（1.1-3）改写为

$$\begin{bmatrix} A & C_q^T \\ C_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{1.1-5}$$

其中 $\gamma = -(C_q\dot{q})_q\dot{q} - 2C_{qt}\dot{q} - C_{tt}$。最简单的思想是直接积分法[69,70]，但难免引起位移和速度的违约。1972年，Baumgarte[71]首次提出违约稳定方法（Constraint Violation Stablized Method），即将反馈控制理论拓展应用于多体系统动力学方程的数值积分中，其做法是设计一反馈控制以抑制数值积分过程中的误差增长，以得到稳定的响应。加速度约束方程改写为：

$$\ddot{C} + \alpha\dot{C} + \beta^2 C = 0 \tag{1.1-6}$$

反映在（1.1-5）中，是将 γ 修正为：$\gamma - 2\alpha\dot{C} - \beta^2 C$。研究表明[69,72]，$\alpha$、$\beta$ 取值在5～50之间通常可以得到满意的结果，且 $\alpha=\beta$ 时，数值计算稳定最快。但 α、β 的选择目前还无规可循，且当系统达到奇异构形时，计算往往失效。违约修正方式只适用于违约比较小的情况。

缩并法的实质是选择适当的方式处理约束方程，选择独立广义坐标，找到独立与非独立广义坐标的关系，然后将动力学方程表为独立广义坐标的纯微分方程进行数值积分。具体做法是通过各种矩阵分解方法分离出独立与非独立坐标，仅对用独立坐标表达的式（1.1-2）类型的数学模型进行积分，而非独立坐标则通过非线性代数方程求得。1982年，Wehage 等[73]首次提出平面多体系统广义坐标分块法（Generalized Coordinate Partitioning Algorithm），之后 Nikravesh 等[74]又将该方法发展到三维系统的分析。此外，基于各种矩阵分解理论发展起来的方法还有奇异值分解法（SVD）[75,76]，零特征值方法（Zero Eigenvalue Theorm）[77]，LU 分解方法[78]，QR 分解方法[79]，零空间方法[80]，正切坐标方法[81,82]及 Gauss 消去法[78]等。对数值积分来讲，缩并法具有最小数目坐标法的优点。

1986年，Park 等[83]将约束稳定法与广义坐标分块法结合提出了具有以上两种方法优点的混合数值积分法（Hybrid Numerical Integration Algorithm）。但目前对所有这些方法尚无统一的比较和肯定的结论，在能否处理多余约束以及数值计算的精度、效率、稳定性等方面仍需进一步探讨。直到90年代初，对微分—代数混合方程的研究仍是多体系统动力学研究的热点和难点。这类数学模型的数值研究仍处于探索阶段，其研究的成熟与否直接影响着柔性多体系统动力学的发展，同时对计算数学也是一个极大的丰富和推动。

求解柔性多体系统动力模型 Stiff 微分方程组的方法，无论是处理一阶方程组的方法还是直接处理高阶微分方程组的方法，都是人们经过长期的探索和实践而逐渐建立起来的。但是到目前为止，还没有足够的算例来评价各种算法的优劣。在实际科研的仿真计算中，通常大家所使用的方法也不尽相同。如：袁兆鼎等[84]介绍了十余种一般求解 Stiff 方程的方法，Enright et al[85]精选了25个题目对不同类型算法的费用和可靠性进行测量，Huston[86]认为四阶 Runge-Kutta 方法是目前最好的方法，Yoo et al[87]用预估校正法，国内不少人用 Newmark 法、Wilson-θ 法、Gear 法等[56]。从工程应用来看，每种方法都有其局限性。其应用成功与否还与所建立动力学模型的形式，变形体的离散方法等有很大关系。

Cincinnati 大学机械、工业和核工程系著名教授 R. L. Huston[21]（1991）认为“多体动力学研究活动的激增标志着它目前是应用力学方面最活跃的领域之一”，“多体动力学的发展极像20年前有限元分析发展的情况。”

我国虽然起步较晚，但近年来在理论研究和实际应用等方面都做了大量的工作。对国外各学派、各种方法的特点给予了极大的关注并逐渐提出了自己的补充、改进的研究以及创新的研究，文献［68］对国内的研究进展进行了一次很好的检阅。

1.2 大型空间结构与控制的工程应用研究

在航空航天领域，现代航天器朝着大规模的方向发展，其结构越来越复杂。70年代后期，国外许多学者针对未来大型航天器的发展趋势，开始转入大型空间结构动力学与控制方面的理论研究工作[88]，包括形状控制和振动抑制。其应用对象是大型空间平台、大型载人空间站、空间发电站和空间基地等。由于大型航天器带有多个大型分布质量部件，像多翼大面积太阳阵、大型杆件和天线阵等，对这类结构的设计要求，不单单是限制构件质心与航天器质心的位置，更重要的还要保持分布的几何构形关系。由于大的结构柔性问题，控制与结构在动力学上就会产生相互作用，降低航天器指向精度和稳定性，甚至导