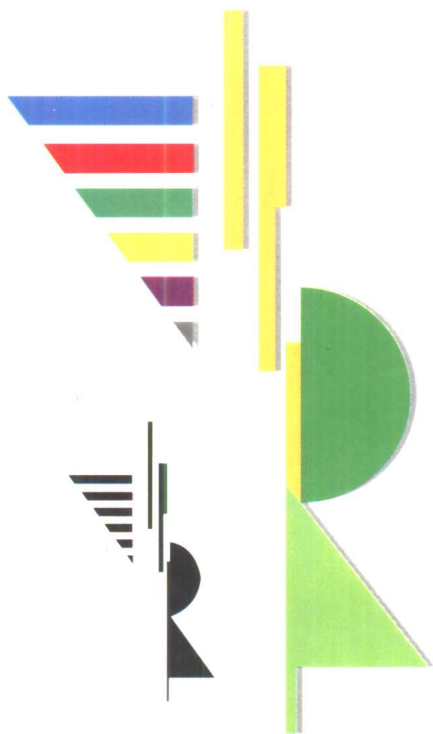


工科课程提高与应试丛书

GAODENG SHUXUE
DIANXINGTI JIEXI JI ZICESHITI

刘三阳 主编

- 涵盖课程重点及难点
- 精设典型题详解及评注
- 选配课程考试模拟及全真试卷



高等数学

典型题解析及自测试题

•上册•

西北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

高等数学典型题解析及自测试题

(上册)

刘三阳 主编

刘三阳 李广民 王雪锋 井爱雯 王金金 编

西北工业大学出版社

2000年8月 西安

工科课程提高与应试丛书

高等数学典型题解析与自测试题

(下 册)

刘三阳 主编

刘三阳 李广民 王雪锋 井爱雯 王金金 编

西北工业大学出版社

2000年8月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书总共分为三部分。第一部分典型题中各章与同济《高等数学》(第四版)配套,每章分为重点与难点、典型题解析、习题,第二部分自测试题中包括全真和模拟试题,附录给出了习题及试题答案。全书突出了题目的典型性和代表性,解(证)法的灵活性和启发性。题源广泛,题型多样,注重讲题示法,以题释理,强调解题思路的分析、解题方法的提炼和疑难问题的注释。旨在起到以题促学、解难释疑、举一反三、融会贯通之效。

本书可供理工院校师生作为高等数学课程教与学的参考书,对参加高等数学竞赛和报考研究生的考生也具有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解析与自测试题/刘三阳主编. —西安:西北工业大学出版社,2000.8

(工科课程提高与应试丛书)

ISBN 7-5612-1267-4

I. 高... I. 刘... III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 34073 号

*

©西北工业大学出版社出版发行

(邮编:710072 西安市友谊西路 127 号 电话:8491147)

全国各地新华书店经销

西安市向阳印刷厂印装

*

开本:850毫米×1168毫米 1/32 印张:12.8125 字数:289千字

2000年8月第1版

2000年8月第1次印刷

印数:1—8000册 定价:20.00元(套)(上册:10.00元,下册:10.00元)

购买本社出版的图书,如有缺页、错页的,本社发行部负责调换。

前 言

高等数学作为高等学校理工科专业的重要基础课,对大学生具有较大的难度和较重的份量,加之课时普遍减少,而且课程考试、后续专业课以及研究生入学考试又对这门课程有着较高的要求,学生普遍感到困难较多。为了帮助学生学好高等数学这门课程,我们编写了这本《高等数学典型题解析与自测试题》,供理工科院校师生作为高等数学课程教与学的参考书。

本书配合同济大学《高等数学》(第四版)并与之同步,分为上下两册。每章分为重点与难点、典型题解析、习题与答案(提示),书末附有若干套全真和模拟试题及其答案。解题是学习高等数学的重要组成部分,是一种综合运用知识的过程,也是能力的一种训练和测验。本书突出了题目的典型性和代表性,解(证)法的启发性和灵活性,题源广泛、题型多样、重点突出,讲题示法,以题明理,注重解题思路和规律的分析,解题方法和技巧的提炼和有关注意事项和阐释。力求起到以题促学、释疑解难、触类旁通和提高能力的效果。

由于编者水平所限,书中错误和不当之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

2000年5月

(陕)新登字 009 号

内 容 简 介

本书总共分为三部分。第一部分典型题中各章与同济《高等数学》(第四版)配套,每章分为重点与难点、典型题解析、习题;第二部分自测试题中包括全真和模拟试题;附录给出了习题及试题答案。全书突出了题目的典型性和代表性,解(证)法的灵活性和启发性。题源广泛,题型多样,注重讲题示法,以题释理,强调解题思路的分析、解题方法的提炼和疑难问题的注释。旨在起到以题促学、解难释疑、举一反三、融会贯通之效。

本书可供理工院校师生作为高等数学课程教与学的参考书,对参加高等数学竞赛和报考研究生的考生也具有参考价值。

目 录

上 册

第一部分 典型题解析

第一章 函数、极限、连续	1
一、内容提要	1
二、典型题解析	1
三、习题	13
第二章 导数与微分	16
一、内容提要	16
二、典型题解析	18
三、习题	33
第三章 中值定理与导数的应用	34
一、内容提要	34
二、典型题解析	35
三、习题	70
第四章 不定积分	73
一、内容提要	73
二、典型题解析	75
三、习题	91
第五章 定积分	93
一、内容提要	93
二、典型题解析	95
三、习题	128
第六章 定积分的应用	132

一、内容提要	132
二、典型题解析	133
三、习题	152
第七章 空间解析几何与向量代数	155
一、内容提要	155
二、典型题解析	156
三、习题	174

第二部分 自测试题

自测试题一	176
自测试题二	177
自测试题三	178
自测试题四	180

附录 习题与自测试题答案

习题答案	182
自测试题答案	189

下 册

第一部分 典型题解析

第八章 多元函数微分法及其应用	195
一、内容提要	195
二、典型例题解析	196
三、习题	218
第九章 重积分	220
一、内容提要	220

二、典型题解析	220
三、习题	248
第十章 曲线积分与曲面积分	250
一、内容提要	250
二、典型题解析	250
三、习题	286
第十一章 无穷级数	290
一、内容提要	290
二、典型题解析	292
三、习题	331
第十二章 常微分方程	336
一、内容提要	336
二、典型题解析	339
三、习题	373

第二部分 自测试题

自测试题一	377
自测试题二	378
自测试题三	380
自测试题四	381

附录 习题与自测试题答案

习题答案	384
自测试题答案	392
参考文献	396

目 录

(下 册)

第一部分 典型题解析

第八章 多元函数微分法及其应用.....	195
一、内容提要	195
二、典型例题解析	196
三、习题	218
第九章 重积分.....	220
一、内容提要	220
二、典型题解析	220
三、习题	248
第十章 曲线积分与曲面积分.....	250
一、内容提要	250
二、典型题解析	250
三、习题	286
第十一章 无穷级数.....	290
一、内容提要	290
二、典型题解析	292
三、习题	331
第十二章 常微分方程.....	336
一、内容提要	336
二、典型题解析	339
三、习题	373

第二部分 自测试题

自测试题一	377
自测试题二	378
自测试题三	380
自测试题四	381

附录 习题与自测试题答案

习题答案	384
自测试题答案	392
参考文献	396

第一部分 典型题解析

第一章 函数、极限、连续

一、内容提要

1. 极限. 既要准确理解极限的概念(包括数列极限、函数极限、左右极限、无穷小量、无穷大量)和极限存在的充要条件,又要能正确熟练地求出各种极限. 要注重各种方法的综合运用.

2. 复合函数和分段函数,会将两个函数(尤其是两个分段函数)进行复合.

3. 判断函数的连续性和间断点的类型.

4. 闭区间上连续函数的介值定理和最大值、最小值存在定理的应用.

二、典型题解析

例 1.1 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & (|x| \leq 2) \\ 2 & (|x| > 2) \end{cases}$$

求 $f[g(x)], g[f(x)], g[g(x)]$.

分析 这是两个分段函数的复合,要根据外层函数定义域的各区间段和内层函数的表达式及定义域进行分段复合.

$$\text{解 (1) } f[g(x)] = \begin{cases} 1 & (|g(x)| \leq 1) \\ 0 & (|g(x)| > 1) \end{cases}$$

现需求出使 $|g(x)| \leq 1$ (或 $|g(x)| > 1$) 的 x 范围.

由于 $|x| > 2$ 时, $g(x) = 2 > 1$, 故仅当 $|x| \leq 2$ 时,才可能有 $|g(x)| \leq 1$. 而欲使 $|g(x)| \leq 1$, 必须且只需

$$|x| \leq 2, \quad |2 - x^2| \leq 1$$

由此可得 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$. 于是有

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1 & (1 \leq |x| \leq \sqrt{3}) \\ 0 & (|x| < 1 \text{ 或 } |x| > \sqrt{3}) \end{cases}$$

(2)

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 - [f(x)]^2 & (|f(x)| \leq 2) \\ 2 & (|f(x)| > 2) \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知,对任意的 x 有 $|f(x)| \leq 1 < 2$, 故有

$$g[f(x)] = 2 - [f(x)]^2 = \begin{cases} 2 - 1^2 & (|x| \leq 1) \\ 2 - 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

即

$$g[f(x)] = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 2 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(3) 由于对任意的 x 有 $|g(x)| \leq 2$, 故有

$$g[g(x)] = 2 - [g(x)]^2 = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2 & (|x| \leq 2) \\ 2 - 2^2 & (|x| > 2) \end{cases}$$

即

$$g[g(x)] = \begin{cases} -x^4 + 4x^2 - 2 & (|x| \leq 2) \\ -2 & (|x| > 2) \end{cases}$$

【注】 也可借助 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的几何图象, 求出各复合函数.

例 1.2 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x) = f(f \cdots (f(x)))$, 并讨论 $f_n(x)$ 的奇偶性和有界性.

分析 先通过直接代入法复合几步, 找出规律, 再用数学归纳法证明一般情况.

解 设 $f_1(x) = f(x)$, 则

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{f_1(x)}{\sqrt{1 + [f_1(x)]^2}} =$$

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1 + [f_2(x)]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

设 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{f_k(x)}{\sqrt{1 + [f_k(x)]^2}} =$$

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法知

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

显然, $f_n(-x) = -f_n(x)$, 即 $f_n(x)$ 为奇函数. 由于显然有 $|f_n(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+nx^2}} < 1$, 故 $f_n(x)$ 有界.

例 1.3 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 0) \\ x^2 + x & (x > 0) \end{cases}$, 则下式中正确的是

().

$$(A) f(-x) = \begin{cases} -x^2 & (x \leq 0) \\ -(x^2 + x) & (x > 0) \end{cases}$$

$$(B) f(-x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 0) \\ x^2 - x & (x > 0) \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x) & (x < 0) \\ -x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$(D) f(-x) = \begin{cases} x^2 - x & (x < 0) \\ x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

答 (D) 正确.

解法 1 当 $x \geq 0$ 时, $-x \leq 0$, 由 $f(x)$ 的定义, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, 即(D) 正确.

解法 2 令 $y = -x$, 则当 $x \leq 0$ 时, $y \geq 0$; $x > 0$ 时, $y < 0$, 代入 $f(x)$ 的表达式得

$$f(-y) = \begin{cases} (-y)^2 & (y \geq 0) \\ (-y)^2 + (-y) & (y < 0) \end{cases}$$

即有

$$f(-y) = \begin{cases} y^2 - y & (y < 0) \\ y^2 & (y \geq 0) \end{cases}$$

这与(D) 中的函数是相同的.

【注】 本题也可利用 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图像关于 y 轴对称的道理, 直接从图形上判断(D) 是正确的.

例 1.4 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由于 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 可得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$, 再根据 $\ln(1-x) \geq 0$ 知 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$, 这就

是 $\varphi(x)$ 的定义域.

例 1.5 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n}$, ($a \geq 0$).

解 需根据 a 的取值范围分别讨论.

(1) 当 $0 \leq a \leq 1$ 时

$$1 \leq \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[3]{3}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3} = 1$$

(2) 当 $1 < a \leq 2$ 时

$$a < \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[3]{3} a$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3} a = a$$

(3) 当 $a > 2$ 时

$$\frac{a^2}{2} < \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[3]{3} \frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3} \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

综上所述可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} = \begin{cases} 1 & 0 \leq a \leq 1 \\ a & 1 < a \leq 2 \\ \frac{a^2}{2} & a > 2 \end{cases}$$

【注】 本题答案实际就是 $1, a$ 和 $\frac{a^2}{2}$ 中的最大者, 类似可得到更一般的

结论:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max_{1 \leq i \leq k} \{a_i\} \quad a_i \geq 0$$

例 1.6 设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证 因为

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n + x_n + \frac{a}{x_n^2} \right) \geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{a}{x_n^2}} = \sqrt[3]{a} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

所以 $\{x_n\}$ 有下界. 又因为

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right) - x_n = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{a}{x_n^2} - x_n \right) = \frac{a - x_n^3}{3x_n^2} \leq 0 \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 单调下降有下界, 从而存在极限, 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$, 对 x_{n+1}

$$= \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right) \text{ 两端取极限得 } l = \frac{1}{3} \left(2l + \frac{a}{l^2} \right) \text{ 解之得}$$

$$l = \sqrt[3]{a}$$

【注】 本题提供了求正数立方根的迭代公式, 而且收敛很快. 试导出求平方根和 n 次方根类似公式.

例 1.7 设 $x_1 > 0$ 且 $x_{n+1} = \frac{5(1+x_n)}{5+x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在并求此极限.

证 容易看出 $1 < x_{n+1} = \frac{5(1+x_n)}{5+x_n} < 5$ ($n = 1, 2, \dots$) 即 $\{x_n\}$ 有上下界, 又因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{5(1+x_n)}{5+x_n} - \frac{5(1+x_{n-1})}{5+x_{n-1}} = \frac{20(x_n - x_{n-1})}{(5+x_n)(5+x_{n-1})}$$

所以