綫性代数計算法

法捷也娃

科学出版社

綫性代数計算法

В. Н. ФАДДЕЕВА 著
王本鑑　王亞南　王俊民譯

科　學　出　版　社
1958年7月

В. Н. ФАДДЕЕВА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ
Государственное издательство
технико-теоретической литературы
1950

内 容 提 要

本書是根据苏联国立技术理論書籍出版社（Гостехиздат）1950年出版的 В. Н. Фаддеева 所著"Вычислительные методы линейной алгебры"譯出，可作为計算数学專業实習課程的教材，也可供一般参考之用。

本書共分三章。第一章是綫性代数的基本知識，其中包括矩陣、矢量空間、綫性变換、若当标准形、矢量及矩陣的極限概念等，以供后面各章之用。

第二章是一次方程組，包括各种計算方法及其比較。第三章詳尽而細緻地叙述了矩陣的特征值的各种計算法及其討論。

讀者只須具有大学二年級的代数程度，即可閱讀本書而無困难。

本書經張燮教授校訂全部譯稿。

綫 性 代 数 計 算 法

В. Н. ФАДДЕЕВА 著
王本鑑 王亞南 王俊民譯

*

科 学 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街 117 号）
北京市書刊出版業营業許可証出字第 061 号
科学出版社上海印刷厂印刷 新华書店总經售

*

1958年7月第 一 版	書号：1213 字数：166,000
1958年7月第一次印刷	开本：850×1168 1/32
(滬) 0001—2,465	印張：6 13/16 插頁：1

定价：(10) 1.30 元

原　序

数学物理問題的数值解法，往往与綫性代数的基本問題：如一次方程組的解法問題，矩陣的特征值計算法問題的数值解法有关．本書試將綫性代数中最重要的計算法作一个系統的叙述，其中包括古典的方法与最近若干年来所作出的方法．

当然，本書並不包罗一切，它仅仅叙述了那些已經有实际考驗的方法．在叙述时，作者既不追求無隙可击的严密性，也不能將应用各种方法时所發生的一切可能想到的情形与細节全部加以分析，而是，只講那些最典型的与在实际上最重要的情形．

本書共分三章：第一章給出了綫性代数的某些知識，以备將来之用．第二章專講一次方程組与有关問題的数值解法．最后，第三章叙述矩陣的特征值与特征矢的計算方法．

А. Л. 布魯德諾与 Г. П. 阿基洛夫兩位同志，对本書的原稿甚为关心，並提出了一系列的宝貴意見，作者在此向他們致以衷心的謝意。

目　录

第 一 章

綫性代数的基本知識

这一章具有輔助性質，其中叙述了綫性代数的知識而未加詳細的証明；这些知識对于了解以后几章的材料来講是必要的.

§1. 矩　　陣

1. 所謂矩陣，便是一組通常具有复值的数目的全体，它們布列为矩形的表，其中包含 n 行与 m 列.

这样的矩陣可以写成下面的形式：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

或者簡写为

$$A=(a_{ij}) \quad (i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, m).$$

兩个矩陣叫做相等，倘若它們的对应元素都相等的話.

由一行組成的矩陣，簡称为單行矩陣；由一列組成的矩陣簡称为單列矩陣. 倘若矩陣的行数与列数相等，均为 n，則称其为方陣. 此时数目 n 叫做方陣的阶数.

在方陣中，对角綫方陣占着重要的地位. 这就是如此的方陣，其中只有对角綫上的元素不等于零. 对角綫方陣用記号 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ 来表示，因而

$$(2)\qquad [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

如果所有的数目 α_i 彼此都相等,則方陣称为純量方陣:

$$(3)\qquad [\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix},$$

又当 $\alpha=1$ 时,叫做單位方陣:

$$(4)\qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

最后,所有一切元素都等于零的矩陣叫做零矩陣,我們用記号 0 来代表它.

所謂方陣的行列式,便是由方陣的元素所組成的行列式. 方陣 A 的行列式用記号 $|A|$ 来表示.

2. 矩陣和数的乘法与矩陣的加法 所謂矩陣 A 和数 α 的乘积,便是一个如此的矩陣,它的元素系由矩陣 A 的元素乘以 α 而得:

$$(5)\qquad \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}.$$

具有相同的行数 n 与相同的列数 m 的兩个矩陣 A 与 B,它們的和也是一个矩陣 C,这个矩陣的元素等于矩陣 A 和 B 的对应元

素之和，也就是：

$$
(6)\qquad A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}.
$$

不难看出，上面所引进的运算具有下列性質：

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$.
2. $A+B \quad =B+A$.
3. $A+0 \quad =A$.
4. $(\alpha+\beta)A \quad =\alpha A+\beta A$.
5. $\alpha(A+B) \quad =\alpha A+\alpha B$.

这里 A, B, C 是矩陣，α, β 是数，它們通常具有复值。

3. 矩陣的乘法 矩陣 A 和 B 的乘法，只在如次的假設下才有定义：矩陣 A 的列数等于矩陣 B 的行数。在这种假設下，乘积 C 的元素用如次的方式来定义：矩陣 C 的第 i 行第 j 列的元素，等于矩陣 A 的第 i 行的元素与矩陣 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和，这样，

$$
AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}=
$$

$$
(7)\qquad =\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix},
$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$$

(8)
$$(i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, p).$$

我們注意到，兩个矩陣的乘积仍旧是一个矩陣，它的行数等于第一个矩陣的行数，而列数等于第二个矩陣的列数．例如將方陣乘以由一列所成的矩陣时，所得的乘积仍为一列所成的矩陣．

对于矩陣的乘法而言，交換律通常并不成立，不过关于这方面要作一些說明．矩陣 AB 与 BA 同时有意义的条件为：第一个矩陣的列数等于第二个矩陣的行数，而且第一个矩陣的行数等于第二个矩陣的列数．当这些条件成立时，AB 与 BA 都是方陣，但若 A, B 不是方陣时，則 AB 与 BA 的阶数不同．因此，只有对于方陣而言，矩陣 AB 与 BA 是否相等的問題才有意义．但是卽使在此种情形下，通常也有 $AB\neq BA$．

在个别的情形下，乘法是可换的——此时兩个矩陣叫做可換的．例如，純量方陣与任意一个同阶方陣都可換，原因是：

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 \cdots 0\\ 0 & \alpha \cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 \cdots \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0 \cdots 0\\ 0 & \alpha \cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 \cdots \alpha\end{pmatrix}=$$

(9)
$$=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} \cdots \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \cdots \alpha a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} \cdots \alpha a_{nn}\end{pmatrix}.$$

由此便可以看出單位方陣在矩陣乘法中的特殊地位．精确地

說，單位方陣在所有已知阶数的方陣中所占的地位，正如数 1 在所有数中的地位一样．事实上

$$AE=EA=A.$$

我們可以証明，矩陣乘法是可結合的，也就是說，倘若 AB 与 $(AB)C$ 都有意义，那么 BC 与 $A(BC)$ 也有意义，而且，

1. $A(BC)=(AB)C.$

矩陣的乘法也具有下列性質：

2. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B),$
3. $(A+B)C=AC+BC,$
4. $C(A+B)=CA+CB,$

这里 A, B, C 是矩陣，α 是数．

將矩陣

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

中的行与列对調，便得到轉置矩陣

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

我們指出乘积的轉置規則如下：

$$(AB)'=B'A'.$$

事实上，矩陣 $(AB)'$ 的第 i 行第 j 列的元素等于矩陣 AB 的第 j 行第 i 列的元素，也就是等于：

$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}. \tag{11}$$

而此式显然等于矩陣 B' 的第 i 行的元素与矩陣 A' 的第 j 列的对

应元素的乘积之和，也就是等于矩陣 $B'A'$ 的一般元素.

最后我們再指出，像由行列式論里所知道的，方陣乘积的行列式等于相乘的方陣的行列式之积.

4. 矩陣的分塊 对于高阶矩陣的运算，通常需要多次的演算. 因此，有时最好能將高阶矩陣的运算化为低阶矩陣的运算. 这种化法借助于將已給矩陣分解成“塊”来实現. 精确地說，每个矩陣可以用好几种方法，把它分解成为若干个阶数較低的矩陣.

例如

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=
$$

$$
=\left(\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right).
$$

由已給矩陣所分解成的矩陣，叫做塊. 在矩陣的分塊法中，我們假設橫綫与豎綫穿过整个矩陣.

我們不拟討論矩陣分解法的一般情形，而只考慮方陣的这种分塊法，它使得对角綫上的塊是正方形.

具有相同阶数的对角綫塊的兩个矩陣，其基本运算与各塊的运算自然地联系着. 精确地說，倘若

$$
A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},
$$

和

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix},$$

并且 A_{ii} 与 B_{ii} 是同阶的方塊，則

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1k}+B_{1k} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2k}+B_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1}+B_{k1} & A_{k2}+B_{k2} & \cdots & A_{kk}+B_{kk} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

又

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{k1} & C_{k2} & \cdots & C_{kk} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{ik}B_{kj} \quad (i, j=1, \cdots, k).$$

我們不拟証明上列公式[1]，而仅仅指出，根据我們的假設可知，矩陣 A_{il} 与 A_{lj} 是可以相乘的，因为矩陣 A_{il} 的列数等于矩陣 A_{l} 的行数.

由公式(12)与(13)可知，对于分解为所論形式的塊的矩陣而言，其运算与將各塊代以数目时的运算相同.

塊形矩陣的一个重要特例是加边矩陣. 精确地說，設有 $n-1$ 阶方陣 A_{n-1}：

$$A_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

[1] 証法可以参考 А. И. Мальцев 著、柯召譯的“綫代数基础”.

在方陣 A_{n-1} 中添入一行 $v_{n-1}=(a_{n1}\cdots a_{n,n-1})$ 与一列 $u_{n-1}=(a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n-1,n})$，并添入一个数 a_{nn}，則得 n 阶方陣 A_n：

$$(14)\qquad A_n=\begin{pmatrix} & & & a_{1n}\\ A_{n-1} & & & a_{2n}\\ & & & \vdots\\ & & & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & u_{n-1}\\ v_{n-1} & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

于是我們說，方陣 A_n 是由方陣 A_{n-1} 加边而得的，此时方陣可以按照自然的形式分解成塊．

加边矩陣的运算也可以按照塊形矩陣的一般运算規則来施行．

假設

$$A=\begin{pmatrix} M & u\\ v & a\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} P & y\\ x & b\end{pmatrix}$$

是兩个 n 阶的加边矩陣．記号 M, v, u, a 与 P, x, y, b 的意义和定义中相同．則下列断語成立：

$$(15)\qquad \left.\begin{aligned} \alpha A&=\begin{pmatrix} \alpha M & \alpha u\\ \alpha v & \alpha a\end{pmatrix},\\ A+B&=\begin{pmatrix} M+P & u+y\\ v+x & a+b\end{pmatrix},\\ AB&=\begin{pmatrix} MP+ux & My+ub\\ vP+ax & vy+ab\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}$$

这里 MP 与 ux 是 $n-1$ 阶方陣，My, ub 是 $n-1$ 个元素所成的列，vP 与 ax 是相仿的行，最后，$vy+ab$ 是数．

5．拟对角綫方陣　我們再考慮塊形矩陣的一个特例，就是拟对角綫方陣．所謂拟对角綫方陣，便是如此的方陣，其中沿着主对角綫上分布着方塊，而其余的元素都等于零．例如七阶方陣：

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{array}\right)$$

便是拟对角綫方陣．此方陣的塊显然是方陣

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

以及六个零矩陣．

倘若兩个拟对角綫方陣的結構相同，則此二方陣之积也是同样結構的拟对角綫方陣，它的对角綫塊等于相乘方陣的对应方塊的乘积．

根据著名的拉普拉斯定理可知，拟对角綫方陣的行列式等于对角綫塊的行列式之积．

6．逆方陣与伴随方陣　方陣 $A=(a_{ij})$ 叫做非退化的，倘若它的行列式不等于零；在相反的情形下，A 便称为退化的．

現在引入逆方陣的重要概念．方陣 B 叫做方陣 A 的逆方陣，如果

$$AB=E. \tag{16}$$

兹証方陣 A 的非退化性是逆方陣存在的必要与充分条件．

必要性可以由关于兩个方陣之积的行列式的定理立刻推出．事实上，倘若 $AB=E$，則 $|A||B|=1$，从而 $|A|\neq 0$．

現在假設 $|A|\neq 0$. 欲作 A 的逆方陣，我們先考虑所謂**伴随方陣**，也就是方陣

$$C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 在方陣 A 的行列式中的代数余子式. 我們証明，伴随方陣具有下面的性質：

$$AC=|A|E. \tag{18}$$

事实上，按照矩陣乘法規則來計算 AC 的一般元素，即可推知它等于

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{j\cdot},$$

也就是說，当 $i\neq j$ 时，它等于零，当 $i=j$ 时，它等于 $|A|$——根据著名的行列式展开法定理.

同样也可以推出等式

$$CA=|A|E. \tag{18'}$$

对于任何方陣 A 而言，伴随方陣都有意义. 由等式 $AC=|A|E$ 可知，方陣

$$B=\frac{1}{|A|}C \tag{19}$$

是非退化方陣 A 的逆方陣.

事实上，

$$AB=A\cdot\frac{1}{|A|}C=\frac{1}{|A|}AC=E.$$

上面所作的方陣 B 也具有性質

$$BA=E, \tag{20}$$

此由等式 $CA=|A|E$ 可知.

最后，我們証明逆方陣的唯一性. 假定有如此的方陣 X 存在，

使得 $AX=E$. 將此式左乘以 B 則得 $X=B$. 倘若假設 $YA=E$, 則右乘以 B 时, 即得 $Y=B$.

与方陣 A 相逆的方陣用 A^{-1} 来表示, 此时显然有 $|A^{-1}|=$ $=|A|^{-1}$.

我們注意到, 与二方陣之积相逆的方陣, 等于这兩个方陣的逆方陣之积, 但取相反的順序, 也就是說

(21) $$(A_1A_2)^{-1}=A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

事实上,

$$A_1A_2A_2^{-1}A_1^{-1}=A_1A_1^{-1}=E.$$

逆方陣的寻求, 是綫性代数的主要問題之一. 等式 (19) 指出了逆方陣計算的可能性, 但伴随方陣的計算是如此的困难, 使得所講的等式只有理論上的价值. 关于求逆方陣的問題, 在第二章中將有部分性的討論.

7. 方陣多項式 現在定义方陣的正整数次方冪如下:

(22) $$A^n=\overbrace{A\cdots A}^{n\text{ 個}}.$$

根据結合律可知, 在此种乘积中可以任意放置括号, 因而可將它們略去. 由定义显然可知,

(23) $$\left.\begin{aligned} A^n\cdot A^m&=A^{n+m},\\ (A^n)^m&=A^{nm}.\end{aligned}\right\}$$

由此即可推出, 同一个方陣的兩个方冪是可換的.

此外, 我們又定义

$$A^0=E.$$

形式如

$$\alpha_0A^n+\alpha_1A^{n-1}+\cdots+\alpha_nE$$

的公式(其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是复数) 叫做方陣多項式, 方陣多項式可以看作是由代数多項式

(24) $$\varphi(\lambda)=\alpha_0\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots\alpha_n$$