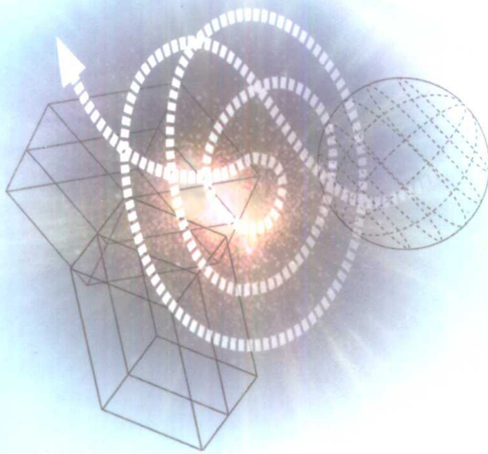
国家“九五”重点图书

高 科 技 与 工 程 计 算 丛 书

近代数学物理理论计算与可视化技术

阎贵卿 阎 毅 编著



国 防 科 技 大 学 出 版 社

近代数学物理理论计算与可视化技术

学出版社

★ 国家“九五”重点图书

★ 高科技与工程计算丛书

近代数学物理理论计算与可视化技术

阎贵卿　阎　毅　编著

国防科技大学出版社

·湖南长沙·

图书在版编目(CIP)数据

近代数学物理理论计算与可视化技术/阎贵卿,阎毅编著 .—长沙:国防科技大学出版社,2000.9
(高科技与工程计算丛书)
ISBN 7-81024-680-1

Ⅰ.近… Ⅱ.①阎…②阎… Ⅲ.数学物理方法-研究
Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第41126号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:何 晋 责任校对:文 慧
新华书店总店北京发行所经销
湖南大学印刷厂印装

*

开本:850×1168 1/32 印张:11.25 字数:282千
2000年9月第1版第1次印刷 印数:1—1500册

*

定价:25.00元

序

数学与物理学在近代科技创新发展中的重要作用是众所周知的。科学发展史还告知人们:自古以来数学为物理学提供了表述、分析、建模、计算和预见新事物的工具;物理学又为数学提供重要问题、直观根源、解题思想以及创始新分支的生命源泉。所以,着眼于科学的整体性观点,数学与物理学本来是一对同生共长不可分裂的学科。

但是,正如 20 世纪 50 年代初 Richard Courant 在与 David Hilbert 合作的名著《*Methods of Mathematical Physics*》英文版第一卷序言中所指出的,数学的"内在发展"曾导致它与物理科学的分裂,以致割裂了成长的生命之源,失去了理论方法上的整体性与统一性。他们的两卷著作,其目标正是为了弥补上述分裂,并试图使得那些来源于物理问题的数学方法纳入统一的数学理论。自此以后,"数学物理学方法"便成为物理学家与数学家们共同关注的重要领域。

值得重视的是,进入 20 世纪 70 年代后,Michael Reen 和 Barry Simon 已采用更近代的观点,即以泛函分析和算子谱论为起点,相继出版了多卷本的重要著作《*Methods of Modern Mathematical Physics*》(10 年中已出版 4 卷)。这套巨著几乎涉猎到了近代物理学的各个方面。

参照国外已有的文献信息情况,本书作者们积多年教学与科研成果,以线性和非线性泛函分析、经典与近代偏微分方程为工具,写出了这本具有自己特点的著作。本书除给出必要的理论与计算外,还着重讨论了当前十分活跃的近代数学物理课题,使用了

先进的计算机工具，并且注意到了理论、计算与可视化技术的有机结合。所以，这本书的主要特色便是集数学、物理与计算机技术于一体。

我个人认为这本书对国内广大数学物理科学工作者以及理工科研究生们是很有参考价值的。特别，用作高年级学生与研究生选修课教材，将是十分合适的。故乐愿为本书代作一序，并期望国内今后将会有更多的这类图书问世。

徐利治

2000年3月30日于北京

前　言

数学物理,顾名思义是介于数学与物理学之间的交叉学科,其重要性是显然的。而所谓近代数学物理则是以近代物理问题(广义的)为背景的近代数学理论和方法。在这方面,已有美国著名数学物理学家 Michael Reen 和 Barry Simon 的多卷本名著《*Methods of Modern Mathematical Physics*》陆续出版(已出版了四卷)。这套巨著以近代算子理论为工具,所论述的问题具体而充分,广泛而深刻。它的出版无疑对数学、物理学等众多学科领域将会产生重要而深远的影响。

本书自然无法与上述名著相提并论。我们不想也不可能在一本书中深入细致地讨论近代数学物理的各个方面,这也不是本书的初衷。相反,我们力求呈现给读者的是最基本最核心的部分。首先,我们讲述线性与非线性泛函分析,经典与近代数学物理方程,它们不仅本身就被视为近代数学物理的一部分,而且更是全面了解这一领域必备的数学工具。飞速发展的科学技术为数学物理带来了新气象,为了反映该学科的最新发展,在第二章中我们集中介绍了孤立子理论、分形理论和小波分析,它们是这个学科当前最活跃的几个课题。第三章先介绍两个最基本的算法——差分法和有限元法,接着突出讲述处理物理中随机现象的 Monte Carlo 方法和解非线性发展方程的反散射方法(IST)。第四章是关于上述理论和方法在几个具体物理问题中的应用,其中后半部分是作者近几年在处理热冲击下耦合场问题及用泛函方法讨论非线性发展方程方面的工作。为了在微机上使用最流行的C语言实现科学计算可视 化,第五章介绍了TurboC绘图的基本方法。第六、七章将可视化

技术应用于数学物理中，对一些具体问题我们不仅编写了源程序，还给出了二维或三维图形。

这里有两点需要说明，其一是考虑图形为内容服务的统一性，尽管前面章节中有些图形也是用本书方法绘制的，但并没有把它们放在最后一章。另一方面，由于在国内至今尚未见到近代数学物理专著问世，国内外把近代数学物理理论、计算与可视化技术结合成书也未多见。因此，缺乏可供参考的资料。尽管书中部分内容曾多次用作学生选修课教材，但因我们学识所限，加之初次尝试，缺点与疏漏一定不少，热诚欢迎同仁与读者批评指正。

最后，我们要对著名数学家徐利治先生表示谢意。徐先生对我们的写作给予了热情的关注与支持，提出了很多好的意见。尽管先生年事较高且学术活动又非常繁忙，但仍乐愿为本书作序。在拙作即将出版之际，我们要再次向徐先生表示诚挚的感谢！国防科技大学理学院蒋伯诚教授认真地审阅了全部手稿，提出了很多好的意见和建议，并亲自对某些章节进行了修改加工，对他这种在学术上认真严谨、一丝不苟的作风表示敬佩，对他为本书审校和组织出版中付出的辛勤劳动深表谢意。对阎博小姐和我们的一些学生在打印与校对书稿中做出的贡献一并表示感谢。

阎贵卿　阎　毅

2000 年 4 月 16 日

目　录

第一章　现代数学基础

近代数学物理涉及众多的现代数学分支,这里我们不想也不可能逐一做详尽介绍.我们仅能择其既主要又与本书相关的线性与非线性泛函分析、经典与近代偏微分方程等内容,并考虑阅读之便,对所选部分做尽可能详细的论述.

1.1　线性泛函分析

泛函分析是现代分析学的基础.它集分析、代数、几何的思想、理论和方法于一身,具有高度综合性和应用的广泛性特点.数学物理中的很多领域正是由于泛函分析的引入而趋现代化.

泛函分析又可分线性和非线性两部分.本节介绍线性泛函分析内容.

1.1.1　赋范线性空间

定义 1.1.1　设 E 是实的(或复的)线性空间,若 $\forall x \in E$,都有非负实数 $\|x\|$ 与之对应,且满足

(1) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;　　(1.1.1)

(2) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$;　　(1.1.2)

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;　　(1.1.3)

$x, y \in E$,则称 E 为赋范线性空间,$\|x\|$ 称为 x 的范数.上述三条称为范数公理,E 中元素常称作 E 中点.

由于实数的有序性,所以范数给出了空间中点一种可度量其大小的概念.因此赋范线性空间是距离(度量)空间.

定义 1.1.2　设 E 是赋范线性空间, $x_n, x \in E$, 若

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0 \tag{1.1.4}$$

则称点列 x_n 依范数收敛于 x,也称 x_n 强收敛于 x .

一般说,一个可以赋范的线性空间通常可以赋不止一个范数.一个线性空间如果赋予了两个范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$,这样就形成了两个赋范线性空间,分别记为 E_1, E_2 ,若存在正常数 c_1, c_2 ,使对任何 x 都有

$$c_1 \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant c_2 \| x \|_1$$

则称此二范数等价.可见关于等价范数下的收敛性亦等价.

定义 1.1.3　设 E 是赋范线性空间, $x_n \in E$,若 $\forall \epsilon > 0$,都有 $N(\epsilon)$(仅与 ϵ 有关的正整数),当 $m, n \geqslant N$ 时,有

$$\| x_n - x_m \| < \epsilon \tag{1.1.5}$$

则称 x_n 是 E 的基本列.若 E 的每个基本列都在 E 中收敛,则称 E 是完备空间.完备的赋范空间称为 Banach 空间.

例　$x(t) \in C[a,b]$, 定义范数

$$\| x \| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x(t) | \tag{1.1.6}$$

则 $C[a,b]$ 是 Banach 空间.

例　$x(t) \in L^P[a,b]$($P \geqslant 1$), 在其中定义

$$\| x \| = \left[\int_a^b | x(t) |^p \mathrm{d}t\right]^{1/p} \tag{1.1.7}$$

则 $L^p[a,b]$ 是 Banach 空间.

定义 1.1.4　称赋范线性空间 E 到赋范线性空间 E_1 的映射为算子.若映射是线性的,则称为线性算子,如微分算子、积分算子等.

常以 T 表示算子, $D(T)$、$R(T)$ 表示 T 的定义域和值域.对 $x_n, x \in D(T)$, $x_n \to x$ 时,就有

$$Tx_n \to Tx$$

则称算子 T 是连续的.

若 $\forall x \in D(T)$,有 $M > 0$,使

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \| \tag{1.1.8}$$

则称算子 T 是有界的,否则称算子是无界的.闭区间上的积分算子是有界的,$C^1[a,b]$ 上的微分算子是无界算子.特别称值域是数域的算子为泛函.

定理 1.1.1 (1)线性算子 T 若在某 $x_0 \in D(T)$ 连续,则必在 $D(T)$ 处处连续;(2)线性算子 T 的有界性与连续性等价;(3)线性算子 T 有界的充要条件是映有界集为有界集.

证明 以(1)为例.

$\forall x \in D(T)$,若 $x_n \to x$,则易见 $x_n - x + x_0 \to x_0$,由 T 在 x_0 连续,故 $T(x_n - x + x_0) \to Tx_o$,由 T 线性,就有

$$Tx_n - Tx + Tx_0 \to Tx_0$$

即 $Tx_n \to Tx$.

记 $B(E,E_1)$ 为 $E \to E_1$ 上全体有界线性算子构成的算子空间,其中范数定义为,$T \in B(E,E_1)$

$$\| T \| = \sup_{\| x \| \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| \tag{1.1.9}$$

此时 $B(E,E_1)$ 是赋范空间,特别当 E_1 是 Banach 空间时,$B(E,E_1)$ 亦是 Banach 空间.

下面我们不加证明地给出线性泛函分析中的三条基本定理.

定理 1.1.2(共鸣定理或一致有界定理) 设 E 是 Banach 空间,E_1 是赋范线性空间,$T_n \in B(E,E_1)$,则 $\forall x \in E$,$\{\| T_n x \|\}$ 有界的充要条件是 $\{\| T_n \|\}$ 有界.

定理 1.1.3(Banach 逆算子定理) 设 E,E_1 都是 Banach 空间,若 $T \in B(E,E_1)$ 是单射且满射,则 T 有逆 $T^{-1} \in B(E_1,E)$.

定理 1.1.4(Hahn - Banach 延拓定理) 设 E 是赋范线性空

间，$E_0 \subset E$是子空间，f是E_0上的有界线性泛函，则f可保范延拓到E上的泛函F

(1) $F(x) = f(x) \qquad \forall x \in E_0$（延拓条件）

(2) $\|F\|_E = \|f\|_{E_0} \qquad$（保范条件）

关于本定理，有两条有用的推论：

(1) E是赋范线性空间，$\forall x_0 \in E \setminus \{\theta\}$，必有$E$上有界线性泛函$f$，使得

$$f(x_0) = \|x_0\|, \|f\| = 1$$

(2) 设E, E_0如定理1.1.4，$\exists x_0 \in E$，且$d \triangleq \rho(x_0, E_0) > 0$，则必$\exists f$，使

$$f(x) = 0(x \in E_0), f(x_0) = d, \|f\| = 1$$

定义1.1.5　称赋范线性空间E上的全体有界线性泛函做成的空间为E的共轭空间，记为E^*. 当$E^* = E$（等距同构意义下）时，称E是自共轭的.

设$T \in B(E, E_1)$，$T^* \in B(E_1^*, E^*)$，若$\forall x \in E$，$\exists f \in E_1^*$，使得

$$(T^* f)(x) = f(Tx) \tag{1.1.10}$$

则称T^*为T的共轭算子或伴随算子. 特别当$T = T^*$时，称T是自共轭算子或自伴算子.

矩阵$(a_{ij})(1 \leqslant i, j \leqslant n)$的共轭算子是$(a_{ij})$，因此，对称矩阵是有限维的自伴算子.

下面我们介绍几种收敛概念.

设E是赋范线性空间，$x_n, x \in E$.

我们曾经指出$\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$为$x_n$按范数收敛于$x$，记为$x_n \to x$，此时也称$x_n$强收敛于$x$，常以$x_n \xrightarrow{s} x$记之.

$x_n, x \in E$，若$\forall f \in E^*$，有$f(x_n) \to f(x)$，则称x_n弱收敛于x，记为

$$x_n \rightharpoonup x(\text{弱}) \text{ 或 } x_n \xrightarrow{w} x \tag{1.1.11}$$

显然强收敛必弱收敛,反之则不然.

设 E, E_1 皆为赋范线性空间, $T_n, T \in B(E, E_1)$,若

$$\| T_n - T \| \to 0 \tag{1.1.12}$$

则称 T_n 一致(依范)收敛于 T: $T_n \xrightarrow{\text{一致}} T$.

若 $\forall x \in E$,都有

$$\| (T_n - T)x \| \to 0 \tag{1.1.13}$$

则称 T_n 强收敛于 T ,记为 $T_n \xrightarrow{s} T$.

设 $T_n, T \in B(E, E)$,若 $\forall f \in E^*$,有

$$f(T_n x) \to f(Tx) \tag{1.1.14}$$

则称 T_n 弱收敛于 T: $T_n \xrightarrow{w} T$.

虽然泛函是特殊的算子,但泛函列的收敛性概念还是有别于算子列的.

设 E 是赋范线性空间, $f_n, f \in E^*$, 若

$$\| f_n - f \| \to 0 \tag{1.1.15}$$

则称 f_n 强收敛于 f: $f_n \xrightarrow{s} f$.

若 $\forall x \in E$,有

$$f_n(x) \to f(x) \tag{1.1.16}$$

则称 f_n 弱*(*弱)收敛于 f: $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

关于 f_n 也有弱收敛概念: $\forall f^* \in E^{**}$(二次共轭空间), 有 $f^*(f_n) \to f^*(f)$.显然弱收敛蕴含弱*收敛.

在这一小节的最后,我们介绍算子谱的概念.众所周知,线性代数用较大的篇幅研究矩阵的本征值,微分方程和积分方程理论中也着重讨论了本征值问题,这种研究有两方面的重要性:

(1) 直接来自物理学与工程的需要.例如求振动的频率、判断系统的稳定性等都需研究算子的本征值分布.在量子力学里,能量算符是 L^2 空间上的一个自伴算子,其本征值对应着该系统约束态的能级.特别地,光谱就是某个算子的本征值的分布.

(2) 通过本征值或者更一般的谱的研究来了解算子本身的结构,从而用以刻画相应方程(算子方程)解的构造.例如,通过矩阵的本征值,刻画其不变子空间和标准形,彻底弄清相应齐次或非齐次方程解的结构.

设 E 是复 Banach 空间,算子 $A:D(A)\subset E\to E,\lambda\in C$ 称为 A 的本征值,是指 $\exists x_0\in D(A)\setminus\{\theta\}$,使得

$$Ax_0=\lambda x_0 \tag{1.1.17}$$

并称 x_0 为对应于 λ 的本征元.

由线性代数,当 $\dim E<\infty$ 时,$\lambda\in C$ 要么是本征值,要么 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在.

定义 1.1.6 设 E 是赋范线性空间,$T:D(T)\to E$,称集合

$$\rho(T)\underset{=}{\Delta}\{\lambda\in C\mid(\lambda I-T)^{-1}\in B(E,E)\} \tag{1.1.18}$$

为 T 的预解集,$\lambda\in\rho(T)$ 为 T 的正则值.

易见,当 $\dim E<\infty$ 时,$\lambda\in C$ 或是 T 的本征值,或是正则值,二者必居其一,但当 $\dim E=\infty$ 时,情况要复杂得多,具体定义如下:

(1) $(\lambda I-T)^{-1}$ 不存在,λ 为本征值;

(2) $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在,且 $(\lambda I-T)D(A)=E$,λ 为正则值;

(3) $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在,$R(\lambda I-T)\neq E=\overline{R(\lambda I-T)}$,$\lambda$ 为连续谱;

(4) $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在,$\overline{R(\lambda I-T)}\neq E$,$\lambda$ 为剩余谱.

记 $\sigma(T)=C\setminus\rho(T)$ 称为 T 的谱集,其中的点称作 T 的谱点.全体本征值记作 $\sigma_p(T)$,连续谱记作 $\sigma_c(T)$,剩余谱记为 $\sigma_r(T)$,因此有