

北京气象学院
学 术 论 文 集

JOURNAL OF BEIJING INSTITUTE OF METEOROLOGY

(1987)

气象出版社

地形和加热强迫下低阶模式中的 平衡态、分叉和突变

陆则慰 缪锦海*

提 要

本文研究了具有地形和连续季节变化热力强迫的低阶正压耗散系统的平衡态和平衡态的突变。由于地形、热力强迫和大气非线性运动的相互作用,随着热力强迫参数的连续季节变化,可以出现大气环流的多次季节性突变和副热带高压的北跳以及平衡态的分叉现象。对不同的地形,在不同的经向和纬向热力差异下,副热带高压可以出现不同类型的北跳和平衡态的分叉,北跳后副高向地形方向吸引。

一、引 言

在 Charney, J. G. 和 Devore, J. G. [1] 工作的基础上, 缪锦海、丁敏芳 [2] 讨论了在有加热强迫的正压低阶模式中的季节变化的突变理论, 得到了与事实比较一致的结果。但是, 在上述模式中, 没有地形强迫的影响, 只得到副热带高压 (简称副高) 二次突变的结果。在实际副高变化中, 有时出现三次突变的特征, 第一次跳跃使副高稳定在 20°N 附近, 雨区维持在江南地区, 然后出现第二次跳跃, 北跳到 $20-25^{\circ}\text{N}$, 长江流域出现梅雨, 再之出现第三次跳跃到 30°N 附近, 雨区出现在黄河流域和华北。为此, 我们的工作主要是研究在有地形和加热强迫作用下正压低阶模式中的平衡态、分叉和突变。进一步了解有地形和加热强迫作用与仅有加热强迫作用的正压低阶模式中的平衡态、分叉和突变的差异, 从而了解地形强迫的作用和副高季节变化的物理机理。

二、模 式

对于准地转大尺度运动, 有地形和加热强迫作用的正压耗散系统的方程为 [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi + f_0 \frac{h}{H} + \beta y) = -f_0 \frac{D_E}{2H} \nabla^2 (\psi - \psi^*) \quad (1)$$

ψ 为地转流函数, 模式取 β 平面近似, $\beta = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{a}$, $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$, Ω 是地球自转角速度, φ_0 是所考虑的正压通道的中心纬度, $-f_0 \frac{D_E}{2H} \nabla^2 \psi$ 是 Ekman 层摩擦所引起的涡汇, D_E 是 Ekman 层的标高。H 为均质大气高度, $h(x, y)$ 为下边界高度。 $f_0 \frac{D_E}{2H} \nabla^2 \psi^*$ 为某种动量源 (U, V) 所引起的涡源 ($\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$)。在斜压大气中, (U, V) 可为由加热场所引起的热成风。在本模式中, 可视为热力强迫作用 [1], [2]。

* 刘桂芬同志参加本文的部分工作。

将方程 (1) 无量纲化, 令 $t = f^{-1}t'$, $(x, y) = L(x', y')$, $(\psi, \psi^*) = L^2 f_0(\psi', \psi^{*'})$, $h = Hh'$, 代入方程 (1), 去掉 "′", 得到无量纲化的准地转涡度方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi + h) + \bar{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k \nabla^2 (\psi - \psi^*) = 0 \quad (2)$$

式中 $\bar{\beta} = \frac{L}{a} \text{ctg} \varphi_0$, a 为地球半径, L 是水平尺度, $k = D_E / 2H$.

边界条件: 在 $y = 0, \pi$ 处, 垂直于边界的流动为零, 即 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, 在 $y = 0, \pi$. 在 x 方向是以 2π 为周期的周期变化。

在上述边界条件下, 选取 Laplace 算子的正交归一特征函数的基函数来表示 ψ , ψ^* 和 h . 于是:

$$\begin{aligned} (\psi, \psi^*) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, \psi_i^*) F_i \\ h &= \sum_{i=1}^{\infty} h_i F_i \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{而 } J(F_i, F_k) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{i,j,k} F_i$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} b_{i,j} F_i$$

$$\text{其中 } C_{i,j,k} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dy \int_0^{2\pi} J(F_i, F_k) F_i dx$$

$$b_{i,j} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dy \int_0^{2\pi} F_i \frac{\partial F_i}{\partial x} dx$$

由 Jacobi 项的定义和边界条件, 可有 $C_{i,j,k} = -C_{k,i,j}$, $C_{i,j,k} = C_{i,k,j} = C_{k,i,j}$. 显然, $\nabla^2 F_i = -\lambda_i^2 F_i$, λ_i 为特征值. 且有边界条件: $\frac{\partial F_i}{\partial x} = 0$, 当 $y = 0, \pi$ 时. 利用这些性质, 可以把 (2) 式展开为谱形式:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \lambda_i^{-2} \sum_{j,k} C_{i,j,k} [(\lambda_j^2 - \lambda_k^2) \psi_j \psi_k - h_j \psi_k + h_k \psi_j] + \\ &+ \bar{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} \psi_j - k \lambda_i^2 (\psi_i - \psi_i^*) \end{aligned} \quad (4)$$

仍取六个基函数,

$$\begin{aligned} F_1 &= F_A = \sqrt{2} \cos y \\ F_2 &= F_K = 2 \cos nx \sin y \\ F_3 &= F_L = 2 \sin nx \sin y \\ F_4 &= F_C = \sqrt{2} \cos 2y \\ F_5 &= F_M = 2 \cos nx \sin 2y \\ F_6 &= F_N = 2 \sin nx \sin 2y \end{aligned} \quad (5)$$

则

$$\psi = \sum_{i=1}^6 \psi_i F_i = \psi_A F_A + \psi_K F_K + \psi_L F_L + \psi_C F_C + \psi_M F_M + \psi_N F_N \quad (6)$$

ψ^* 和 h 也有类似的展开式。 $\psi_A F_A$ 与 $\psi_C F_C$ 表示纬向基本气流。它们的组合可以表示不同季节的东西风急流位置和强度。 E_K , F_L 表示纬向 n 波、经向1波的扰动, F_M , F_N 表示纬向 n 波、经向2波的扰动。

(4)式的前六项具体表达式为

$$\dot{\psi}_A = -k(\psi_A - \psi_A^*) + h_{01} \psi_L \quad (7)$$

$$\dot{\psi}_K = -(\alpha_1 \psi_A - \beta_1) \psi_L - \delta_1 \psi_C \psi_N - k(\psi_K - \psi_K^*) \quad (8)$$

$$\dot{\psi}_L = (\alpha_1 \psi_A - \beta_1) \psi_K + \delta_1 \psi_C \psi_M - k(\psi_L - \psi_L^*) - h_{01} \psi_A \quad (9)$$

$$\dot{\psi}_C = \varepsilon(\psi_K \psi_N - \psi_L \psi_M) - k(\psi_C - \psi_C^*) + h_{02} \psi_N \quad (10)$$

$$\dot{\psi}_M = -(\alpha_2 \psi_A - \beta_2) \psi_N - \delta_2 \psi_C \psi_L - k(\psi_M - \psi_M^*) \quad (11)$$

$$\dot{\psi}_N = (\alpha_2 \psi_A - \beta_2) \psi_M + \delta_2 \psi_C \psi_K - k(\psi_N - \psi_N^*) - h_{02} \psi_C \quad (12)$$

这里

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{*1}}{5} &= \frac{\gamma_{*2}}{4} = \frac{\gamma_{*3}}{8} = \frac{8\sqrt{2}}{15} n \\ \alpha_1 &= \frac{n^2}{n^2+1} \gamma_{*1}, \quad \alpha_2 = \frac{n^2+3}{n^2+4} \gamma_{*2} \\ \delta_1 &= \frac{n^2}{n^2+1} \gamma_{*3}, \quad \delta_2 = \frac{n^2-3}{n^2+4} \gamma_{*3} \\ \varepsilon &= \frac{3}{4} \gamma_{*3} \\ \beta_1 &= \frac{n}{n^2+1} \frac{L}{a} \text{ctg} \varphi_0, \quad \beta_2 = \frac{n}{n^2+n} \frac{L}{a} \text{ctg} \varphi_0 \\ h_{01} &= \gamma_{*1} \frac{h_0}{2H}, \quad h_{02} = \frac{\gamma_{*3}}{4} \cdot \frac{h_0}{2H} \\ h_{*1} &= \frac{\gamma_{*1}}{n^2+1} \frac{h_0}{2H}, \quad h_{*2} = \frac{\gamma_{*3}}{n^2+4} \frac{h_0}{2H} \end{aligned} \quad (13)$$

三、地形和热力强迫下的多重平衡态及其稳定性

当运动达到定常平衡状态 $\overline{\psi_i}$, $\frac{d\overline{\psi_i}}{dt} = 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$ 。为了阐明表示大尺度地形作用和热力强迫作用随纬度, 经度和季节的变化, 令 $h = \frac{h_0}{2H} F_K$ 和 $\psi^* =$

$\psi_A^* F_A + \psi_C^* F_C + \psi_K^* F_K$, $\psi_M^* = \psi_N^* = \psi_L^* = 0$, 这样(7)~(12)式可以写成:

$$-k(\overline{\psi_A} - \overline{\psi_A^*}) + h_{01} \overline{\psi_C} = 0 \quad (14)$$

$$-b_1 \overline{\psi_L} - \delta_1 \overline{\psi_C \psi_N} - k(\overline{\psi_K} - \overline{\psi_K^*}) = 0 \quad (15)$$

$$-b_1\bar{\psi}_K + \delta_1\bar{\psi}_C\bar{\psi}_M - k\bar{\psi}_L - h_{a1}\bar{\psi}_A = 0 \quad (16)$$

$$\varepsilon(\bar{\psi}_K\bar{\psi}_N - \bar{\psi}_L\bar{\psi}_M) - k(\bar{\psi}_C - \bar{\psi}_C^*) + h_{02}\bar{\psi}_N = 0 \quad (17)$$

$$-b_2\bar{\psi}_N - \delta_2\bar{\psi}_C\bar{\psi}_L - k\bar{\psi}_M = 0 \quad (18)$$

$$b_2\bar{\psi}_M + \delta_2\bar{\psi}_C\bar{\psi}_K - k\bar{\psi}_N - h_{a2}\bar{\psi}_C = 0 \quad (19)$$

式中 $b_1 = \alpha_1\bar{\psi}_A - \beta_1$, $b_2 = \alpha_2\bar{\psi}_A - \beta_2$ 。

由于 (14) ~ (19) 式不能化成仅含一个 $\bar{\psi}$ 的高次方程, 这给求解带来很大难度。为此, 我们对于给定的一组 $\bar{\psi}_A^*$, $\bar{\psi}_K^*$, $\bar{\psi}_C^*$ 和 h_0/H 的值, 开始采用最速下降法迭代, 后采用牛顿法迭代来求解上述非线性方程组^[3], 得到多重的平衡态。

下面讨论平衡态的稳定性。采用小扰动法方法, 根据稳定性理论, 当由小扰动法所得的线性方程的所有特征值的实部都是负的, 即特征值实部最大值小于零 $\max \lambda_{r, \dots, 1} < 0$ 时, 则非线性方程 (7) — (12) 的平衡态是渐近稳定的; 而当 $\max \lambda_{r, \dots, 1} > 0$ 时, 则非线性方程组的平衡态是不稳定的。

下面给出了一个计算实例, 取 $k = 10^{-2}$, $L/a = 1/4$, $n = 2$, $h_0/H = 0.01$, $\bar{\psi}_A^* = 0.15$, $\bar{\psi}_K^* = -0.18$, $\bar{\psi}_C^*$ 从 0.50 到 -0.50。从表 1 (列出部分计算结果) 可以看出, 当 $|\bar{\psi}_C^*| \geq 0.4$ 时, 只有一个稳定的平衡态。当 $0.4 > |\bar{\psi}_C^*| \geq 0.1$ 时, 出现三个平衡态, 分别有二个或一个稳定态。当 $0.4 > |\bar{\psi}_C^*| \geq 0.25$ 有两个稳定态, 当 $0.25 > |\bar{\psi}_C^*| \geq 0.1$ 有一个稳定态。而稳定平衡态当 $\bar{\psi}_C^* > 0$ 为冬季环流型, 反之为夏季环流型。当 $|\bar{\psi}_C^*| < 0.1$ 有七个平衡态, 其中三个稳定平衡态。当 $\bar{\psi}_C^* > 0$ 时, 二个稳定平衡态为冬季环流型, 一个为夏季环流型。当 $\bar{\psi}_C^* < 0$, 二个稳定平衡态为夏季环流型, 一个为冬季环流型。显然, 大气环流的典型季节性稳定平衡态是冬季型环流和夏季型环流^[2]。

四、平衡态的分叉和突变

由于 $F_A = \sqrt{2} \cos y$, $F_C = \sqrt{2} \cos 2y$, $F_K = 2 \cos 2x \cdot \sin y$, 考虑热力强迫参数 $\bar{\psi}_A^*$, $\bar{\psi}_C^*$, $\bar{\psi}_K^*$ 。 $\bar{\psi}_A^* F_A$ 和 $\bar{\psi}_C^* F_C$ 分别表示南北方向的 1 波或 2 波不均匀热力强迫, $\bar{\psi}_K^*$ 的变化反映纬向 2 波热力强迫作用的强度^[2]。地形取 $h = \frac{h_0}{2H} F_K$ 。

1. 由冬到夏 (由夏到冬) 的三次突变

随着热力强迫 $\bar{\psi}_C^*$ 连续地改变 ($\bar{\psi}_A^*$, $\bar{\psi}_K^*$ 和 h_0/H 取定值), 即随着季节的变化^[2], 平衡态的个数和稳定性都会发生变化。图 1 是在 $\bar{\psi}_C^* - \bar{\psi}_C$ 的平面上表示表 1 的计算结果。为 $\bar{\psi}_A^* = 0.15$, $\bar{\psi}_K^* = -0.18$, $h_0/H = 0.01$ 条件下的平衡态集合图。在 $\bar{\psi}_C^* = 0.40$ 处流场只有一个稳定的冬季平衡态 $\bar{\psi}_C = 0.39656$, 即图 1 中的 A 点。当 $\bar{\psi}_C^*$ 从 0.4 连续变化到 0.25 时, $\bar{\psi}_C$ 将连续从 A 点变化到 D 点。当 $\bar{\psi}_C^*$ 稍微再减少一些时, 从 D 点跳到 E 点 (为冬季流型内的突变)。 $\bar{\psi}_C^*$ 从 0.25 变化到 -0.05, 即图上 E 点变化到 F 点, 流场仍保持

表1 多重平衡态及其稳定性

ψ_c^*	ψ_A	ψ_K	ψ_L	ψ_C	ψ_M	ψ_N	$\max \lambda_{real}$
-0.4	0.15225	0.00546	0.00187	-0.39656	0.00055	0.00182	-0.00965
-0.35	0.25314	-0.04210	0.08592	-0.31230	-0.01847	0.03601	-0.00209
	0.25018	-0.02719	0.08346	-0.30950	-0.01239	0.03499	0.00247
	0.15320	0.00564	0.00268	-0.34580	0.00066	0.00233	-0.00944
-0.25	0.21300	-0.08418	0.05248	-0.24911	-0.03534	0.02244	-0.00841
	0.18229	0.00767	0.02690	-0.23059	0.00171	0.01214	0.00902
	0.16161	0.00692	0.00967	-0.24060	0.00131	0.00528	-0.00580
-0.2	0.19122	-0.08962	0.03434	-0.21591	-0.03731	0.01519	-0.00911
	0.06133	-0.09422	-0.07387	0.01642	0.02151	0.00905	0.10108
	0.05580	-0.12990	-0.07847	0.00641	0.01429	0.00316	0.16140
-0.1	0.14812	-0.08909	-0.00157	-0.15023	-0.03634	0.00134	-0.00924
	0.07178	-0.06061	-0.06515	0.03096	0.01908	0.01338	0.01571
	0.05470	-0.14063	-0.07938	0.00255	0.00644	0.00122	0.17849
-0.05	0.13324	0.00015	-0.01396	-0.05490	-0.00093	-0.00222	-0.00639
	0.12717	-0.08380	-0.01902	-0.11809	-0.03362	-0.00491	-0.00908
	0.11219	-0.01022	-0.03149	-0.07419	-0.00498	-0.00851	0.01020
	0.08590	-0.05996	-0.05340	0.05302	0.02190	0.01393	-0.00595
	0.07901	-0.04288	-0.05914	0.03961	0.01493	0.01388	0.00970
	0.06526	-0.03149	-0.07059	0.01272	0.00637	0.00779	0.06142
	0.05454	-0.14244	-0.07952	0.00123	0.00316	0.00052	0.18136
0.0	0.13659	0.00133	-0.01117	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00841
	0.10669	-0.07472	-0.03608	0.08630	0.02916	0.01030	-0.00861
	0.10669	-0.07472	-0.03608	-0.08630	-0.02916	-0.01030	-0.00861
	0.09173	-0.02720	-0.04854	0.05504	0.01068	0.01283	0.01366
	0.09173	-0.02720	-0.04854	-0.05504	-0.01068	-0.01283	0.01366
	0.06305	-0.02715	-0.07243	0.00000	0.00000	0.00000	0.07278
	0.05449	-0.14301	-0.07957	0.00000	0.00000	0.00000	0.18226
:	:	:	:	:	:	:	:
0.4	0.15225	0.00546	0.00187	0.39656	-0.00055	-0.00182	-0.00965

$\psi_c = 0.05302$ 的冬季型平衡态。当 ψ_c^* 稍微减少一些, 从图上 F 点跳到 G 点, 由冬季流型图 2 (a) 突变为夏季流型图 2 (b), 西风带迅速北移, 出现副高第一次北跳, 脊线位于 27°N 附近; 当 ψ_c^* 再减少时, 原来稳定的平衡态消失, 跳到 H 点, 流型如图 2 (c), 副高第二次北跳, 副高脊线位于 37.5°N 附近。在北跳同时, 副高向西进, 强度明显增强, 槽脊系统明显西退。当 ψ_c^* 继续改变为 -0.35 时, 又一次发生突变, 由 I 点跳到 J 点, 出现副高第三次北跳, 脊线位于 42°N 附近, 见图 2 (d), (e)。三次突跳, 雨区分别类似出现在江南地区, 长江流域, 黄河流域和华北。

由夏到冬也有三次突变, 但是变化是不对称的。

2. 地形的作用与平衡态特征上的差异。

(1) 副高跳跃性的变化

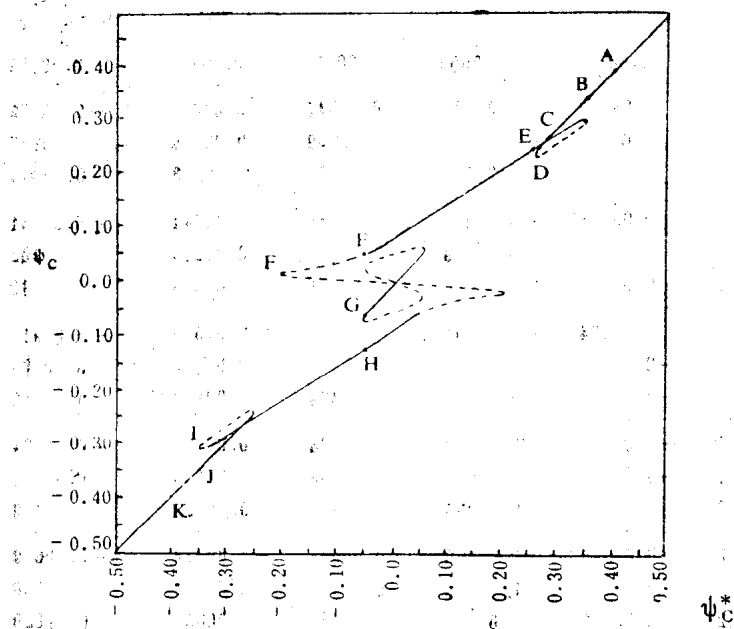


图1 在 $\psi_A^*=0.15$, $\psi_K^*=-0.18$,
 $h_0/H=0.01$ 条件下平衡态集合图
 (实线为稳定平衡态, 虚线为不稳定平衡态)

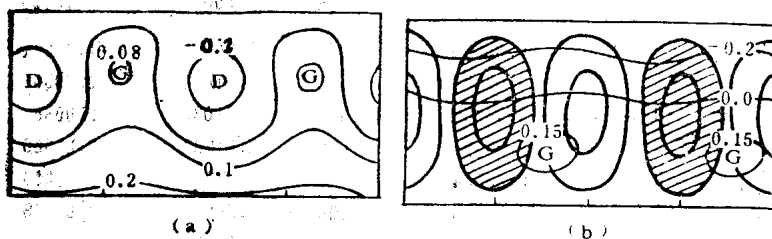
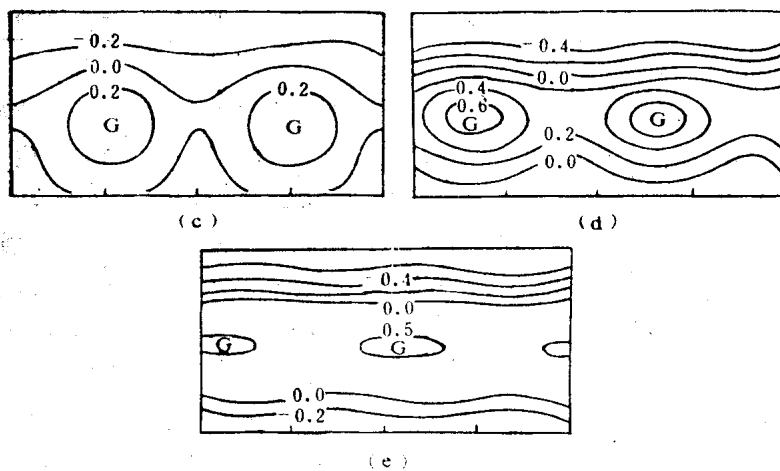


图2 在 $\psi_A^*=0.15$,
 $\psi_K^*=-0.18$, $h_0/H=0.01$ 副
 高三次北跳前后的流场
 (图中阴影部分为海洋)



(a) 副高第一次北跳前
 (b) 副高第一次北跳后, 第
 二次北跳前
 (c) 副高第二次北跳后
 ($x_C^*=-0.05$)
 (d) 副高第三次北跳前
 ($x_C^*=-0.35$)
 (e) 副高第三次北跳后

当热力强迫参数取相同的值时,而地形 h_0/H 取不同的值,出现不同类型的副高北跳现象。

当 $\psi_A^* = 0.15$, $\psi_K^* = 0.40$, ψ_c^* 从正到负改变时: h_0/H 分别取0.0, 0.0025时,出现二次副高北跳,第一次突变后的平衡态流型(图略)类似于初夏环流,长江流域入梅;而第二次突变后的流型类似于盛夏的环流,长江流域出梅; h_0/H 取0.005为副高一次强北跳,空梅情况; h_0/H 取0.01为副高一次弱北跳,只在出梅时出现,梅雨不明显^[2]。

(2) 平衡态分叉的出现

在不考虑地形影响时, $h_0/H = 0.0$ 时,平衡态并不出现分叉现象,如图3所示(即文献^[2]的情况)。我们通过大量计算发现,由于考虑了地形的影响,平衡态可以出现不同的分叉现象。如图1和图5所示。

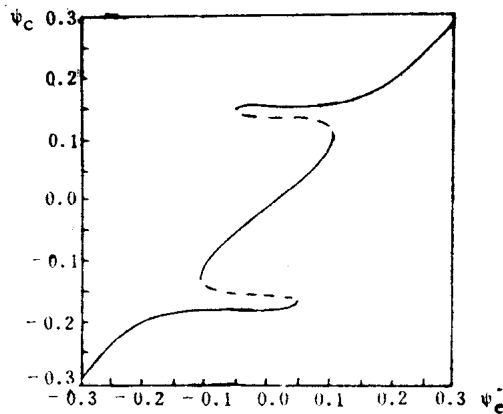


图3 在 $\psi_A^* = 0.15$, $\psi_K^* = 0.40$, $h_0/H = 0.00$ 条件下的平衡态集合图

(说明同图1)

(3) 平衡态不稳定性增加

由于地形的影响,我们从计算得到的平衡态集合图,如图1中可以看到,平衡态个数较之图3(无地形影响)增多,但主要是不稳定的平衡态增多,且不稳定性增加。如图1虽出现七个平衡态,其中四个为不稳定的,图3出现五个平衡态,只有二个为不稳定,而其余三个为稳定平衡态。图1中,从E到F同为冬季型平衡态,E到F为稳定的平衡态,而F到F'却为不稳定平衡态。

(4) 副高向有地形作用的方向吸引

比较没有地形作用与考虑地形作用后的流场,可以发现两者的副高位置有差异(图略)。在考虑地形的作用后,北跳后的副高向有地形作用的方向吸引(如图4所示)。

3. 地形作用下,热力强迫的影响

(1) 在无地形作用时,热力强迫参数 ψ_K^* 取正值或取负值,流场一样。当考虑地形作用时, $\psi_K^* > 0$ 与 $\psi_K^* < 0$ 的流场是不一样的。我们保持图1的其他参数,而取

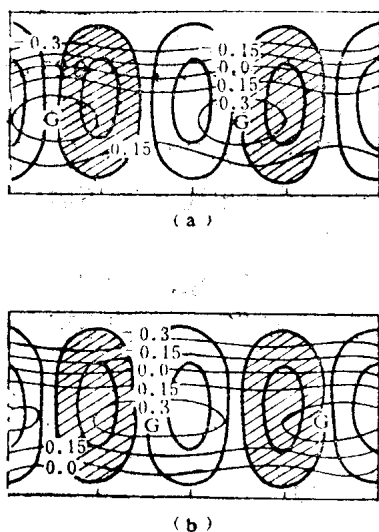


图4 副高一次弱前北跳(a)后(b)的流场
($\psi_A^* = 0.15$, $\psi_K^* = 0.40$, $h_0/H = 0.01$,
 $\psi_C^* = -0.20$)

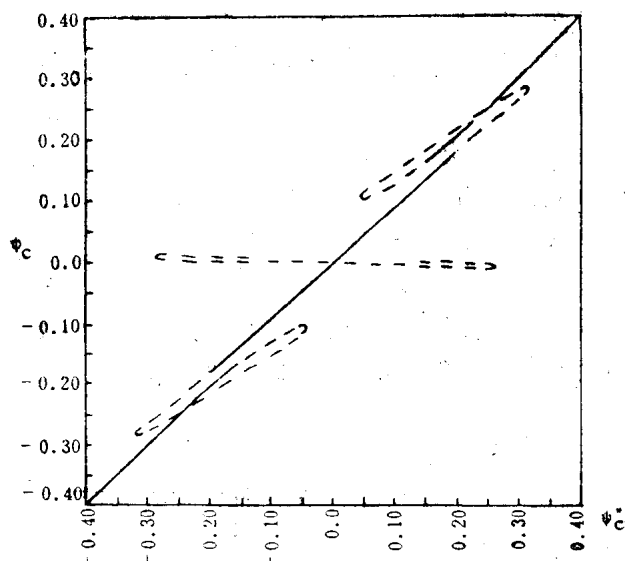


图5 在 $\psi_A^* = 0.15$, $\psi_K^* = 0.18$, $h_0/H = 0.01$ 条件下平
衡态集合图
(说明同图1)

$\psi_K^* = 0.18$, 则得到图5所示的平衡态集合图。与图1比较, 可明显地看出平衡态的分叉与突变的情况是有差异的, 且平衡态的个数也不相同。图5只有副高一次弱北跳, 平衡态个数最多只有五个, 其中稳定平衡态为一个或两个。

(2) 在地形作用下, 当 $\psi_K^* < 0$, ψ_K^* 取值变化对突变影响明显。若把图1中的 ψ_K^* 由 -0.18 改为 -0.20 , 则副高由三次北跳, 变为二次北跳, 即一次强跳与一次弱跳(图略)。

而 $\psi_K^* > 0$ 时, ψ_K^* 值变化则影响小。若把图4中的 ψ_K^* 由 0.18 改为 0.40 , 则仍为副高一次弱北跳(图略)。即稳定的平衡态几乎没有变化, 而不稳定平衡态略有变化。

根据我们所作的大量计算结果表明(图略), 当 $\psi_A^* < 0.1$ 或 $|\psi_K^*| < 0.1$ 的条件下, 没有副高北跳, 当 $h_0/H > 0.010$, $\psi_A^* \geq 0.1$ 而 $\psi_K^* \geq 0.1$ 的条件下, 不出现副高的二次北跳。也就是当 $\psi_K^* > 0$ 时至多只能引起一次副高弱北跳。而 $\psi_K^* < 0$, 才有可能出现副高的三次北跳。

五、结 语

从研究具有地形和加热强迫的低阶正压耗散系统的平衡态、分叉和突变中, 可以得到以下初步结果:

(1) 大气环流典型季节性平衡态为冬季型环流和夏季型环流。由于地形和加热强迫与大气非线性运动的相互作用, 在一定条件下, 随着热力强迫参数的季节性变化, 可

以出现大气环流的季节突变。由冬到夏可以出现三次副高北跳。

(2) 由于地形的影响, 平衡态出现分叉的现象, 北跳后的副高向地形方向吸引。而此时加热的差异对副高突变影响明显。

由于所用模式为正压模式, 取 β 平面近似, 地形比较低, 季节变化和副高北跳细致情况与事实还有差异, 有待于较复杂模式的研究。

参 考 文 献

- (1) Charney, J.G. and Devore, J.G., Multiple Flow Equilibria in the Atmosphere and Blocking, J. Atmos. Sci., 36, 1205—1216 (1979).
- (2) 缪锦海等, 热力强迫下大气平衡态的突变与季节变化、副高北跳, 中国科学B辑, 1, 87—96 (1985).
- (3) 冯康等, 《数值计算方法》, 国防工业出版社, (1978).

THE EQUILIBRIA, BIFURCATION AND CATASTROPHE OF THE LOW ORDER UNDER THE OROGRAPHICAL FORCING AND THERMAL FORCING

Lu Zewei Miao Jinhai

Abstract

This paper studies the abrupt change of equilibria state and the equilibria state of low-order, barotropical and dissipative system under the orographical forcing and thermal forcing that have successive seasonal variation. Owing to the orographical forcing, thermal forcing and nonlinear interaction of atmospheric motion, the atmospheric circulation appears several seasonal abrupt and northward jumpings of subtropical highs with the seasonal variation of the thermal forcing parameter. In various meridional and zonal thermodynamic differences for the various orographies, the subtropical highs can present different northward jumpings and bifurcation of the equilibria state. The subtropical highs, jumping northward, are attracted by the orographies.

大气系统广义Ляпунов稳定性 理论的应用

柳 崇 健

提 要

本文运用大气系统的广义Ляпунов稳定性判据分析了各种大气系统的稳定性特征, 特别解释了一些具有宏观热力学背景的大气运动方式。

一、引 言

由于大气系统的广义Ляпунов稳定性理论是相对于参考态来讨论大气运动的稳定性的^[1], 因此应用理论于具体天气系统的消长问题时, 必须首先解决当前的热力动力条件所确定的参考态问题。一旦参考态确定了, 则任何现时的运动只要是向参考态回归的, 这种运动就是稳定的,*反之, 若运动(继续)背离参考态, 即是不稳定的。原则上说, 这个参考态应是物理上的最可几态(或即实际大气出现的几率最大目态), 同时在数学上是扰动控制方程组的平凡解(零解)。我们知道, 目前要用数学物理方法确定参考态尚有困难, 因此在实际应用上为方便往往采用准参考态来讨论稳定性问题; 文献[1]采用的气候平均态即是其中一例。本文我们将针对各种系统在不同发展阶段的具体热力动力条件进行具体的稳定性讨论, 试图提供一个在实践中确定参考态的一般原则, 从而解决具体大气系统的演变方向问题。

二、热力学判据

按文献[1], 广义Ляпунов稳定性判据的热力学部分可写如

$$J_A < 0 \quad \Longleftrightarrow \text{(热力) 不稳定}$$

式中 $J_A \equiv \sum_i A_i$

$$\begin{aligned} &= \frac{c_v}{RT^2} \delta p \delta \vec{V} \cdot \nabla T - \delta \vec{V} \cdot \sum_i (\nabla s_i) \delta \rho_i + \frac{\delta p}{T} \operatorname{div} \delta \vec{V} \\ &+ \frac{c_v}{RT^2} \delta T \vec{V}_h \cdot \nabla \delta p - \sum_i \delta s_i \vec{V}_h \cdot \nabla_h \delta \rho_i - \delta C \delta (s_v - s_w) \end{aligned} \quad (1)$$

以下拟结合一些熟知的天气学观测事实逐项考察引起不稳定的物理条件。

1. 温度扰动平流项 (A_1)

由 $A_1 \equiv \frac{c_v}{RT^2} \delta p \delta \vec{V} \cdot \nabla T$ 显见, 凡暖平流 ($-\delta \vec{V} \cdot \nabla T > 0$) 处伴有升压 ($\delta p > 0$), 或相反, 在冷平流 ($-\delta \vec{V} \cdot \nabla T < 0$) 处伴有降压, 则这些地方相应物理量对参考态的

偏离将趋于增大（即 $A_1 < 0$ ，对应不稳定）。下面我们用于崩溃阶段的阻塞高压为例，来讨论这一大气系统的稳定性特征。

首先我们看到，由于稳定性借以考察的参考态是一个准定态或缓变态，稳定维持多日行将崩溃的阻高参考态，实际上很接近于由阻高形势所决定的准定常温压场。据此，我们将崩溃阶段的阻高分五个部分来分析各有关物理量的偏差符号（参见图1），结果如表1所示。

表1 行将崩溃的阻塞高压稳定性结构

	I	II	III	IV	V
δP	+	+	+	-	-
$\delta V [\delta U]$	0[0]	0[0]	0[0]	+	-
$\frac{\partial T}{\partial y} [\frac{\partial T}{\partial x}]$	≈ 0	$[\approx 0]$	≈ 0	-	-
A_1	S	S	S	S	U

注：S：稳定；U：不稳定；+：表示该项取正值；-：表示该项取负值；0：中性；I至V区参见图1

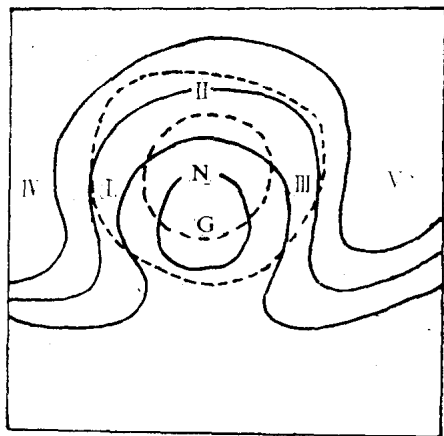


图1 阻高稳定性结构 (A_1)

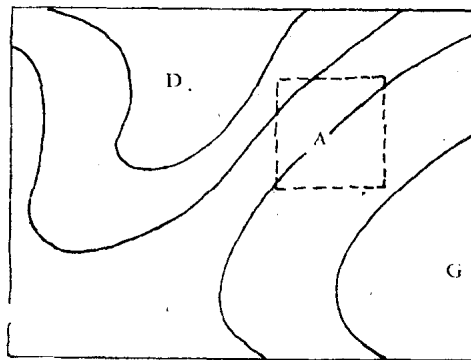


图2 西风带大槽的稳定性讨论 (A_1)

由表1可见，发展成熟的阻高本身是一个稳定的系统，同时它的西外围也是稳定的，因为该区上游低槽（ $\delta p < 0$ ）东移使气压梯度加大（从而 $\delta v > 0$ ）的同时，亦使暖平流得到加强，因而 δp 将不会继续加深。阻高的东外围就完全不同，那儿若有小槽出现使气压梯度加大（ $\delta v < 0$ ），则 A_1 的作用（此时 $A_1 < 0$ ）将使该槽不断发展加深。事实上，有些阻高崩溃或后退时，往往伴有东北侧小槽的发展和向下传播增长^[7]。顺便还可以指出，当东亚西风大槽东移遇到西太平洋副高时，常出现如图2那样的形势；

此时在图中槽前的A区气压梯度加大，风速增强： $\delta u > 0$ ，且由于 $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$ ，故此时 A_1 的符号取决于 δp ：在A区西部的低压区（ $\delta p < 0$ ），按我们的稳定性定义，那儿的 δp 将趋于减小，更远离参考态；而在A区的偏东部则是高压区（ $\delta p > 0$ ），那儿的 δp 值亦得减小，但更接近参考态。于是在这种温压场特征下，整个形势将表现出大槽继续东移，副高东退。

总之,判据中的每一项均可按上述讨论 A_1 的方式加以讨论,天气学为我们提供了极为丰富的稳定性例证,对判据的其余项发掘相应的温压湿风稳定性模型,将无实质困难,故以下为避免冗长的讨论,仅择一、两例作一概念性说明。

2. 扰动平流项 (A_2)

$$A_2 = -\delta \vec{V} \cdot \sum_i (\nabla s_i) \delta \rho_i$$

此项文献[1]已作了详细讨论,此处从略。

3. 扰动风散度项 (A_3)

$$A_3 = \frac{\delta p}{T} \text{div} \delta \vec{V}$$

A_3 表明,在(例如)低压区($\delta p < 0$)若有风速辐散($\text{div} \delta \vec{V} > 0$),则该区气压将更偏离参考态,系统失稳;反之反然。

众所周知,大气中任何一个发展中的低值系统(例如,台风)都具有这种特点。对(台风)系统体积分后的总体(全域)稳定性判据更突出了这一点:高层的辐散大于低层的辐合,即整个系统若有净辐散时,低值系统将趋于加深。

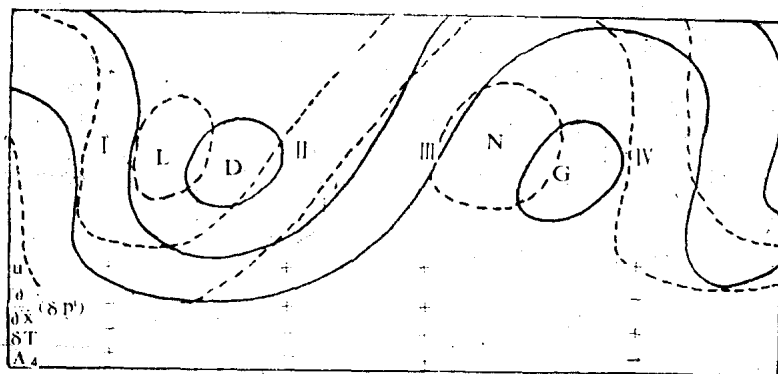


图3 中纬斜压长波的稳定性结构 (A_4)

4. 变压平流项 (A_4)

$$A_4 = \frac{c_p}{RT^2} \delta T \vec{V}_h \cdot \nabla \delta p$$

$A_4 < 0$ 的条件是 δT 与 $\vec{V}_h \cdot \nabla \delta p$ 异号,即,冷[暖]区有负[正]变压平流,该区将趋于失稳。

图3是典型的发展中温带西风带槽脊的温压场结构。从各因子在四个区的符号配置来看,槽、脊的东部(图中II,IV区)趋于不稳定,而槽、脊的西部(I,III区)则是稳定的。根据我们的稳定性含义,I区的低压将趋于减弱,而II区的低压则趋于加深,从而整个低槽将表现出东移。类似地,整个高脊也将有东移的趋势。II区低压的继续加深,反映低槽将移向该区,而III区的高压趋于减弱,则是向低压连续过渡所必需。这里我们看到了用稳定性理论即可以理解高空西风槽、脊的东传现象,而大可不必纠缠于运动形式究竟是波还是流的问题[2]。

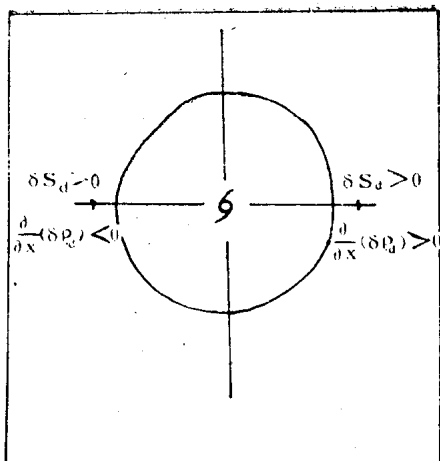


图4 台风稳定性讨论 (A_5)

考虑到台风系暖心低压系统即

$$\delta T > 0$$

及 $\delta p < 0$

从而有

$$\delta \rho_d < 0$$

这样,对于台风系统之紧上层大气而言,一方面保留了 $\frac{\partial}{\partial x}(\delta \rho_d)$ 的符号在东 (> 0) 西 (< 0) 部之差异,另一方面又受到较高层气流之引导,使得处东风带 ($u < 0$) 中台风西部不稳东部稳,即台风有西移的趋向;而在西风带 ($u > 0$) 中,台风有东移趋向。

综上所述,运用我们的广义稳定性理论可以对高空引导气流的机制作深入的理解。

6. 相变项 (A_6)

$$A_6 = -\delta C \delta(s_v - s_w)$$

这一项反映水汽相变(凝结)对稳定度的影响,代表一种广义化学反应的贡献:凝结时水汽减少转变成水滴 ($\delta C > 0$),如果凝结后的水滴仍然滞留在大气中,则由于 $\delta(s_v - s_w) = -\frac{L}{T^2} \delta T$, 于是在凝结增暖区 ($\delta T > 0$) 系统将趋于稳定;另一方面,

若凝结后的水滴即从云中降落(发展中的低值系统可作是观),则由于

$$\delta S_w > \delta S_v > 0 \quad (\delta T > 0 \text{ 时})^*$$

我们有

$$A_6 \leq -\delta C \delta S_v < 0$$

所以从非平衡热力学的角度看,降水有利于大气失稳。事实上,降水意味着有正熵从系统(开系)流向环境,或等效地说,环境有负熵流入系统;按Prigogine学派的耗散结

5. 变密平流项 (A_5)

$$A_5 = -\sum_r \delta s_r \vec{V}_h \cdot \nabla_h \delta \rho_r$$

我们先(用 A_5) 讨论台风在东、西风带中的移行问题。此时我们有:

$$A_5 \approx -\sum_r \delta s_r u \frac{\partial}{\partial x}(\delta \rho_r)$$

$$\approx -\left[\delta s_d u \frac{\partial}{\partial x}(\delta \rho_d) \right]$$

后一步近似系因在台风紧外围 δs_v , $\delta s_w \approx 0$ 。

由图4可见,对于台风东西两部分而言,由于 δs_d 一致大于零,因此定性上 A_5

即由 u 及 $\frac{\partial}{\partial x}(\delta \rho_d)$ 的符号决定。

* 因为 $\delta(S_w - S_v) = (C_w - C_p) \frac{\delta T}{T} + \frac{R}{p_v} \delta p_v > 0$, 这里的 p_v 为水汽压。

构理论^[6]，原则上说，只要给系统以足够的负熵流，就有可能使系统的热力学分支解失稳，从而跃迁到一个有序的结构，即耗散结构。

参考文献

三、动力学判据

下面讨论广义Ляпунов稳定性判据的动力学部分^[11]：

$$J_B < 0 \iff (\text{动力}) \text{ 不稳定,}$$

此中

$$J_B \equiv \sum_i B_i$$

$$= -\frac{\delta\rho}{T}\delta u[v(2\Omega\sin\varphi)] + \frac{\delta\rho}{T}\delta v[u(2\Omega\sin\varphi)]$$

即

$$+ \frac{\delta\rho}{T}\delta w[g - u(2\Omega\cos\varphi)] + \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\delta(\rho u)$$

$$+ \frac{1}{T}\frac{\partial v}{\partial y}\delta v\delta(\rho v) + \frac{1}{T}\frac{\partial v}{\partial x}\delta v\delta(\rho u) + \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial y}\delta u\delta(\rho v)$$

$$+ \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial z}\delta u\delta(\delta w) + \frac{1}{T}\frac{\partial v}{\partial z}\delta v\delta(\rho w) + \frac{1}{T}(\delta v)^2 \operatorname{div}\rho\vec{V}$$

$$+ \frac{1}{T}\delta\vec{V} \cdot \nabla\delta p + \frac{1}{T}\rho\vec{V}_h \cdot \nabla\frac{1}{2}(\delta v)^2$$

(2)

1. 水平地转项 ($B_1 + B_2$)

这两项文献[1]中已作讨论，此不赘述。

2. 重力项与垂直地转项 (B_3)

$$B_3 = \frac{\delta\rho}{T}\delta w(g - u2\Omega\cos\varphi)$$

• 由于在大气中，上升气流 ($\delta w > 0$) 多出现在低压 ($\delta p < 0$) 区，并且上升水汽凝结的潜热往往使那里的 $\delta T > 0$ ，故按态方程即有 $\delta\rho < 0$ ；反之，下沉运动 ($\delta w < 0$) 往往伴有密度升高 ($\delta\rho > 0$)。这样，我们就有 $B_{31} = -\frac{\delta\rho}{T}\delta wg < 0$ 。这种不稳定就是大气中熟知的释放动能的机制。

此外，我们知道，在大气中东风气流 ($u < 0$) 比西风气流 ($u > 0$) 容易失稳，这从 B_{32} 看亦是一目了然的。 B_{32} 可用以部分解释台风处在东风带中易于发展，而移入西风带则不易加强，甚而趋于减弱消失这一天气学事实。

3. 散度项 ($B_4 + B_5$)

$$B_4 + B_5 = \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\delta(\rho u) + \frac{1}{T}\frac{\partial v}{\partial y}\delta v\delta(\rho v)$$

先将这两项加以改写。

考虑到大气参考态总满足 $\operatorname{div}_h \vec{V}_h \approx 0$ ，

我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx -\frac{\partial v}{\partial y}$$

又，

$$\delta(\rho u) = \rho \delta u + u \delta \rho \approx \rho \delta u$$

这是因为 $O[u] = O[\delta u]$, 但 $O[\delta \rho] \ll O[\rho]$,
 O 表示量级。于是:

$$\begin{aligned} (B_4) + (B_5) &= -\frac{\rho}{T} \frac{\partial u}{\partial x} [(\delta u)^2 - (\delta v)^2] \\ &= -\frac{1}{T} \frac{\partial v}{\partial y} [(\delta u)^2 - (\delta v)^2] \end{aligned}$$

可见不稳定的情形出现在 $|\delta u| > |\delta v|$ 时有 u 辐合 ($\frac{\partial u}{\partial x} < 0$), 或 $|\delta v| > |\delta u|$ 时有 v 辐合 ($\frac{\partial v}{\partial y} < 0$) 的流场中。热带大型天气系统之一的赤道辐合带, 在北半球夏季自不活跃阶段向活跃阶段过渡时, 该辐合带两侧南北信风分量的辐合 ($\frac{\partial v}{\partial y} < 0$) 所引起的不稳定, 便是一个典型的天气学实例 (图略) [3]。

4. 旋度项 ($B_6 + B_7$)

$$B_6 + B_7 = \frac{1}{T} \frac{\partial v}{\partial x} \delta v \delta(\rho u) + \frac{1}{T} \frac{\partial v}{\partial y} \delta u \delta(\rho v)$$

该项讨论参见文献[1]。

5. 垂直动量交换项 ($B_8 + B_9$)

$$B_8 + B_9 = -\frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial z} \delta u \delta(\rho w) + \frac{1}{T} \frac{\partial v}{\partial z} \delta v \delta(\rho w)$$

这两项的物理含义相同, 现以 B_8 为例加以说明 (参见图 5)。

对于北半球, 因南北温度梯度的存在造成纬向基流随高度增加: $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$ 。此时若在 z 高度上有一个 u 的“正扰动”: $\delta u > 0$, 则上升运动 ($\delta w > 0$) 必然将低层的小动量带到高层 ($u_z > u_{z-1}$), 从而使 $\delta u (> 0)$ 减小。如是, 按照我们的稳定性定义, 由于 z 高度上的风速 ($u_z + [\delta u]_z$) 将向基本态 (参考态 u_z) 回归, 所以运动是稳定的 [$B_8 > 0$]。反之, 若 $\delta u < 0$, 则 $B_8 < 0$, z 高度上的风速将朝同一方向继续偏离参考态。由此可见, (B_8), (B_9) 描述了在基本气流不同的垂直分布下空气微团的垂直动量交换, 说明某一层上的 (纬向) 扰动可以从相邻另一层上的基本气流中吸取动量, 从而可使本来无规则排列的空气微团组织化; 反之反然。

下面我们用 B_8 对台风的移行问题作一简短考察。

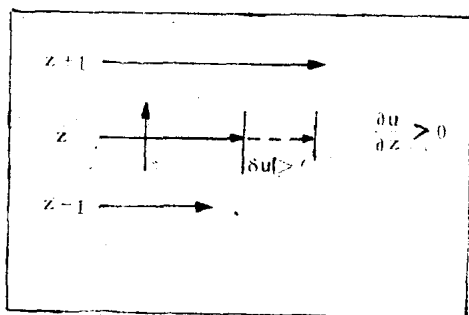


图5 垂直动量交换机制

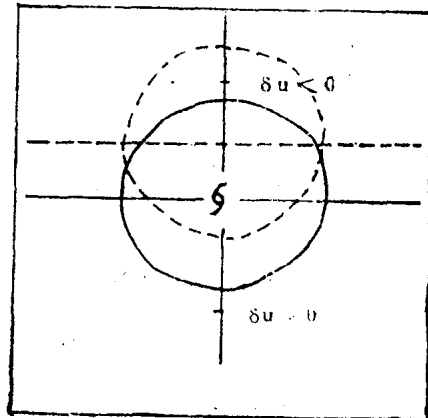


图6 台风移动与稳定性 (B_8 与 B_9)

由图6可以看出, 因为 $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\delta w > 0$ 及 $\delta u < 0$ [北部] 与 $\delta u > 0$ [南部], 故台风南部将趋于稳定 [$B_s > 0$], 而北部则是不稳定的 [$B_s < 0$]. 于是, 按稳定性定义, 北部的偏西风环流将继续加强, 北缘原先较弱的西风可能由于上述机理而逐渐加强到台风强度, 而原台风的南部边缘则向北收缩, 整个台风即表现出向北移动。类似地, 在 v 随高度增大的背景下, B_s 的作用使成熟台风趋于西移。而在台风北移进入西风带时, 由于那儿高空西风急流的存在未必保证 $\frac{\partial v}{\partial z} > 0$, 因而在 $\frac{\partial v}{\partial z} < 0$ 的地方, B_s 的贡献是趋于使行抵该纬度的台风折向东移。

我们在这里再一次看到了, 跟阻塞高压连续西退的过程相类似, 台风未必是作为一个系统实体而移动发展的。以前在讨论副热带高压的北跳问题^[4]时, 我们也指出了行星尺度副高移行的所谓唯象行为: 较高纬处的地理热汇随季节推移变成了热源, 从而在较高纬处强迫感生出一个 (相对) 高位势高度区, 那儿就是行星尺度副高的新的准平衡位置——副高并非从原来位置“跳到”这个新位置, 而是类似于阻高的不连续后退那样, 原副高“消失”, 新副高“产生”, 乃是一个新陈代谢过程。这些工作使我们深入认识到, 当我们说一个大气系统向 (例如) 北移动时, 事实上发生的不是该系统作为一个实体 (乃至刚体) 移向北方, 而是由于该系统的北部不稳 (广义李氏稳定性理论所定义的不稳), 从而使北部按该系统原有的偏离继续远离参考态。例如, 对于一个低气压系统, 这就是指它的北部及北外围的气压有继续加深的趋势。如果与此同时, 这同一系统的南部是稳定的, 那么系统南部将自外缘逐渐向北收缩, 甚至收缩到参考态以致使该部分作为一个低值系统的特征趋于消失, 于是在天气图上就表现出该系统向北“移动” (唯象的移动)。如果该系统南部并不是稳定的, 那么该系统就可能表现为整个系统范围在膨大或发展。可见本文提出的稳定性理论具有预报天气系统位置的潜力。例如, 按判据 (2) 计算现时刻台风及其环境场的稳定度, 便可望获得有关台风移向的信息。

6. 水平质量辐合项 (B_{10})

$$B_{10} = \frac{1}{T} (\delta V)^2 \operatorname{div}_h \rho \vec{V}$$

这一项的物理意义比较清楚。大气中亦存在大量伴有质量辐合 ($\operatorname{div}_h \rho \vec{V} < 0$) 的动能增长过程。

7. 变压梯度力作功项 (B_{11})

$$B_{11} = \frac{1}{T} \delta \vec{V} \cdot \nabla \delta p$$

B_{11} 代表 (扰动) 气压梯度力作功所引起的动能产生。这一项在大气动力学上亦是比较熟悉的, 凡是具有 (水平) 辐合的低值系统, 其中心部份的急速旋转, 除了角动量守恒原理起作用外, 主要系由气压梯度力作功使然。

8. 扰动动能平流项 (B_{12})

$$B_{12} = \frac{1}{T} \rho \vec{V}_h \cdot \nabla \frac{1}{2} (\delta V)^2$$

B_{12} 代表基本场对扰动动能的平流; 正动能平流 [$-\vec{V}_h \cdot \nabla \frac{1}{2} (\delta V)^2 > 0$] 将使局地扰动动能增加, 从而使该地趋于不稳 [$B_{12} < 0$]; 反之反然。