GAO DENG SHU XUE

高等数学（下）

中国人民解放军炮兵指挥学院

高 等 数 学

下 册

沈玉明
郭占宽　主　编
龙全贞

中国人民解放军炮兵指挥学院

书　名：高等数学（上、下册）

编著者：中国人民解放军炮兵指挥学院
印刷者：炮兵指挥学院印刷厂

开　本：850×1168 毫米　1/32
印　张：17.25
字　数：426 千字
版　次：1996 年 7 月第 1 版
印　次：1996 年 7 月（宣化）第 1 次印刷

目　　录

第六章　向量代数与空间解析几何

第七章　多元函数的微分法及其应用

第八章　重积分

第九章　曲线积分

第十章　无穷级数

第十一章　微分方程

第六章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，我们曾经通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从面可以用代数方法来研究几何问题．空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的．

正象平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的．

本章首先建立空间直角坐标系，引进在工程技术上有着广泛应用的向量，介绍向量的一些运算，并用向量作为工具讨论空间的平面和直线方程以及常见的曲面和曲线方程与图形．

第一节　空间直角坐标系　向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系．这种联系通常是用类似于平面解析几何的方法通过引进空间直角坐标系来实现的．具体讨论于下：

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位．这三条轴分别叫 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）；统称坐标轴．通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正方向要符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向

正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 6—1），图中箭头的指向表示 x 轴、y 轴、z 轴的正向．这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系．点 O 叫做坐标原点（或原点）．

三条坐标轴中任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面．x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面及 zOx 面．三个坐标面是两两垂直的平面．三个坐标面将空间划分成八个部分，称为八个卦限，其顺序规定如图 6—2 所示．

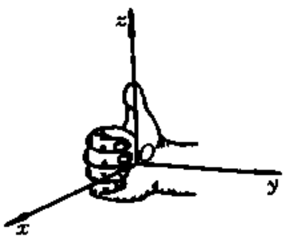

图 6—1

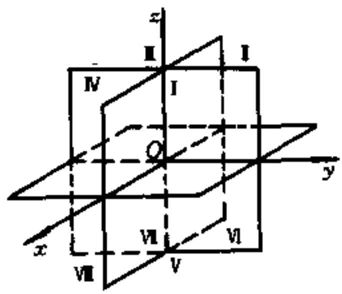

图 6—2

建立了空间直角坐标系以后，就可以建立空间点与数组之间的对应关系．

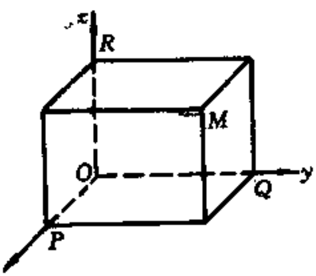

图 6—3

设 M 为空间内任一点，过点 M 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，相交于 P、Q、R（图 6—3），设 P、Q、R 三点分别在 x 轴，y 轴，z 轴上的坐标为 x，y，z，于是空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x，y，z)，反过来，任意给定一有序数组 (x，y，z)，依次在坐标轴 Ox、Oy、Oz 上取

坐标为 x、y、z 的点 P、Q、R，过这三点分别作垂直于坐标轴的平面，这三个平面的交点 M 就是空间对应于有序实数组(x,y,z)的点. 这样，空间的点 M 与有序数组(x,y,z)之间便建立了一一对应关系. 我们称(x,y,z)是点 M 的坐标，记为 M(x,y,z). x、y、z 分别称为 M 点的横坐标、纵坐标和竖坐标.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 如果点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，在 zOx 面上的点，$y=0$；在 xOy 面上的点，$z=0$. 如果点 M 在 x 轴，则 $y=z=0$；同样，在 y 轴上的点，$z=x=0$；在 z 轴上的点，$x=y=0$. 如点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

二、空间两点间的距离

已知空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则 M_1、M_2 间的距离为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

证：如图 6—4，$|PR|=|x_2-x_1|$，$|QR|=|y_2-y_1|$.

故 $|M_1S|=|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，而 $|M_2S|=|z_2-z_1|$，由 $Rt\triangle M_1SM_2$ 得

$$\begin{aligned}|M_1M_2| &= \sqrt{|M_1S|^2+|M_2S|^2}\\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.\end{aligned}$$

特殊地，点 M (x, y, z) 与原点 O (0, 0, 0) 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　在 z 轴上求与两点 A (−4, 1, 7) 和 B (3, 5, −2) 等距离的点.

解　因为所求的点在 z 轴上，所以设该点为 M (0, 0, z)，依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

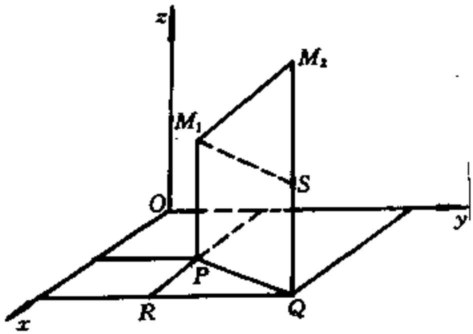

图　6—4

即
$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边平方去根号，解得　$z=\frac{14}{9}$.

所以，所求的点为 $M\left(0,\ 0,\ \frac{14}{9}\right)$.

三、向量及其线性运算

（一）向量的基本概念

在自然科学里所遇到的量可分为两种：一种是只有大小的量，叫做数量．如时间、温度、距离、体积、质量等．另一种是不仅有大小而且还有方向的量，这种量叫做向量．如位移、速度、加速度、力等．

向量的表示法　向量可以用有向线段表示，有向线段的方向表示向量的方向，其长度表示向量的大小，也叫向量的模．以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，用符号 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示，它的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$．有时也用粗体字母或带箭头字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$ 的模也用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\vec{a}|$ 来表示，如图 6—5.

零向量与单位向量　模等于零的向量称为零向量，记为 0 或

$\vec{0}$，零向量没有确定的方向，也可以说它的方向是任意的，模等于 1 的向量称为单位向量.

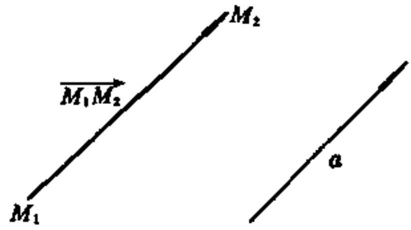

图 6—5

自由向量 实际中有许多向量常常是与起点无关的，与起点无关的向量在保持长度和方向不变的条件下可以自由平行移动，这种向量称为自由向量. 我们只研究自由向量.

向量相等 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 如果它们的模相等，彼此平行且指向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 注意两个向量不能比较大小.

负向量 与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

（二）向量的线性运算

向量的线性运算是指向量的加法、减法及向量乘以常数这三种运算. 物理学中力的合成就是向量的加法的例子.

1. 向量的加法

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 OACB，取对角线 $\overrightarrow{OC}$，它也表示一向量，记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$（图 6—6），我们称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量的和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

由于平行四边形的对边平行且相等，所以也可以作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，就得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，（图 6—7）这一方法叫做向量加法的三角形法则. 这个法则

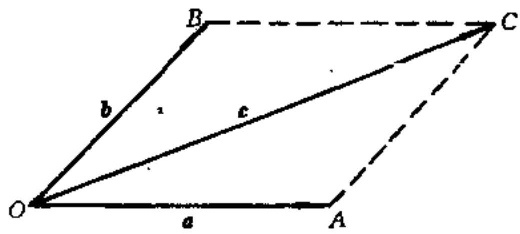

图　6—6

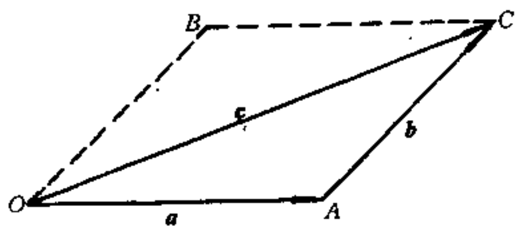

图　6—7

可以推广到多个向量的求和.

向量加法满足以下的运算规律:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (交换律);

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (结合律);

(3) $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

2. 向量的减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 的差. 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移到共同起点, 则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (图 6—8).

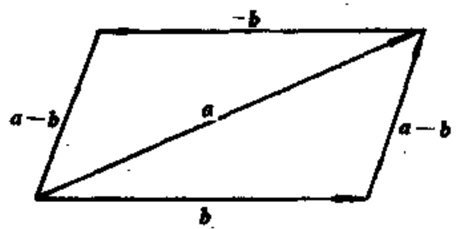

图 6—8

3. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与数量 λ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\lambda|$ 的乘积，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，它是零向量.

向量与数的乘法满足以下规律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$（结合律）；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$（对数量的分配律）；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$（对向量的分配律），

其中 λ，μ 为实数.

由向量与数的乘法可推出：

1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

2) 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

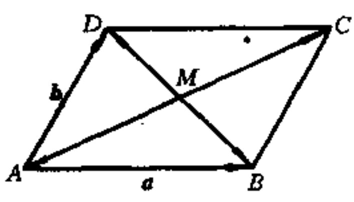

图 6—9

例 2　在平行四边形 ABCD 内，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图 6—9）.

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM},$$

即 $$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$， 所以$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$， 所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

习题 6—1

1. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$$A\ (3,\ 4,\ 0);\ B\ (0,\ 4,\ 3);$$
$$C\ (3,\ 0,\ 0);\ D\ (0,\ -1,\ 0).$$

2. 过点 P_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

3. 在 x 轴上求点 P，使它到点 A（−3，2，−2）的距离是 3.

4. 在 yOz 面上求与三个已知点 A(3,1,2)、B(4,−2,−2)和 C(0,5,1)等距离的点.

5. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

6. 用向量方法证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.

第二节　向量的坐标

用几何方法研究向量的好处是可以作图，有明显的直观性，缺点是不便于计算. 为此，需要建立向量与有序数组之间的对应关系，使向量的运算脱离对几何作图的依赖，从而使向量的研究"代数化". 这可借助于向量在坐标轴上的投影来实现.

一、向量在轴上的投影

设向量$\overrightarrow{AB}$与轴 u 正向间的夹角为 φ ($0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)，过 A 点和 B 点分别作平面垂直于轴 u，设垂足分别为 A′和 B′（图 6—10），那么，在 u 轴上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值 A′B′是一个实数，当$\overrightarrow{A'B'}$与 u 的指向相同时，它的值 A′B′为正，否则为负. 我们把有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值 A′B′叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影，记作

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A'B'}=A'B'.$$

轴 u 叫做投影轴.

关于向量的投影，有下面两个定理：

定理 1　向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦：

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

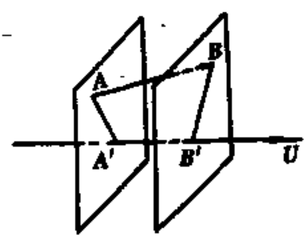

图　6—10

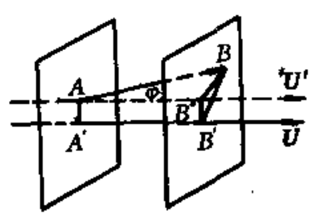

图　6—11

证　如图 6—11，通过向量$\overrightarrow{AB}$的始点 A 引轴 u′，使 u′与轴 u

平行且具有相同的正方向，那末轴 u 和向量$\overrightarrow{AB}$的夹角 φ 等于轴 u′和向量$\overrightarrow{AB}$的夹角，而且有

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'}\,\overrightarrow{AB}.$$

但

$$\mathrm{Prj}_{u'}\,\overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

所以

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

向量在轴上的投影是一个数量，当 φ 为锐角时，投影为正；当 φ 为钝角时，投影为负；当 φ 为直角时，投影为 0. 容易看出，相等的向量在同一轴上的投影相等.

定理 2　有限个向量的和在轴上的投影等于各个向量在该轴上的投影的和，即

$$\mathrm{Prj}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \mathrm{Prj}a_1 + \mathrm{Prj}a_2 + \cdots + \mathrm{Prj}a_n.$$

证明略.

二、向量的坐标

设有一起点在原点 O，终点为 M（x，y，z）的向量$\overrightarrow{OM}$，过 M 点作与 x、y、z 轴垂直的平面，垂足分别为 A、B、C，如图 6—12，则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

若沿 x、y、z 轴的正向分别取单位向量，记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称为基本单位向量，则$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$ 称为向量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的分量，其中 x、y、z 是向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的投影，于是

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式或投影表示式. 记为$\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$. 而 x、y、z 称为向量$\overrightarrow{OM}$的三个坐标.

对于任一向量 $\boldsymbol{a}$，设起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，$\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 a_x, a_y, a_z，则

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

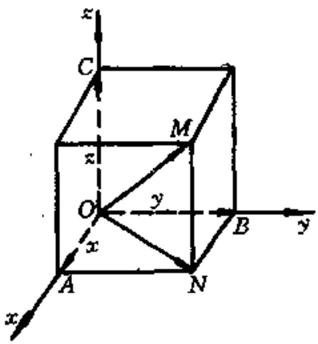

图　6—12

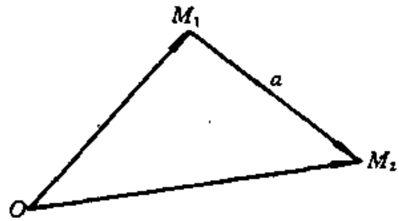

图 6—13

$$= (x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$
$$= (x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$
$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

这是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$. 其中 a_x，a_y，a_z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ 表明向量的坐标等于它终点的坐标减去它起点的坐标.

显然，若给定一向量 $\boldsymbol{a}$，其在三个坐标轴上的投影 a_x，a_y，a_z 也必须是确定的. 反之，给定了三个坐标轴上的投影也必然确定唯一的向量. 这样，有序数组 $\{a_x, a_y, a_z\}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 就建立了一一对应关系.

注意：向量在坐标轴上的分向量与向量在坐标轴上的投影(即向量的坐标)有本质区别.向量在坐标轴上的投影是三个数 a_x、a_y、a_z，而向量在坐标轴上的分向量是三个向量 $a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$.

三、坐标表示的向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，λ为实数.

则　$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$$= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}$$
$$= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$
$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$$
$$= \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}$$
$$= \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

例 1　已知 $\boldsymbol{a}=\{2, -3, 5\}$，$\boldsymbol{b}=\{3, 1, -2\}$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解　$3\boldsymbol{a}=\{6, -9, 15\}$，$2\boldsymbol{b}=\{6, 2, -4\}$

$$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} = \{6-6, -9-2, 15+4\}$$
$$= \{0, -11, 19\}.$$

四、向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量既可以用它的模和方向来表示，也可以用它的坐标来表示，下面讨论两种表示间的关系.

设一非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 与三条坐标轴正向夹角分别为 α, β, γ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi, 0\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$，则 α, β, γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 则称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，通常用方向余弦表示向量的方向.

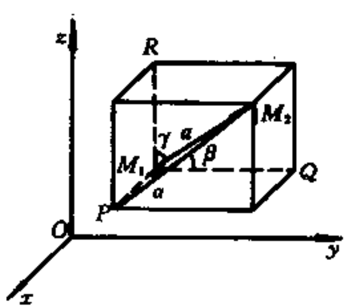

图　6—14

由定理 1 得

$$a_x = |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha;$$
$$a_y = |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta = |\boldsymbol{a}|\cos\beta;$$
$$a_z = |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

由图 6—14 可看出，

$$|\boldsymbol{a}| = \overrightarrow{M_1M_2}$$
$$= \sqrt{|M_1P|^2 + |PM_2|^2}$$