

国家自然科学基金资助项目

进 化 算 法

云庆夏 编著

北 京

冶金工业出版社

2000

内 容 简 介

进化算法是一种新兴的搜索寻优技术。它根据生物中遗传与进化的原理,仿效基因、染色体等物质表达所研究的问题,遵循达尔文“物竞天择,适者生存”原则,使随机生成的初始解通过复制、交换、突变等遗传操作不断迭代进化,逐步逼近最优解。从实质上讲,进化算法是生物科学与工程技术相结合的一门边缘学科。目前,它已成为继专家系统、人工神经网络之后有关人工智能学科的第三个研究热点。

进化算法包括遗传算法、遗传规划、进化策略、进化规划4种方法。本书分别介绍它们的基本知识、基本理论及实施技术。全书共分5章,分别为绪论、遗传算法、遗传规划、进化策略、进化规划。

本书论述深入浅出,先从简单的示例介绍每种算法的原理,然后深入讨论它们的基本理论及应用技术。书中图文并茂,便于自学,适合工程技术人员、科研人员阅读,也可作为大专院校的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

进化算法/云庆夏编著. —北京:冶金工业出版社

2000.5

ISBN 7-5024-2574-8

I. 进… II. 云… III. 遗传工程-计算方法
IV. Q78-32

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第16903号

出版人 卿启云(北京沙滩高祝院北巷39号,邮编100009)

责任编辑 田 锋 美术编辑 熊晓梅 责任校对 白 迅 责任印制 牛晓波

北京源海印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2000年5月第1版, 2000年5月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32; 6.5印张; 174千字; 199页; 1-2500册

18.00元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64044283

冶金书店 地址:北京东四西大街46号(100711) 电话:(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前 言

1859年达尔文创立的进化论,曾经作为生物界以及人类文明史上的一个里程碑,促进了科学技术的发展。20世纪60年代以来,生物学的进化论又被推广应用于工程技术,形成一种新型的计算方法——进化算法(Evolutionary Algorithms),又称进化计算(Evolutionary Computation)。

进化算法仿效生物学中进化和遗传的过程,遵从“生存竞争,优胜劣汰”的原则,从一组随机生成的初始可行群体出发,借助复制、交换(重组)、突变等遗传操作,逐步逼近所研究问题的最优解。从实质而言,进化算法是一种具有自适应调节功能的搜索寻优技术。

目前,进化算法已成为继人工智能专家系统、人工神经网络之后的又一个受人青睐的新学科。在美国、德国、法国等发达国家,它已被成功地用于机械、化工、建筑、计算机等领域,着重用于解决结构性优化、非线性优化、并行计算等复杂问题。近10年来,进化算法在我国也得到重视和推广,特别是遗传算法,已成功用于许多领域中。

通常,进化算法包括遗传算法(Genetic Algorithms)、遗传规划(Genetic Programming)、进化策略(Evolution Strategies)、进化规划(Evolutionary Programming)4种典型方法。它们在进化原则上是一致的,但是在实施进化的手段上却各有特点,互不相同。尽管国内对遗传算法已有一些论著,但是缺乏对进化算法进行全面、深入阐述的普及性书籍。作者根据自己多年从事进化算法的教学和科研成果,特别是在国家自然科学基金项目 No. 59874019 的资助下,编写本书,力求向我国广大科学技术工作者全面介绍进化算法,为我国科技事业发展添砖加瓦。

本书共分5章,即

1. 绪论。在简单介绍生物学中有关进化与遗传概念的基础

上,扼要描述进化算法的特征,并进行历史的回顾与展望。

2. 遗传算法。在详细介绍遗传算法原理的基础上,讨论遗传算法的基本理论——模式理论,进而全面论述遗传算法的各种实施技术。

3. 遗传规划。在详细介绍遗传规划工作原理及基本技术的基础上,讨论遗传规划常遇见的一些理论问题,进而论述遗传规划的一些最新技术。

4. 进化策略。先介绍进化策略的原理,然后详细论述其基本技术,进而分析有关进化策略的理论问题。

5. 进化规划。先介绍进化规划的原理,然后详细论述其基本技术,最后综合比较 4 种进化算法。

本书由西安建筑科技大学云庆夏编写,陈永锋、卢才武、侯煜参加部分章节编写,卢少华、高文伟校阅全稿。

由于作者学识有限,本书肯定有不足之处,恳请广大专家及读者批评指正。

作 者

2000 年 1 月

目 录

1 绪言	1
1.1 生物的进化与遗传	1
1.1.1 生物的进化	1
1.1.2 遗传物质	1
1.1.3 遗传方式	2
1.2 进化算法简介	2
1.2.1 遗传算法简介	2
1.2.2 遗传规划简介	6
1.2.3 进化策略简介	8
1.2.4 进化规划简介	10
1.3 进化算法的特征	10
1.3.1 进化算法的实质	10
1.3.2 进化算法的主要特征	12
1.3.3 进化算法的生物学含义	14
1.4 进化算法的发展与应用简介	15
1.4.1 进化算法的发展简介	15
1.4.2 进化算法的应用简介	20
2 遗传算法	22
2.1 遗传算法的基本原理	22
2.1.1 编码	22
2.1.2 产生初始群体	24
2.1.3 计算适应度	26
2.1.4 复制	27
2.1.5 交换	31
2.1.6 突变	33
2.1.7 终止	36
2.2 遗传算法的表述	37

2.3	模式理论	39
2.3.1	基本概念	39
2.3.2	遗传过程的模式数目及模式定理	42
2.3.3	模式定理示例	46
2.3.4	构造块	48
2.3.5	隐并行机理	51
2.4	遗传算法的实施技术	53
2.4.1	编码	53
2.4.2	适应度	57
2.4.3	复制和选择	65
2.4.4	交换	68
2.4.5	突变	70
2.4.6	群体规模	72
2.4.7	次要算子	77
2.4.8	连续型遗传算法	79
3	遗传规划	84
3.1	遗传规划的原理	84
3.1.1	遗传算法的局限性	84
3.1.2	遗传规划的工作原理	85
3.2	遗传规划的表述	90
3.3	遗传规划的基本技术	93
3.3.1	问题的表达	93
3.3.2	初始群体的生成	95
3.3.3	适应度计算	98
3.3.4	基本算子	101
3.3.5	终止	112
3.3.6	结果标定	114
3.3.7	示例	115
3.4	遗传规划的理论分析	121
3.4.1	模式理论	121

3.4.2	交换的作用	123
3.4.3	基因内区	128
3.5	遗传规划的新进展	135
3.5.1	程序结构	135
3.5.2	自动定义函数	140
3.5.3	模块类算子	144
4	进化策略	148
4.1	进化策略的基本原理	148
4.1.1	$(1+1)$ -ES	148
4.1.2	$(\mu+1)$ -ES	149
4.1.3	$(\mu+\lambda)$ -ES 及 (μ,λ) -ES	150
4.2	进化策略的基本技术	151
4.2.1	问题的表达	151
4.2.2	初始群体的产生	153
4.2.3	适应度计算	154
4.2.4	重组	154
4.2.5	突变	156
4.2.6	选择	158
4.2.7	终止	159
4.3	进化策略的表述	160
4.4	进化策略的理论分析	162
4.4.1	$(1+1)$ -ES 的理论分析	162
4.4.2	(μ,λ) -ES 的理论分析	165
4.4.3	坐标旋转	176
4.5	进化策略与遗传算法的比较	178
4.5.1	相同	178
4.5.2	差别	179
4.5.3	相互借鉴	180
5	进化规划	182
5.1	进化规划的基本原理	182

5.1.1	标准进化规划	182
5.1.2	元进化规划	183
5.1.3	旋转进化规划	184
5.2	进化规划的基本技术	184
5.2.1	表达方法	184
5.2.2	产生初始群体	185
5.2.3	计算适应度	185
5.2.4	突变	185
5.2.5	选择	186
5.2.6	终止	187
5.3	进化规划的表述	188
5.4	进化规划的理论分析	190
5.4.1	q -竞争选择	190
5.4.2	收敛率	193
5.5	进化规划与进化策略的比较	195
5.5.1	相同	195
5.5.2	差别	195
5.6	进化算法综述	196
参考文献		199

1 绪 论

1.1 生物的进化与遗传

进化算法(Evolutionary Algorithms)通常包括遗传算法(Genetic Algorithms)、遗传规划(Genetic Programming)、进化策略(Evolution Strategies)和进化规划(Evolutionary Programming)。它们都是借鉴生物界中进化与遗传的机理,用于解决复杂的工程技术问题。因此,我们先回顾生物学中进化与遗传的概念,以便以后深入讨论各种进化算法。

1.1.1 生物的进化

地球上的生物,都是经过长期进化而形成的。根据达尔文的自然选择学说,地球上的生物具有很强的繁殖能力。在繁殖过程中,大多数生物通过遗传,使物种保持相似的后代;部分生物由于变异,后代具有明显差别,甚至形成新物种。正是由于生物的不断繁殖后代,生物数目大量增加,而自然界中生物赖以生存的资源却是有限的。因此,为了生存,生物就需要竞争。生物在生存竞争中,根据对环境的适应能力,适者生存,不适者消亡。自然界中的生物,就是根据这种优胜劣汰的原则,不断地进行进化。

进化算法就是借用生物进化的规律,通过繁殖-竞争-再繁殖-再竞争,实现优胜劣汰,一步一步地逼近问题的最优解。进化算法中的“进化”二字,就是由此而冠名。

1.1.2 遗传物质

众所周知,细胞是生物结构和功能的基本单位,细胞通常由细胞膜、细胞质与细胞核三部分组成。细胞核位于细胞的最内层,由核膜、染色质、核液三者组成,是遗传物质贮存和复制的场所。

细胞核中的染色质,在细胞分裂时形成光学显微镜下可以看见的染色体。染色体主要由蛋白质和DNA组成。DNA 又称脱氧

核糖核酸,是一种高分子化合物,组成它的基本单位是脱氧核苷酸。DNA 可以传递遗传信息。生物上下代之间传递遗传信息的物质,称作遗传物质。绝大多数生物的遗传物质是 DNA。由于细胞里的 DNA 大部分在染色体上,因此,遗传物质的主要载体是染色体。

控制生物遗传的物质单元称作基因,它是有遗传效应的 DNA 片段。每个基因含有成百上千个脱氧核苷酸。它们在染色体上呈线性排列,这种排列顺序就代表遗传信息。

在进化算法中,为了形成具有遗传物质的染色体,就用不同字符组成的字符串表达所研究的问题。这种字符串相当于染色体,其上的字符就相当于基因。

1.1.3 遗传方式

生物的主要遗传方式是复制。遗传过程中,父代的遗传物质 DNA 分子被复制到子代,以此传递遗传信息。

生物在遗传过程中还会发生变异。变异方式有 3 种:基因重组、基因突变和染色体变异。基因重组是控制物种性状的基因发生重新组合。基因突变是指基因分子结构的改变。染色体变异是指染色体在结构上或数目上的变化。

进化算法中,仿效生物的遗传方式,主要采用复制、交换(重组)、突变这 3 种遗传操作,衍生下一代的个体。

1.2 进化算法简介

1.2.1 遗传算法简介

为了说明遗传算法的实质,本节以函数极值的求解过程为例。

设自变量介于 $0 \sim 31$,求其二次函数的最大值,即

$$\max f(x) = x^2 \quad x \in [0, 31] \quad (1-1)$$

当然,利用简单的代数运算,我们可以求出该问题的解为 $x = 31$ 。现在改用遗传算法求解。遗传算法通常包括下述工作:

(1)编码。遗传算法首先要用字符串表达所研究的问题,这称作编码。表达问题的字符串相当于遗传学中的染色体。每个字符

串称作个体。每一遗传代次中个体的组合称作群体。为了便于计算机操作,通常字符串长度固定,字符用二进制码或为 0,或为 1。

本例中,用二进制数表示 x 值。由于 x 的最大值(31)只需 5 位二进制数,所以利用 5 位二进制数组成个体。

(2)形成初始群体。遗传算法中,常用随机的方法产生初始群体,即随机生成一组任意排列的字符串。群体中个体的数目通常也是固定的。

本例中,采用随机产生的方法,假设得出拥有 4 个个体的初始群体,即: 01101、11000、01000、10011。它们的 x 值相应为: 13、24、8、19(见表 1-1)。

表 1-1 遗传算法的第 0 代

个体编号	初始群体	x_i	适应度 $f(x_i)$	$f(x_i)/\Sigma f(x_i)$	$f(x_i)/\bar{f}$	下代个 体数目
1	2	3	4	5	6	7
1	01101	13	169	0.14	0.58	1
2	11000	24	576	0.49	1.97	2
3	01000	8	64	0.06	0.22	0
4	10011	19	361	0.31	1.23	1
总计 $\Sigma f(x_i)$			1170			
平均值 $\bar{f}$			293			
最大值 $f_{\max}$			576			
最小值 $f_{\min}$			64			

(3)计算适应度。衡量字符串(染色体)好坏的指标是适应度(Fitness),它通常也就是遗传算法的目标函数。适应度是今后优胜劣汰的主要判据。

在本例中,适应度比较简单,用 x^2 计算。当 x 值为 13、24、8、19 时的适应度分别为:169、576、64、361(表 1-1 第 4 列)。

表 1-1 中还列举当前适应度的总和 $\Sigma f(x_i)$ 及平均值 $\bar{f}$,即

$$\Sigma f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = 1170$$

$$\bar{f} = \Sigma f(x_i)/4 = 293$$

表 1-1 中第 6 列的 $f(x_i)/\bar{f}$ 表示每个个体的相对适应度,它反映个体之间的相对优劣性。例如,2 号个体的 $f(x_i)/\bar{f}$ 值最高(1.97),为优良个体;而 3 号个体最低(0.22),为不良个体。

(4)复制(Reproduction)。为了将已有的群体变为下一代群体,遗传算法仿效进化论中“自然选择,适者生存”的原则,从旧群体中选择优良个体予以复制,直接进入下一代群体。选择的依据是个体适应度的大小,适应度大的个体接受复制,使之繁殖;适应度小的个体则予删除,使之死亡。

本例中,根据相对适应度 $f(x_i)/\bar{f}$ 的大小对个体进行取舍。2 号个体性能最优($f(x_i)/\bar{f} = 1.97$),予以复制繁殖。3 号个体性能最差($f(x_i)/\bar{f} = 0.22$),将它删除,使之消亡。表 1-1 第 7 列表示传递给下一代的个体数目,其中 2 号个体占 2 个,3 号个体为 0 个,1 号及 4 号个体仍保持为 1 个。

这样,就产生下一代新群体,如表 1-2 所示。新群体的 4 个个体分别是 01101、11000、11000、10011。从表 1-2 第 4 列可以看出,复制后产生的新一代群体,其平均适应度 $\bar{f}$ 明显增加,由原来的 293(表 1-1)增至 421(表 1-2)。造成平均适应度增加的原因有二:一是淘汰原来最差的个体,使最小适应度由原来的 64(表 1-1)增至 169(表 1-2);另一个原因是增加优良个体(2 号)的个数,使适应度累计值增加。因此,复制体现优胜劣汰原则,使群体的素质不断得到改善。

表 1-2 遗传算法的复制与交换(第 1 代)

个体编号	复制初始群体	x_i	复制后适应度 $f(x_i)$	交换对象	交换位置	交换后群体	交换后适应度 $f(x_i)$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	01101	13	169	2 号	3	01100	144
2	11000	24	576	1 号	3	11001	625

续表 1-2

个体编号	复制初始群体	x_i	复制后适应度 $f(x_i)$	交换对象	交换位置	交换后群体	交换后适应度 $f(x_i)$
3	11000	24	576	4 号	2	11011	729
4	10011	19	361	3 号	2	10000	256
总计 $\Sigma f(x_i)$			1682				1754
平均值 $\bar{f}$			421				439
最大值 $f_{\max}$			576				729
最小值 $f_{\min}$			169				256

(5)交换(Crossover)。通过复制产生的新群体,其总体性能得到改善,然而却不能产生新的个体。为了产生新个体,遗传算法仿照生物学中杂交的办法,对染色体(字符串)的某些部分进行交叉换位。被交换的母体都选自经过复制产生的新一代个体(优胜者)。

本例中,利用随机配对的方法,决定 1 号和 2 号个体、3 号和 4 号个体分别交换,如表 1-2 第 5 列所示。再利用随机定位的方法,确定这两对母体交叉换位的位置分别从字符串左数第三位字符及第二位字符之后。例如,3 号及 4 号个体如下式左侧所示,交换始于字符串左数第 2 位之后,交换开始的位置称交换点,用“:”标记,所得的新个体如右侧所示:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{父代 1: } 11 : 000 \\ \text{父代 2: } 10 : 011 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{子代 1: } 11 : 011 \\ \text{子代 2: } 10 : 000 \end{array} \right\}$$

至于 1 号、2 号个体交换结果如表 1-2 第 7 列所示。

表 1-2 中最后一列表示交换后群体的适应度。从表中可以看出,交换后出现优异个体 3 号,其适应度高达 729,大大高于交换前的最大值(576)。与此同时,平均适应度也从原来的 421 提高到 439,说明交换后的群体正朝优良方向发展。

(6)突变(Mutation)。遗传算法模仿生物学中基因突变的方法,将个体字符串某位符号进行逆变,即由 1 变为 0 或由 0 变为 1。例如,下式左侧的个体于第 3 位突变,得到新个体如右侧所示:

$$\{ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \rightarrow \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \}$$

遗传算法中,个体是否进行突变以及在哪个字符突变,都由事先给定的概率决定。通常,突变概率很小,约为 0.01,本例的第一代中就没有发生突变。

(7)终止。反复执行上述(3)~(6)项工作,直至得出满意的最优解。

通过上述函数极值求解的例子可以看出,遗传算法仿效生物进化和遗传的过程,从随机生成的初始可行解出发,利用复制、交换、突变等操作,遵循优胜劣汰的原则,不断循环执行,逐渐逼近全局最优解。

1.2.2 遗传规划简介

遗传算法是用字符串作为染色体去表达所研究的问题,而且字符串的长度常常是固定的。然而,现实中的问题往往很复杂,有时不能用简单的字符串表达问题的所有性质,于是就产生了遗传规划。遗传规划用广义的计算机程序形式表达问题,它的结构和大小都是可以变化的,从而可以更灵活地表达复杂的事物性质。

现以曲线拟合为例,说明遗传规划的基本原理。设图 1-1 的曲线表示某种实验的观测结果,现在要用遗传规划确定该实验结果的函数关系 $y = f(x)$ 。传统的曲线拟合,先要确定方程的结构形

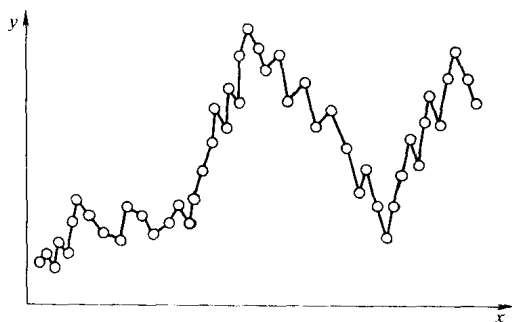


图 1-1 曲线拟合

式：或线性形式、对数形式，或多项式等，然后再进行参数估计。采用遗传规划时，可以将结构估计和参数估计融合在一起。遗传规划的工作过程大致如下：

(1) 确定表达结构。遗传规划用可变的层状计算机程序结构表达问题。这种广义的计算机程序结构通常由两部分组成：一为函数集 F ， F 包括 $+$ 、 $-$ 、 $*$ 、 $/$ 、 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\log$ 、 $\exp$ 、 $\uparrow$ ……等运算符号；另一为终止符集 T ， T 包括变量 x 和随机数 A 、 B 、 C ……等。遗传规划中的个体(染色体)将随机地由上述函数及终止符组成，例如：

$$A + B * x \quad \text{或} \quad B * \exp(A/\sin x) \cdots \cdots$$

(2) 形成初始群体。采用随机选取的方法，从函数集 F 及终止符集 T 中随机选择函数及其相应的终止符，组成下述 4 个个体：

$$\text{个体 1: } y = A + B * x$$

$$\text{个体 2: } y = A + B * x + C * x^2$$

$$\text{个体 3: } y = x * \sin x$$

$$\text{个体 4: } y = C * x * \sin x$$

尽管初始形成的个体不符合实际，但在以后的进化计算中会不断改进，逼近实际所需要的形式。

(3) 计算适应度。将不同的实验数据 x_i 代入上述 4 种初始表达式中，得出一组计算值 $\hat{y}_i$ 。将计算所得的 $\hat{y}_i$ 与实验数据 y_i 相比较，计算两者之差，然后用误差衡量 4 种初始表达式的优劣。假设第 3 个表达式最佳，第 1 个表达式最差。

(4) 复制。根据优胜劣汰的原则，复制效果最佳的第 3 个表达式，淘汰效果最差的第 1 个表达式。于是，新一代的群体由下述表达式组成：

$$\text{个体 1: } y = x * \sin x$$

$$\text{个体 2: } y = A + B * x + C * x^2$$

$$\text{个体 3: } y = x * \sin x$$

$$\text{个体 4: } y = C * x * \sin x$$

(5) 交换。为了产生新的表达式，需要使用交换。采用随机选

择的方法,假设第 2 和第 3 个表达式进行交换,交换位置在第 1 项,则新的表达式为:

$$\text{个体 1: } y = x * \sin x$$

$$\text{个体 2: } y = x + B * x + C * x^2$$

$$\text{个体 3: } y = A * \sin x$$

$$\text{个体 4: } y = C * x * \sin x$$

(6) 突变。遗传规划也可采用突变产生新个体。例如,将表达式中的 $\sin x$ 变为 $\cos x$ 。不过,遗传规划中的突变远不及在遗传算法中那样重要。

(7) 终止。反复执行上述(3)~(6)项工作,使函数表达式 $y = f(x)$ 不断变化,逐渐逼近所要求的表达式。

从上述曲线拟合的简单例子可以看出,遗传规划和遗传算法相类似,都是从随机产生的初始群体出发,同样用适应度衡量个体优劣,都采用复制、交换、突变等操作,经过一代一代的优胜劣汰,逐步得出最优的数学表达式。

遗传规划和遗传算法的差别,主要在问题的表达方式上。后者用定长的字符串,前者则是形式可变的计算机程序结构。很明显,遗传规划的表达式更加灵活多变,适用于复杂的课题。应该指出,遗传规划(Genetic Programming)可直译为遗传程序设计,它以计算机程序的层次结构形式表达问题,而绝不是执行遗传算法的计算机程序,为了避免误会,本书称作遗传规划。

1.2.3 进化策略简介

进化策略是最早出现的一种进化算法。它用传统的实型数表达问题,其表达形式如下:

$$X^{t+1} = X^t + N(0, \sigma) \quad (1-2)$$

式中 X^t —— 用实数表示的第 t 代个体;

X^{t+1} —— 用实数表示的第 $t + 1$ 代个体;

$N(0, \sigma)$ —— 独立的随机数,服从正态分布,后者的数学期望为 0,标准差为 σ 。

请注意,习惯上常用 $\sim N(0, \sigma^2)$ 表示正态分布。本书采用

$N(0, \sigma)$ 表示一个服从正态分布的随机数。

式(1-2)表明,新一代的个体 X^{t+1} 是在父代个体 X^t 的基础上添加一个随机量 $N(0, \sigma)$ 。因此,每个个体由 X 及 σ 两个变量决定,是一个二元组 (X, σ) 。

进化策略中个体的进化主要采用突变,即对随机量中的标准差进行修正:

$$\begin{cases} \sigma' = \sigma \cdot e^{(N(0,1))} \\ X' = X + N(0, \sigma') \end{cases} \quad (1-3)$$

式中 (X, σ) —— 父代个体;

(X', σ') —— 子代个体。

这就是说,新一代的 X' 是在上一代的 X 基础上添加一个微小的随机量 $N(0, \sigma')$,后者服从数学期望为 0、标准差为 σ' 的正态分布。新一代的标准差 σ' 又是在上一代标准差 σ 的基础上乘以一个微小的随机量 $\exp(N(0,1))$ 。

在进化策略中,产生新个体的另一种方法是重组(Recombination),它相当于遗传算法的交换。最简单的重组是随机交换两个个体的 x_i 及 σ_i 。例如,设有两个个体如下:

个体 1: $(X^1, \sigma^1) = ((x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1), (\sigma_1^1, \sigma_2^1, \dots, \sigma_n^1))$

个体 2: $(X^2, \sigma^2) = ((x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2), (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2))$

重组后的子代个体为:

新个体: $(X, \sigma) = ((x_1^{q_1}, x_2^{q_2}, \dots, x_n^{q_n}), (\sigma_1^{q_1}, \sigma_2^{q_2}, \dots, \sigma_n^{q_n}))$

(1-4)

其中 q_i 随机地或为 1,或为 2。

在进化策略中,复制隐含在选择(Selection)中。父代群体所有的 μ 个个体,经过突变、重组后生成 λ 个新个体,然后再从这些群体中按适应度选择 μ 个优良个体组成下一代群体,从而体现个体在竞争中的优胜劣汰原则。

同样,进化策略也是一个反复迭代的过程,它从随机产生的初始群体出发,经过突变、重组(交换)、选择等进化操作,改进群体的质量,逐渐得出最优解。