现代数学基础丛书

# 拓扑空间论

● 高国士 著

科学出版社

## 内 容 简 介

本书是作者在一般拓扑学研究生教材的基础上修改和补充而成的，是拓扑空间理论方面的专著.

全书共八章. 前四章是拓扑空间论的基础知识. 后四章是一般拓扑学两大课题“覆盖性质”与“广义度量空间”的深入研究，介绍了国内外，特别是我国学者在这方面的成果. 为了读者深入理解本书内容，在每章后安排了大量的习题.

本书适合于高等学校高年级教师与学生、研究生阅读.

**图书在版编目（CIP）数据**

拓扑空间论/高国士著. －北京：科学出版社，2000
（现代数学基础丛书）
ISBN 7-03-008144-7

Ⅰ.拓… Ⅱ.高… Ⅲ.拓扑空间 Ⅳ.O189. 11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 72838 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000 年 7 月第 一 版　开本：850×1168 1/32
2000 年 7 月第一次印刷　印张：12 3/4
印数：1—2 500　字数：330 000

**定价：25.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

# 序

本书是作者 1979 年开始招收一般拓扑学硕士研究生以来所用教材经过历年修改、补充而成，是拓扑空间理论方面的专著.

本书前四章是拓扑空间论的基础知识，自成体系. 可供需要了解拓扑空间论基础知识的数学系高年级学生及其他有关学科学生阅读. 后四章是一般拓扑学中两大课题——“覆盖性质”与“广义度量空间”——的深入研究，希能导向该课题的研究前沿，可作为一般拓扑学的硕士、博士研究生的教材或参考书.

作者在 60 年代初致力于“覆盖性质”与“广义度量空间”的研究，特别在 70 年代、80 年代间这方面的研究在国内外蓬勃开展，作者身历其境，有必要，也有责任在介绍、评述国外学者成果时，组织、纳入国内学者的成果以激励士气，共攀科学高峰.

由各种不同背景产生的形形色色的拓扑空间呈分散、孤立的状态是很自然的. 通过适当的映射，找出其间内在联系，改变其呆滞状态使之出现生动活泼场面是行之有效的. 充分利用映射这一“工具”是本书的特点. 事实上本书是 Arhangel'skii “映射与空间”理论的发展与应用.

为了集中精力于上述两课题并由于作者知识有限，一般拓扑学的其他课题如基数函数、箱拓扑、集论公理的引用等均未涉及. 与上述二课题有联系的可膨胀空间、$\Sigma$积的正规性等问题有蒋继光的专著《一般拓扑学专题选讲》作专门研究，本书也未涉及. 相应的有关论文均未录入参考文献.

在严谨的逻辑推导的同时，适当照顾可接受性. 对书中久未引用的概念，常以回忆方式提一下以便阅读.

习题是精心配置的. 有巩固教材的，有补充、扩充教材的，

有些是定理证明要用到的简单结果，有些是分散在教材各处的类似概念的汇集，可资比较. 对教材中很少出现的概念（如正则闭集、紧开拓扑），配些简单练习让读者熟悉一下. 有少数较难的，如证不出知道这结果也好（有兴趣的读者可查所引论文）.

作者才疏学浅，耄耋著书. 希能嘉惠后学而已. 脱漏、不足之处，海内同行，不吝指正.

陈必胜、葛英副教授及张建平、蔡伟元、杨晓华、蒋彤敏同志抄写、校对、复印全部稿件，恽自求教授组织、安排整个出版事宜，谨此致谢. 特别感谢苏州大学数学系的资助. 不然，本书难以和读者见面的.

高国士

1999年6月

于苏州大学数学科学学院

# 目　录

# 预 备 知 识

## §1. 集、关系和映射

两个**集**(set)$A$、$B$ 的**并**(union)、**交**(intersection)及**差**(difference)分别表示为:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或} x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且} x \in B\},$$
$$A - B = \{x: x \in A \text{ 且} x \notin B\}.$$

这里"$\in$","$\notin$"分别表示"**属于**"、"**不属于**".**空集**用$\varnothing$表示,$A \cap B = \varnothing$表示集 $A$ 与集$B$ 不交;$A - B = \varnothing$表示 $A \subset B$,也就是 $x \in A \Rightarrow x \in B$.符号"$\Rightarrow$"表示"蕴含".符号"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当".$A \subset B$ 时称为$A$ 是$B$ 的**子集**(subset).如果 $A \subset B$ 且$A \neq B$ 称为$A$ 是$B$ 的**真子集**(proper subset),空集是任何集的子集.

以集为元素的集称为**集族**,或简称为**族**(family 或 collection),用花体字母表示,如 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 等.为了表示集族常利用**指标集**(index set),例如集族$\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$,或写作$\{A_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$,这里 $\Gamma$ 是指标集.由集组成的序列$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$为集族的特例,这时可表示为$\{A_n\}_{n \in N}$,或写作$\{A_n: n \in N\}$,这里指标集是自然数集 $N$,或省去指标集记为$\{A_n\}$或$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.集族的并、交可表示为$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{A}_\gamma$、$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{A}_\gamma$;在集的序列情况则为$\bigcup\limits_{n \in N} A_n$(或$\bigcup_{n=1}^{\infty} An$),$\bigcap_{n \in N} A_n$(或$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$).

设$\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$是$X$ 的子集族,$B$ 是$X$ 的子集,则下列等式成立:

(i) $$B \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (B \cup A_\gamma),$$
$$B \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (B \cap A_\gamma).$$

(ii) $$X - (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (X - A_\gamma),$$

$$X - (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(X - A_\gamma).$$

(i)称为**分配律**,(ii)称为 de Morgan **公式**.在通常讨论时,所涉及的集都是某一给定集 $X$ 的子集,则对 $B\subset X$,差集 $X-B$ 也称为 $B$ 关于 $X$ 的**补集**(complement).从而上述 de Morgan 公式可叙述为:并集的补集=补集的交集,交集的补集=补集的并集.

给定集 $X$ 与 $Y$,$X$ 的元素 $a$ 与 $Y$ 的元素 $b$ 形成的所有**有序对**$(a,b)$组成的集称为 $X$ 与 $Y$ 的**积**(product),记作 $X\times Y=\{(a,b):a\in X,b\in Y\}$,$X\times Y$ 的每一子集 $R$ 称为一个**关系**(relation),对每一个$(a,b)\in R$,记作 $aRb$,集 $X$,$Y$ 分别称为关系 $R$ 的定义域、值域.关系 $f\subset X\times Y$ 称为 $X$ 到 $Y$ 内的**映射**(mapping),如果对每一个 $x\in X$,存在 $y\in Y$ 使$(x,y)\in f$,且 $y$ 为 $x$ 所唯一确定,也就是$(x,y)\in f$ 及$(x,y')\in f\Rightarrow y=y'$.以 $f:X\to Y$ 表示这一映射,这一为 $x$ 所确定的 $y$ 记作 $f(x)$,上述映射也可表示为 $f:x\mapsto f(x)$,$x\in X$.$f(x)\in Y$,集 $A\subset X$ 在映射 $f$ 下的**象**(image)为集

$$f(A) = \{y:y = f(x),x\in A\}.$$

集 $B\subset Y$ 在映射 $f$ 下的**逆象**(inverse image)为集

$$f^{-1}(B) = \{x:f(x)\in B\}.$$

映射 $f:Z\to Y$ 称为**单映射**(injective mapping),如果 $f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$;称为**满映射**(surjective mapping),如果 $f(X)=Y$,这时也称 $f$ 是由 $X$ 到 $Y$ **上的**(onto)映射.如果既是单映射又是满映射,则称为**一一对应映射**(bijective mapping).

集在映射 $f$ 下的象和逆象有下列关系式:

$$f(f^{-1}(B)) = B\cap f(X)\subset B,f^{-1}(f(A))\supset A.$$

当 $f$ 是满映射时,有 $f(f^{-1}(B))=B$;当 $f$ 是单映射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$.

设$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一集族,由指标集 $\Gamma$ 到$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 的满足$f(\gamma)\in A_\gamma(\gamma\in\Gamma)$的映射 $f$ 的全体表示为$\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$,称为**集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的积**,对每一 $f\in\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$,$f(\gamma)\in A_\gamma$ 称为 $f$ 的第 $\gamma$ 个**坐标**,记作

$f(\gamma)=A_\gamma$,这样$\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$的元素$f$可以用所有的坐标$x_\gamma(\gamma\in\Gamma)$表示,记作$\{x_\gamma\}$. $\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$到$A_\gamma$的映射$p_\gamma$使对每一$\{x_\gamma\}\in\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$,$p_\gamma(\{x_\gamma\})=x_\gamma$,这一映射称为$\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$到$A_\gamma$的**投影**(projection).

关系$R\subset X\times X$称为$X$上的关系. $X$上的关系称为**等价关系**(equivalence relation),如果满足下列条件:

(i)对每一$x\in X$,$xRx$(自反性);

(ii)如果$xRy$,则$yRx$(对称性);

(iii)如果$xRy$及$yRz$,则$xRz$(传递性).

设$X=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$,且$\gamma\neq\gamma'\Rightarrow A_\gamma\cap A_{\gamma'}=\varnothing$,则称$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是$X$的一个**分解**(decomposition);$X$上的等价关系$R$确定着$X$的一个分解:$x,y$同属于$A_\gamma$,当且仅当$xRy$;相反地,$X$的一个分解确定着$X$上的等价关系$R$:$xRy$当且仅当对某一$\gamma\in\Gamma$,$x,y\in A_\gamma$.

$X$上的关系$<$称为$X$上的**线性序**(liner order)或**全序**(total order),如果满足下列条件:

(i)如果$x\neq y$,则$x<y$或$y<x$;

(ii)如果$x<y$,则$y<x$不能成立(反对称性);

(iii)如果$x<y$,$y<z$,则$x<z$.

赋以线性序(或全序)$<$的集$X$称为**线性序集**(或**全序集**),有时记作$(X,<)$.点$x_0$称为线性序集$X$的**最小元素**,如果对每一$x\in X-\{x_0\}$,$x_0<x$.

线性序集$X$称为**良序集**(well ordered set),如果$X$的任何非空子集具有最小元素.

线性序集$(X,<)$到线性序集$(Y,<')$上的一一对应映射称为**保序的**(order preserving),如果对任意$x,x'\in X$,$x<x'\Rightarrow f(x)<'f(x')$.

$X$上的关系$\leqslant$称为$X$上的一个**序**(order)或**偏序**(partial order),如果满足下列条件:

(i)对每一$x\in X$,$x\leqslant x$,

(ii)如果$x\leqslant y$及$y\leqslant x$,则$x=y$,

(iii)如果 $x \leqslant y$ 及 $y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$.
赋以序(或偏序)$\leqslant$的集称为**有序集**(ordered set)(或**偏序集**)，有时记作$(X, \leqslant)$.

设集 $X$ 上具有线性序$<$，可对任意的 $x, y \in X$ 规定：

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \text{ 或 } x = y.$$

则得到 $X$ 上的序$\leqslant$. 所以每一线性序集可以作为有序集.

设集 $X$ 上具有序$\leqslant$，如果对 $X$ 的某子集 $A$ 的任意两点 $x, y$ 有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$，可以规定：

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \text{ 及 } x \neq y.$$

这样得到 $A$ 上的线性序$<$，集 $A$ 称为有序(偏序)集 $X$ 的线性序(全序)子集，也称为**链**(chain).

有序(偏序)集 $X$ 的元素 $\mu$ 称为集 $A \subset X$ 的**上界**(upper bound)，如果对每一 $x \in A$，$x \leqslant \mu$；称为集 $A$ 的**上确界**(supremum)，如果 $\mu$ 是$A$ 的上界且对$A$ 的任一上界 $V$ 都有$\mu \leqslant V$. **下界**(lower bound)与**下确界**(infimum)的定义是类似的. 上确界、下确界分别用 sup, inf 表示.

有序(偏序)集 $X$ 的元素 $m$ 称为$X$ 的**极大元**(maximal element)，如果 $m \leqslant x \in X \Rightarrow m = x$.

## §2. 基数与序数

集 $X, Y$ 称为**等势的**(equipotent)，如果存在由 $X$ 到$Y$ 上的一一对应映射. 对每一集 $X$ 给以一个**基数**(cardinal number)$|X|$，使$|X| = |Y|$当且仅当$X, Y$ 是等势的. 有限集的基数定义为这集的元素的个数，称为有限基数，相反情况称为无限基数. 所有自然数所成集 $N$ 的基数记作$\aleph_0$，即$|N| = \aleph_0$；所有实数所组成集 $R$ 的基数记作$c$，即$|R| = c$. 一个集是**可数的**(countable)，当且仅当它是有限集或具有基数$\aleph_0$.

关于基数的和与积规定如下：两个基数 $m, n$ 的**和** $m + n$ 规定为集$X \cup Y$ 的基数，这里$|X| = m$，$|Y| = n$ 且$X \cap Y = \varnothing$. $m$,

$n$ 的**积** $mn$ 规定为集 $X \times Y$ 的基数，这里 $|X| = m$，$|Y| = n$. 对每一基数 $m$，$2^m$ 规定为集 $X$ 的一切子集所成集族的基数，这里 $|X| = m$. 可以证明 $2^{\aleph_0} = c$. 更一般地可以规定 $n^m$ 为所有 $X$ 到 $Y$ 内的映射所成集的基数，这里 $|X| = m$，$|Y| = n$. 可以证明：$n^{m_1 + m_2} = n^{m_1} \cdot n^{m_2}$，$(n_1 \cdot n_2)^m = n_1^m \cdot n_2^m$，$(n^{m_1})^{m_2} = n^{m_1 \cdot m_2}$.

关于两个基数大小规定如下：设 $m$，$n$ 是两个基数，$|X| = m$，$|Y| = n$，规定 $m \leqslant n$(或 $n \geqslant m$)，如果存在由 $X$ 到 $Y$ 内的单映射. 由 Cantor-Bernstein 定理：$m \leqslant n$ 及 $n \leqslant m \Rightarrow m = n$. $\aleph_0$ 是最小的无限基数，两个基数，如果至少有一个是无限基数，则它们的和或积等于其中非较小的一个(在积的情况这两个基数都异于零)，特别有

$$m + m = mm = m, m \geqslant \aleph_0.$$

如果 $m \leqslant n$ 且 $m \neq n$，则规定 $m < n$($m$ 小于 $n$). 可以证明，对每一个基数 $m$，有 $m < 2^m$，特别有 $\aleph_0 < c$，最小的不可数基数记作 $\aleph_1$. 设有基数的任意集合 $\{m_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$，且每一 $m_\alpha < m$，如有 $\sum_{\alpha \in \Lambda} m_\alpha < m$ 时，则称基数 $m$ 是**正则基数**(regular cardinal number). 例如 $\aleph_0$，$\aleph_1$ 都是正则基数.

线性序集 $X$，$Y$ 称为**相似的**(similar)，如果存在由 $X$ 到 $Y$ 上的保序映射. 对每一线性序集给以一个**序型**(order type) $o(X)$，使 $o(X) = o(Y)$ 当且仅当 $X$，$Y$ 是相似的. 良序集的序型称为**序数**(ordinal).

两个序数 $\alpha$，$\beta$ 的大小规定如下：设 $o(X) = \alpha$，$o(Y) = \beta$，如果存在 $y_0 \in Y$，使 $X$ 与集 $\{y : y \in Y, y < y_0\}$ 是相似的，则称 $\alpha$ 小于 $\beta$ 或 $\beta$ 大于 $\alpha$，记作 $\alpha < \beta$ 或 $\beta > \alpha$. 可以证明序数所成集按关系 $<$ 是良序的. 每一序数是 $\alpha$ 的良序集与所有小于 $\alpha$ 的序数所成集是相似的.

有限良序集的序数规定为这集的元素的个数，称为**有限序数**. 相反情况称为**无限序数**. 自然数集 $N$ 按自然数顺序是良序的，规定 $o(N) = \omega$，这是最小的**无限序数**.

对序数 $\alpha$，称序数 $\alpha + 1$ 为 $\alpha$ 的**后继者**(succesor)，这时 $\alpha$ 称为

$\alpha+1$ 的**前趋者**(predecessor). 0 以及存在前趋者的序数称为**孤立序数**(isolated ordinal),其他序数称为**极限序数**(limit ordinal).

由于保序映射是一一对应映射,所以 $X, Y$ 相似蕴含 $X, Y$ 等势,即 $o(X)=o(Y)\Rightarrow |X|=|Y|$. 所以每一序数 $\alpha$ 有一个基数与之对应称为序数 $\alpha$ 的基数,记作 $|\alpha|$. 当 $|\alpha|\leqslant\aleph_0$ 时,称 $\alpha$ 是**可数序数**,相反情况,称为**不可数序数**. $\omega$ 是最小的可数(无限)序数,$|\omega|=\aleph_0$,最小的不可数序数记作 $\omega_1$,$|\omega_1|$ 记作 $\aleph_1$.

设序数 $\alpha_i<\omega_1(i=1,2,\cdots)$,则可以证明 $\sup\{\alpha_i\}<\omega_1$,也就是存在序数 $\alpha<\omega_1$,使 $\alpha_i<\alpha$ 对 $i=1,2,\cdots$ 成立.

## §3. 超限归纳法与选择公理

**超限归纳法**(transfinite induction). 设对每一序数 $\alpha$,给定命题 $P(\alpha)$. 如果:(1)对 $\alpha=0$, $P(0)$是正确的;(2)对于 $\alpha<\alpha_0$ 的任意序数 $\alpha$,如果 $P(\alpha)$是正确的,则 $P(\alpha_0)$是正确的. 则 $P(\alpha)$对所有序数 $\alpha$ 都正确.

以上的证明方法称为超限归纳法. 下面叙述一些常见的**选择公理**(axiom of choice),不证明它们的等价性.

(i)Zermelo **公理**,对每一非空集的集族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,存在着一个由 $\Gamma$ 到 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的映射 $f$ 使对每一 $\gamma\in\Gamma$, $f(r)\in X_\gamma$.

(ii)Zermelo **定理**(**良序化定理**),任何集可按某个线性序使成为良序集.

(iii)Zorn **引理**,如果有序(偏序)集 $X$ 的每一链都有上界,则 $X$ 具有极大元.

集族 $\mathscr{A}$ 称为具有**有限特征**(finite character)的,如果 $A$ 是 $\mathscr{A}$ 的元素当且仅当 $A$ 的每一有限子集是 $\mathscr{A}$ 的元素.

(iv)Tukez **引理**,每一具有有限特征的集族有极大元(关于关系 $\subset$),即存在 $A_0\in\mathscr{A}$,使对任何 $A_1\in\mathscr{A}$, $A_0\subset A_1$,有 $A_0=A_1$.

# 第一章　拓扑空间概念

分析学中广泛地引用着连续、极限概念，但这些概念的本质的探讨应属于一般拓扑学.

G. Cantor 于 1895，1897 年的论文建立了集的理论，这导致 20 世纪早期 F. Hausdorff, M. Fréchet, C. Kuratowski 等数学家对拓扑空间概念的建立，而一般拓扑学进一步发展的基础的奠定主要归功于 A. Tychonoff, P. Urysohn 及 P. Alexandroff. P. Alexandroff 1960 年的综合论文详尽地介绍了一般拓扑学的历史概述及近代发展.

分析学中的连续、极限概念通常用邻域、开集描述，这里首先以开集概念定义拓扑空间，然后导向邻域、闭集等概念.

## §1.　拓扑的引入

**定义 1.1.1**　设有集 $X$，设 $\mathscr{T}$ 是 $X$ 的子集所成的集族满足：

(O1) $\varnothing \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$,

(O2) 如 $U_i \in \mathscr{T} (i = 1,2,\cdots,n)$，则 $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{T}$,

(O3) 如 $U_\gamma \in \mathscr{T} (\gamma \in \Gamma)$，则 $\bigcup \{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \in \mathscr{T}$,

这里指标集 $\Gamma$ 是无限集，则称 $(X, \mathscr{T})$ 是**拓扑空间**(topological space). $\mathscr{T}$ 是这空间的**拓扑**(topology)，$\mathscr{T}$ 的元素称为**开集**(open set). 在没有必要指出 $X$ 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 时，通常简单地用 $X$ 表示拓扑空间.

**定义 1.1.2**　设 $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ 是集 $X$ 上的两个拓扑，且 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$，则称拓扑 $\mathscr{T}$ 比拓扑 $\mathscr{T}'$ **粗**(coarse)或拓扑 $\mathscr{T}'$ 比拓扑 $\mathscr{T}$ **精**(fine).

数直线 $R$ 上的开集(可以表示为可数个开区间的并)族连同空集 $\varnothing$ 及 $R$ 形成 $R$ 上的**通常拓扑**(usual topology).

$n$ 维欧氏空间 $R^n$ 中两点，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离 $\rho(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{1/2}$，置 $S_\varepsilon(x)=\{y:y\in R^n,\rho(x,y)<\varepsilon\}$(以 $x$ 为中心以 $\varepsilon$ 为半径的开球)，则 $\mathscr{T}=\{U:U\subset R^n$，对每一 $x\in U$ 及某 $\varepsilon>0$ 使 $S_\varepsilon(x)\subset U\}$是 $R^n$ 上的拓扑，称为 $R^n$ 上的通常拓扑.

以下称空间 $R$ 或 $R^n$ 时都是指通常拓扑而言.

设$[0,\omega_1)$是小于最小的不可数序数 $\omega_1$ 的所有序数形成的良序集. 置$(\beta,\alpha]=\{\gamma:\beta<\gamma\leqslant\alpha\}$ $(0\leqslant\beta<\alpha)$，则 $\mathscr{T}'=\{U:U\subset[0,\omega_1)$，对每一 $\alpha\in U,\alpha>0$ 及某 $\beta<\alpha$，使$(\beta,\alpha]\subset U\}\cup\{\varnothing\}$，满足定义 1.1.1 中的(O1—O3)，是$[0,\omega_1)$上的拓扑，称为**序拓扑**(order topology)，以下称空间$[0,\omega_1)$时是指序拓扑而言.

设集 $X$ 上的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 仅由空集$\varnothing$及 $X$ 组成，则称这拓扑 $\mathscr{T}_1$ 为**平凡拓扑**(indiscrete or trivial topology)，是最粗的拓扑. 设 $\mathscr{T}_2$ 是由 $X$ 的一切子集组成，则称这拓扑 $\mathscr{T}_2$ 为**离散拓扑**(discrete topology)，是最精的拓扑. 具有离散拓扑的空间称为**离散空间**(discrete space).

**定义 1.1.3** 设空间 $X$ 是拓扑空间，$x\in X$，如果 $X$ 的子集 $U$ 包含着某一开集，这开集包含着点 $x$，则称 $U$ 是 $x$ 的**邻域**(neighbourhood)；如果 $U$ 是开集，则称 $U$ 是点 $x$ 的**开邻域**(open neighbourhood).

数直线 $R$ 上的开区间是这区间内任一点的开邻域，闭区间是除这区间的端点外的这区间内任一点的邻域. $n$ 维欧氏空间 $R^n$ 中的开球 $S_\varepsilon(x)$是点 $x$ 的($\varepsilon$)开邻域，也是 $S_\varepsilon(x)$中每一点的开邻域. 任何包含着 $S_\varepsilon(x)$的集是 $S_\varepsilon(x)$中每一点的邻域.

在空间$[0,\omega_1)$中，包含着$(\beta,\alpha]$的任何集都是点 $\alpha$ 的邻域，所以当 $\alpha=0$ 时，包含点 0 的任何集都是点 0 的邻域.

**定理 1.1.4** 设 $\mathscr{U}(x)$是点 $x$ 的所有邻域所成集族，则满足：

(N1) $X\in\mathscr{U}(x)$，

(N2) 如 $U\in\mathscr{U}(x)$，则 $x\in U$，

(N3) 如 $U \in \mathscr{U}(x)$, $V \supset U$, 则 $V \in \mathscr{U}(x)$,

(N4) 如 $U, V \in \mathscr{U}(x)$, 则 $U \cap V \in \mathscr{U}(x)$,

(N5) 如 $U \in \mathscr{U}(x)$, 则存在集 $V$ 使 $x \in V \subset U$ 及对任何 $x' \in V$, $V \in \mathscr{U}(x')$.

**证明** 条件(N1—N3)是定义 1.1.3 的直接结果. 条件(N4)可由定义 1.1.3 及(O2)导得. 下证条件(N5). 设 $U \in \mathscr{U}(x)$, 由邻域的定义(定义 1.1.3), 存在开集 $V$ 使 $x \in V \subset U$, 开集 $V$ 是它的任意点 $x'$ 的邻域, 这就是 $V \in \mathscr{U}(x')$ $(x' \in V)$. 证完.

**定理 1.1.5** 拓扑空间 $X$ 中的子集 $U$ 是开集当且仅当 $U$ 是它的每一点的邻域.

**证明** 必要性是显然的. 相反地, 对每一 $x \in U$, 由邻域的定义(1.1.3), 存在开集 $V(x)$, 使 $x \in V(x) \subset U$, 从而 $U = \bigcup \{V(x): x \in U\}$, 这说明 $U$ 可以表示为某些开集的并, 由拓扑空间的定义(1.1.1)的(O3)知 $U$ 是开集. 证完.

以上的定义 1.1.1 是以开集为原始概念定义拓扑空间, 下面我们用邻域为原始概念定义拓扑空间.

设对集 $X$ 的每一点 $x$ 确定了一个子集族 $\mathscr{U}(x)$ 满足条件(N1)—(N5), 我们称 $\mathscr{U}(x)$ 的元素为点 $x$ 的邻域, 然后利用定理 1.1.5 定义开集, 由(N1), (N4)及(N3), 所定义的开集族满足拓扑空间的定义(1.1.1)的(O1), (O2)及(O3), 从而 $X$ 形成拓扑空间. 这里是以邻域作为原始概念, 由此出发定义拓扑空间.

下面我们导向闭集概念.

**定义 1.1.6** 拓扑空间 $X$ 的子集 $F$ 称为**闭集**(closed set), 如果 $X - F$ 是开集.

**定理 1.1.7** 拓扑空间 $X$ 的所有闭子集 $F$ 形成的集族 $\mathscr{F}$ 满足下列条件:

(F1) $\varnothing \in \mathscr{F}$, $X \in \mathscr{F}$.

(F2) 如 $F_i \in \mathscr{F}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathscr{F}$.

(F3) 如 $F_\gamma \in \mathscr{F}(\gamma \in \Gamma)$, 则 $\bigcap \{F_\gamma: \gamma \in \Gamma\} \in \mathscr{F}$.

这里指标集 $\Gamma$ 是无限集.