

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

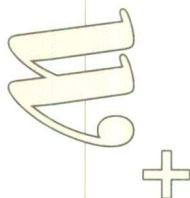
HANSHULUN DE BIANZHIWENTI

函数论的边值问题

函数论的 边值问题

李子植 谢素英 编著

河北大学出版社



函数论的边值问题

李子植 谢素英 编著

河北大学出版社

责任编辑:马 力

封面设计:王占梅

责任印制:蔡进建

图书在版编目(CIP)数据

函数论的边值问题/李子植,谢素英编著. - 保定:河北大学出版社,2000.6

ISBN 7-81028-653-6

I. 函… II. ①李…②谢… III. 函数论-边值问题-高等学校-教学参考资料 IV. 0174

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 30052 号

出版:河北大学出版社(保定市合作路1号)

经销:全国新华书店

印制:河北新华印刷一厂

规格:1/32 (850mm×1168mm)

印张:20.75

字数:520千字

印数:1~1000册

版次:2000年8月第1版

印次:2000年8月第1次

定价:25.00元

前 言

解析函数的边值问题是复变函数论中一个非常重要的分支。它与流体力学、弹性力学、空气动力学和物理学等方面都有着密切的联系。广义解析函数的理论及边值问题是解析函数的理论及边值问题的推广,它们之间有许多类似的性质和结果。在理论上,它与分析、几何与力学(如拟保角映射、曲面论、薄壳理论……)等均有深刻的联系,它的应用范围大为扩充。因而,有很强的生命力。

1985年1月,为满足数学系高年级学生的选修课和助教进修班教学的需要,我曾编写了《函数论边值问题》讲义(以下简称《讲义》),它只含本书的前四章和第六章中的大部分内容,而第一章中的§1.1、§1.10、§1.11、第三章中的§3.4~§3.6、第四章中的§4.7、第五章、第六章中的§6.6、§6.9~§6.11、第七章和第八章都是新增写的,对《讲义》中的其他部分也作了一些修改和补充。前四章主要是解析函数边值问题和奇异积分方程的最基本的理论,内容通俗易懂,推理严格。第五章的内容比较简练。这些内容只要具备数学分析、线性代数和复变函数的基础知识便可学习。第六章中关于广义解析函数的内容,由于有И. Н. Бекья的专著《广义解析函数》和闻国椿等编著的《广义解析函数及其拓广》,因此,只简述了必要的知识,以省篇幅。

在所增写的各章节中,其大部分内容是吸收了80年代以来国内外一些学者们的部分最新相关科研成果,也包括了我的和我的硕士研究生们的部分研究成果(如解析函数、广义解析函数的斜微商边值问题、高阶奇异积分的性质、三阶线性与非线性椭圆型复方程解的表示式和存在定理及边值问题的结果等)。学习这部分内容,需要具备广义解析向量、实变函数、泛函分析与矩阵论等基础知识。

总而言之,本书精练地讲述了解析函数、广义解析函数和一阶、二阶、三阶椭圆型复方程(组)的各种边值问题以及相关的奇异积分方程(组)的一些理论。这些内容的学习,有益于较快地接触某些最新文献,进入奇异积分方程与边值问题的研究领域。

另外,在本书的前五章中还选编了大量的习题,供读者练习;在书末还编写了两个附录,即《不动点原理》和《广义解析向量理论》(一)、(二),可供学习本书和其他有关文献时参考。最后,还编选了二百多个参考文献供读者参阅。由于作者手中的资料有限,许多好的文献未能编入,深感遗憾。

基于以上所述,本书不仅是一本学习奇异积分方程与边值问题的入门书,而且,还可作为数学系各专业学生的选修课、助教进修班和硕士研究生的基础课教材,也适宜于从事数学、应用数学教学的有关教师、科研工作者和工程技术人员学习和参考。因而,本书具有较广泛的适用性和一定的先进性。

近十多年来,我国许多专家学者在椭圆型复方程的边值问题的研究方面有突出成绩,在某些方面甚至在国际上处于领先地位。闻国椿教授在专著[57]2)、[59]中,对一阶、二阶和四阶线性、非线性椭圆型复方程理论及各种边值问题等都进行了系统而深入的研究,许多院校已作为研究生的专业课教材使用,对这个方向的研究和发展起到了重要作用。而我们的这本书,对学习所指出的专著等是有益的,起到了一定的桥梁作用。因此,出版本书更具有必要性。

本书的撰写,主要是我在长期教学和科研实践的基础上完成的,并编写了附录一和附录二之(二),选编了参考文献。书中的第五章和第八章的前六节是谢素英同志根据我拟定的大纲和详细目录而起草的。附录二中的《广义解析向量理论》(一)是由李振春同志根据文献[87]3)摘要而成的。最后,由我统一审阅和修改定稿。另外,田大增、赵淑珍、高红亚和孟俊霞同志作了许多具体工作。本

书的编写,得到了河北大学教务处负责同志的大力支持。本书的初稿是 1995 年 12 月完成的,以后又进行了一些修改。我们在撰写过程中,参考了国内外有关的书籍和期刊,引用了其中的一些文献,在此一并表示衷心感谢。

限于作者的水平,书中的缺点和错误在所难免,欢迎专家同行和读者批评、指正。

李子植

1998 年 8 月于河北大学

目 录

第一章 Cauchy 型积分	(1)
§ 1.1 光滑曲线	(1)
1.1.1 光滑曲线的概念	(1)
1.1.2 光滑曲线的某些性质	(3)
§ 1.2 H 类函数及其基本性质	(7)
1.2.1 Hölder 条件与 H 类函数	(7)
1.2.2 H 类函数的基本性质	(9)
1.2.3 Ляпунов(Ляпунов)曲线	(12)
§ 1.3 分片解析函数	(16)
1.3.1 分片连续函数	(16)
1.3.2 分片解析函数	(18)
§ 1.4 Cauchy 型积分及其主值	(19)
1.4.1 Cauchy 型积分的定义	(19)
1.4.2 Cauchy 型积分的主值	(22)
§ 1.5 Сохоцкий - Plemelj 公式	(28)
1.5.1 Cauchy 型积分的边界值	(28)
1.5.2 Сохоцкий - Plemelj 公式	(32)
1.5.3 曲线上角点处的 Plemelj 公式	(34)
§ 1.6 Cauchy 型积分及其边界值的 Hölder 连续性	(36)
1.6.1 Cauchy 型积分边界值的 Hölder 连续性	(36)
1.6.2 Cauchy 型积分的 Hölder 连续性	(39)
1.6.3 Cauchy 型积分边界值的微商	(46)
§ 1.7 无穷直线上的 Cauchy 型积分	(48)

1.7.1	实轴上的 Cauchy 型积分	(49)
1.7.2	实轴上的 Сохоцкий – Plemelj 公式	(53)
1.7.3	实轴上的 Cauchy 型积分在无穷远点的性质	(54)
1.7.4	实轴上的 Cauchy 型积分的微商	(55)
§ 1.8	复合曲线上的 Cauchy 型积分	(57)
1.8.1	复合曲线上的 Plemelj 公式	(57)
1.8.2	解析函数边界值的条件	(59)
1.8.3	亚纯函数边界值的条件	(62)
§ 1.9	Poincaré—Bertrand 积分换序公式	(64)
1.9.1	密度中含有参数的 Cauchy 主值积分的 Hölder 连续性	(64)
1.9.2	累次积分中一个积分为奇异的情况	(67)
1.9.3	Poincaré – Bertrand 积分换序公式	(69)
1.9.4	闭曲线上 Cauchy 主值积分的反演公式	(72)
§ 1.10	解析函数的实部和虚部之边界值的 Hilbert 公式	(73)
1.10.1	单位圆上的 Schwarz 核与 Cauchy 核的关系	(73)
1.10.2	Hilbert 公式	(74)
§ 1.11	Cauchy 型积分与位势	(76)
	习题一	(78)
第二章	基本边值问题	(84)
§ 2.1	引言	(84)
2.1.1	指标的概念	(84)
2.1.2	辅助定理	(86)
2.1.3	Riemann 边值问题的提法	(87)
2.1.4	跳跃问题及其解法	(88)
§ 2.2	齐次 Riemann 边值问题	(89)

2.2.1	齐次 R 问题及其指标	(89)
2.2.2	单连域上齐次 R 问题的解	(90)
2.2.3	典则函数	(94)
2.2.4	多连域上齐次 R 问题的解	(95)
§ 2.3	非齐次 Riemann 边值问题	(100)
2.3.1	非齐次 R 问题的解	(100)
2.3.2	相联 R 问题	(102)
2.3.3	具有有理系数的 R 问题	(103)
§ 2.4	无穷直线上的 Riemann 边值问题	(109)
§ 2.5	非正则型的 Riemann 边值问题	(117)
2.5.1	齐次 R 问题的解	(117)
2.5.2	非齐次 R 问题的解	(118)
§ 2.6	单连域上的 Hilbert 边值问题	(122)
2.6.1	Hilbert 边值问题的提法	(122)
2.6.2	单位圆内的函数在圆外的对称扩张	(123)
2.6.3	单位圆内的 H 问题	(125)
2.6.4	单连域上的 H 问题	(138)
2.6.5	半平面中的 H 问题	(139)
2.6.6	正则化因子·外区域上的 H 问题	(145)
习题二		(153)

第三章 具有 Cauchy 核与 Hilbert 核的奇异

积分方程	(158)
§ 3.1 Cauchy 核的奇异积分方程与奇异算子	(158)
3.1.1 基本概念与记号	(158)
3.1.2 奇异积分算子的基本性质	(161)
§ 3.2 特征方程及其相联方程的解	(166)
3.2.1 特征方程的解	(166)
3.2.2 特征方程的相联方程的解	(171)

3.2.3	特征方程的 Nöether 定理	(173)
3.2.4	特征方程在角点处的解	(176)
§ 3.3	奇异积分方程的正则化及一般 Nöether 定理 ..	(178)
3.3.1	奇异积分方程的正则化	(178)
3.3.2	Fredholm 方程解的 Hölder 连续性	(179)
3.3.3	H. H. Bekya 等价性定理	(181)
3.3.4	一般 Nöether 定理	(183)
3.3.5	奇异积分方程与 Fredholm 方程的对比	(186)
3.3.6	Carleman - Bekya 正则化方法	(188)
§ 3.4	共轭算子与共轭方程的等价正则化	(190)
3.4.1	共轭算子与共轭方程	(190)
3.4.2	非齐次奇异积分方程可解性条件的 另一种形式	(192)
3.4.3	方程的等价正则化定理	(193)
3.4.4	例子	(195)
§ 3.5	非正则型的奇异积分方程	(200)
3.5.1	特征方程的解	(201)
3.5.2	完全方程的正则化	(204)
§ 3.6	具有 Hilbert 核的奇异积分方程	(206)
3.6.1	特征方程与 Hilbert 边值问题的联系	(206)
3.6.2	齐次特征方程的解	(207)
3.6.3	非齐次特征方程的解	(210)
3.6.4	常系数的特征方程	(214)
3.6.5	完全方程及其正则化	(216)
3.6.6	具有 Hilbert 核的方程的基本性质	(218)
习题三		(219)
第四章	边值问题的某些推广	(224)
§ 4.1	单连域上的 RH 问题	(224)

4.1.1	RH 问题的提法与转化	(224)
4.1.2	RH 问题的解	(227)
§ 4.2	带位移的 Riemann 边值问题	(231)
4.2.1	带位移的 Riemann 边值问题的解	(231)
4.2.2	保角粘合定理及 SR 问题向 R 问题的转化	(241)
§ 4.3	有界单连域内的 Carleman 边值问题	(248)
4.3.1	问题的提法及可解条件	(249)
4.3.2	积分表示式·具有给定跳跃的 C 问题	(251)
4.3.3	保角粘合定理	(257)
4.3.4	闭曲线上的 C 问题化为开口 弧段上的 R 问题	(263)
4.3.5	例子	(267)
§ 4.4	在积分曲线端点和在核密度的间断点上 Cauchy 型积分的性质	(270)
4.4.1	核密度属于 H 类函数的情形	(270)
4.4.2	核密度具有第一类间断点的情形	(273)
4.4.3	H^* 类函数	(274)
4.4.4	核密度属于 H^* 时 Cauchy 型 积分的性质	(278)
4.4.5	核密度属于 H^* 时 Cauchy 主值积分 的性质	(284)
4.4.6	积分路线上具有结点的情形	(286)
§ 4.5	开口弧段上的 Riemann 边值问题	(287)
4.5.1	问题的提法	(287)
4.5.2	齐次 R 问题的解	(289)
4.5.3	非齐次 R 问题的解	(293)
4.5.4	若干开口弧段上的 R 问题	(295)

§ 4.6 具有间断系数的 Riemann 边值问题	(296)
4.6.1 带结点曲线上的 R 问题	(296)
4.6.2 带结点曲线上的相联齐次 R 问题	(300)
4.6.3 具有间断系数的 R 问题	(302)
§ 4.7 多连域上解析函数 Haseman 边值问题 解的估计	(306)
习题四	(316)
第五章 解析向量边值问题与奇异积分方程组	(322)
§ 5.1 基本概念·Plemelj 公式	(322)
5.1.1 基本概念·术语和记号	(322)
5.1.2 Plemelj 公式	(323)
§ 5.2 解析向量的 Riemann 边值问题	(325)
5.2.1 解析向量的 Riemann 边值问题的提法	(325)
5.2.2 解析向量的跳跃 R 问题和齐次 R 问题	(326)
5.2.3 解析向量的齐次 R 问题的典则解组	(328)
5.2.4 解析向量的齐次 R 问题的指标与通解	(333)
5.2.5 解析向量的相联齐次 R 问题	(335)
5.2.6 解析向量的非齐次 R 问题	(338)
5.2.7 具有有理系数矩阵的 R 问题	(340)
§ 5.3 解析向量的 Hilbert 边值问题	(343)
5.3.1 解析向量的 Hilbert 边值问题的提法	(343)
5.3.2 典则矩阵的一般表示	(343)
5.3.3 解析向量的齐次 H 问题	(345)
5.3.4 解析向量的非齐次 H 问题	(350)
§ 5.4 解析向量的复合边值问题	(351)
§ 5.5 奇异积分方程组	(353)
5.5.1 特征奇异积分方程组	(353)
5.5.2 特征方程组的相联方程组	(356)

5.5.3	完全奇异积分方程组及其正则化	(358)
5.5.4	奇异积方程组的 Nöether 定理	(361)
5.5.5	奇异积分组的反演公式	(363)
习题五		(365)
第六章 一阶椭圆组与二维奇异积分算子		(367)
§ 6.1	方程组的复形式	(367)
§ 6.2	$C_{\bar{z}}$ 类函数	(368)
6.2.1	Pompeiu 意义下复函数的微商定义	(368)
6.2.2	$C_{\bar{z}}$ 类函数的一般积分表示式	(371)
6.2.3	Остроградский 公式	(375)
6.2.4	$C_{\bar{z}}$ 类函数的连续性特征	(376)
6.2.5	$C_{\bar{z}}$ 类函数的微商法则	(377)
§ 6.3	方程组(6.1.1)的标准形式	(377)
6.3.1	复方程 $w_{\bar{z}} = Aw$ 的解	(377)
6.3.2	方程组的标准形式	(379)
§ 6.4	正则解的一种表示式及其某些性质	(380)
6.4.1	正则解的一种表示式	(380)
6.4.2	正则解的某些性质	(381)
§ 6.5	正则解的积分表示式	(383)
§ 6.6	Соболев 意义下的广义微商	(386)
6.6.1	基本函数类	(387)
6.6.2	Соболев 广义微商与 Pompeiu 微商的关系	(390)
6.6.3	积分 Tf 和 Πf 的基本性质	(392)
6.6.4	广义解析函数	(395)
§ 6.7	Hilbert 边值问题	(396)
6.7.1	Hilbert 边值问题的提法	(396)
6.7.2	化 H 问题为积分方程	(397)
§ 6.8	Riemann 边值问题	(401)

6.8.1	辅助关系式	(401)
6.8.2	问题的提法·跳跃问题的解	(403)
6.8.3	齐次 R 问题的解	(404)
6.8.4	非齐次 R 问题的解	(406)
§ 6.9	区域内的 Bergman 函数	(409)
6.9.1	区域内的 Green 函数与 Schwarz 算子	(409)
6.9.2	区域内的 Neumann 函数	(412)
6.9.3	Bergman 空间·Bergman 核函数	(414)
§ 6.10	二维奇异积分算子的 Nöether 性及其应用	(418)
6.10.1	引言	(418)
6.10.2	某些二维奇异积分算子的 Nöether 性	(420)
6.10.3	平面上一般二阶椭圆型方程组的边值问题	(427)
§ 6.11	二维高阶奇异积分及其应用	(432)
6.11.1	单奇点的二维高阶奇异积分	(432)
6.11.2	多奇点的二维高阶奇异积分	(436)
6.11.3	奇点位于边界时的二维高阶奇异积分	(443)
6.11.4	单位圆上的积分算子 $\tilde{S}_n$	(448)
6.11.5	单位圆上非负指标的 Hilbert 边值问题	(450)
第七章	斜微商边值问题	(452)
§ 7.1	解析函数的高阶斜微商 Hilbert 型边值问题	(452)
7.1.1	边界条件具有等价性的不同形式的 问题提法	(452)
7.1.2	解析函数的积分表示式	(455)
7.1.3	$D_m H$ 型问题化为 Fredholm 积分方程	(465)
7.1.4	$D_m H$ 型问题的可解性	(468)
7.1.5	$D_m H$ 型问题的另一种解法	(470)
§ 7.2	解析函数的高阶斜微商 Riemann 型边值问题	(476)

7.2.1	边值问题的提法	(476)
7.2.2	分片解析函数的积分表示式	(477)
7.2.3	$D_{n,p}R$ 型问题的解	(480)
7.2.4	$D_{n,p}R$ 型问题的新解法	(483)
7.2.5	奇异积分——微分方程	(485)
§ 7.3	解析函数的斜微商 Carleman 边值问题	(487)
7.3.1	边值问题的提法	(487)
7.3.2	有界单连域内解析函数的积分表示式	(488)
7.3.3	DC 问题化为奇异积分方程	(491)
7.3.4	DC 问题的伴随问题	(493)
7.3.5	齐次问题解的个数与非齐次问题可解条件的个数之间的关系	(494)
§ 7.4	解析函数的高阶斜微商 Carleman 型边值问题	(501)
7.4.1	边值问题的提法	(501)
7.4.2	H^N 解析函数的积分表示式	(502)
7.4.3	D_1C 型问题	(505)
7.4.4	D_NC 型问题($N>1$)	(513)
§ 7.5	广义解析函数的斜微商 Hilbert 边值问题	(517)
7.5.1	边值问题的提法	(517)
7.5.2	等价性定理	(519)
7.5.3	广义 DH 问题化为广义解析向量的 H 问题	(520)
7.5.4	广义 DH 问题的 Noether 定理	(523)
7.5.5	含有实参数 λ 的广义 DH 问题(简介)	(528)
§ 7.6	一阶拟线性椭圆组的斜微商 Hilbert 边值问题	(533)
7.6.1	边值问题的一般提法	(533)

7.6.2	等价性定理	(534)
7.6.3	线性的斜微商边界条件下边值问题的 矩阵形式	(535)
7.6.4	非负指标下边值问题的可解性	(536)
7.6.5	负指标下边值问题的可解性	(538)
§ 7.7	研究概述	(539)
7.7.1	广义解析函数的广义 $D_n H(n > 1)$ 问题 ...	(540)
7.7.2	广义解析函数的广义 $D_m R(m > 1)$ 型问题 ...	(543)
7.7.3	广义解析函数的带位移的广义 DR 型问题 ...	(548)
7.7.4	广义解析函数的广义 DC 型问题	(553)
7.7.5	广义解析函数的斜微商复合边值问题	(558)
7.7.6	一阶线性椭圆组的广义 DC 型问题	(563)
7.7.7	广义解析函数的广义 DR 型问题的 封闭解	(568)
第八章	三阶椭圆型方程组的广义解与边值问题	(572)
§ 8.1	三阶椭圆型偏微分方程组的定义与分类	(572)
§ 8.2	三阶椭圆型偏微分方程组的复形式	(574)
8.2.1	三阶线性椭圆型偏微分方程组的复形式 ...	(574)
8.2.2	三阶非线性椭圆型偏微分方程组的复形式 ...	(578)
§ 8.3	加于三阶椭圆型复方程的条件	(579)
§ 8.4	三阶椭圆型复方程解的表示式与存在定理 ...	(581)
8.4.1	一个特殊三阶椭圆型复方程解的表示式 ...	(581)
8.4.2	三阶椭圆型复方程解的表示式 与存在定理	(584)
§ 8.5	三阶非线性椭圆型复方程的斜微商 Hilbert 边值问题	(589)
8.5.1	三阶非线性椭圆型复方程 H 问题的提法	(589)

8.5.2	三阶非线性椭圆型复方程 H 问题解的 表示式与解的估计式	(591)
8.5.3	三阶非线性椭圆型复方程 H 问题的可解性 ...	(594)
§ 8.6	三阶线性椭圆型复方程的斜微商 Hilbert 边值问题的可解性	(595)
§ 8.7	一般三阶非线性椭圆型复方程的斜微商 边值问题	(598)
8.7.1	三阶非线性椭圆型复方程的斜微商 问题的提法	(598)
8.7.2	复方程(8.7.1)的斜微商问题的可解性.....	(601)
8.7.3	一般复方程(8.7.9)的斜微商问题 的可解性	(604)
附录一	不动点原理.....	(606)
附录二	广义解析向量理论.....	(610)
参考文献		(624)