高等学校交流講义

数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

兰州大学、北京大学等校数学系合編

人民教育出版社

高等学校交流講义

数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

蘭州大学、北京大学等校数学系合編

人民教育出版社

本书是以兰州大学数学力学系陈庆益编的“数学物理方程”讲义和北京大学数学力学系微分方程教研室萧树鉄、李翊神、吴兰成、石青云、孙伟等编的“数学物理方程”讲义为基础，选取了复旦大学和四川大学两校数学系讲义编辑而成的，内容包括：基本方程和定解问题的推导、分离变量法、积分变换，特征綫法、特征的概念及方程的分类、双曲型方程、积分方程、椭圆型方程、抛物型方程、偏微分方程的数值解法等十章。

本书可作为综合大学及高等师范学校数学各专业“数学物理方程”課程的教材，也可供高等工业学校的相近专业选用。

数学物理方程

兰州大学、北京大学等校数学系合编

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

京华印书局印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010·97　开本 850×1168 1/32　印张 8 13/16

字数 209,000　印数 31,001—48,000　定价（6）￥0.85

1961年7月第1版　1962年5月北京第4次印刷

目　录

第一章　基本方程和定解条件的推导

由于十七世紀工业生产的高度发展，刺激力学、天文学和物理学的相应发展，这就要求数学工具的革新，于是微积分出現了。此后不久，从工程技术以及力学、天文学和物理学方面相继提出許多微分方程問題，逐漸形成数学物理方程这一学科。对数学物理方程的深入研究，反过来又大大地促进了力学、天文学、物理学等的发展，最終也推动了工程技术和工业生产的发展。

数学物理方程的研究范围是十分广泛的，它包含描述各种自然現象的微分方程、积分方程和函数方程。我們在数学物理方程这个課程中不可能全部讲到这些；而只能主要从事于波动方程、拉普拉斯方程和热传导方程的研究。一方面，这是因为这些古典方程很好地描述一些基本的物理現象，能解决一般的工程技术問題；另一方面，也因为通过这些古典問題的研究，可以掌握一些方法，作为探討工程技术以及力学、天文学、物理学等方面提出的新問題的参考。

为了对某一特定的物理現象进行研究，除了給出描写这个物理过程的微分方程以外，我們还要求对未知函数加上一些附加条件，这就是所謂的初始条件和边界条件，它們合称为**定解条件**。

在这一章，我們主要从物理問題导出一些典型的方程和定解条件。

§1. 热傳导方程及其定解条件

在混凝土浇筑后的冷却过程中，可能由于溫度应力过大而产生裂縫。为了采取措施避免裂縫产生，必須預先計算出在这过程中

温度应力的分布和变化。由于温度应力的形成与温度梯度有关，所以通常我們必須先求出它的温度場。在工程技术上还有許多傳热問題也都归結为某些物体內温度分布的探求。現在我們就根据物理学中的一些基本規律来推导在热傳导过程中温度所满足的方程。

假設时刻 t 在物体 G 內点 (x, y, z) 处的温度为 $u(x, y, z, t)$，$\boldsymbol{n}$ 是点 (x, y, z) 处曲面元素 ΔS 的法向，規定 $\boldsymbol{n}$ 所指的那一側为 ΔS 的正側。

根据热傳导的富里哀定律，知道在 Δt 时間內，从面元 ΔS 的負側流向正側的热量为

$$\Delta Q = -k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S\Delta t,$$

其中 $k(x, y, z)$ 称为物体在点 (x, y, z) 处的热傳导系数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为温度函数在点 (x, y, z) 处沿 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

对于 G 內任一封閉曲面 S，以 $\boldsymbol{n}$ 表示它的外法綫方向，因此从时刻 t_1 到时刻 t_2，流入曲面 S 內部的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right]dt。$$

記 S 所圍的区域为 D，則 D 內温度升高所吸收的热量为

$$\begin{aligned} Q_2 &= \iiint_D C(x, y, z)\rho(x, y, z)[u(x, y, z, t_2) \\ &\qquad - u(x, y, z, t_1)]dx\,dy\,dz \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\iiint_D C(x, y, z)\rho(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}dxdydzdt, \end{aligned}$$

其中 $C(x, y, z)$ 为比热，$\rho(x, y, z)$ 为物体的密度。由于热量守恒，流入的热量应等于物体温度升高所吸收的热量，于是

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D C\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt。$$

又由奥氏公式，

$$\iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_D\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big]dx\,dy\,dz,$$

因此有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D\Big[C\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big)\Big]dx\,dy\,dz\,dt=0。$$

由于时間間隔 $[t_1,t_2]$ 及区域 D 是任意取的，而积分号下的函数是連續函数，因此在任何时刻在 G 内任一点都有

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)。\quad(1,1,1)$$

若物体内部有热源，热源密度为 $f(x,y,z,t)$，則溫度所滿足的方程应該是

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)+f(x,y,z,t),\quad(x,y,z)\in G\quad(1,1,2)$$

如果物体均匀且各向同性，則 C，ρ，k 都是常数。这时令 $a^2=\frac{k}{C\rho}$，方程(1,1,1) 化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big),\quad(x,y,z)\in G\quad(1,1,3)$$

这就是通常所謂的**热傳导方程**。显然，单靠微分方程还不足以唯一地确定一个特定的物理过程。我們知道对于一个具体物体，在一个确定的传热过程中，它的溫度分布依賴于过程开始时刻的溫

度和物体表面上的溫度，因此必須对方程附加相应的**初始条件**和**边界条件**。

若开始时刻物体的溫度分布为 $u_0(x,y,z)$，則 $u(x,y,z,t)$ 应滿足下列初始条件

$$u(x,y,z,0)=u_0(x,y,z),\quad (x,y,z)\in G。$$

一般讲，在物体表面处，它与周围介质会有热交换。在通常溫度下，在 Δt 时間內，通过物体表面的面元 ΔS 而散失到周围介质中的热量为

$$\Delta Q'=h(u-\theta)\Delta S\Delta t,$$

其中 $\theta=\theta(x,y,z,t)$ 是和物体接触处的介质的溫度，u 是物体表面的溫度，h 称为物体对这介质的热交换系数。

在物体表面上任取一块曲面 S_1，对此再在物体 G 內部取一块曲面 S_2，使 S_1 与 S_2 有共同的边界而围成一体积 V。在 (t_1,t_2) 內通过表面 S_1 与 S_2 从 V 流出的热量为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_2} k\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1} h(u-\theta)dSdt,$$

根据热量守恒原理，它应等于

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V C\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt。$$

因此有

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_2} k\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1} h(u-\theta)dSdt$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V C\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt$$

令 S_2 趋近 S_1 取极限，則 V 的体积縮为零，設 u 及其一阶导数連續到边界，則有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{S_1}\left[k\frac{\partial u}{\partial n}-h(u-\theta)\right]dS\,dt=0。$$

由于 (t_1,t_2) 任意，S_1 任意，故在任一时刻，在表面上任一点，应有

$$k\frac{\partial u}{\partial n}-h(u-\theta)=0。\tag{1,1,4}$$

这就是溫度应満足的边界条件。

如果 $h\gg k$，則边界条件近似地可写为

$$u|_S=\theta,\quad S\text{ 表示 }G\text{ 的边界。}$$

这説明在物体与周围介质之間的热交换能力很强时，物体表面的溫度可认为与周围介质的溫度一致。

如果 $h\ll k$，則边界条件近似地可写为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0,$$

这时，物体与周围介质間的热交換能力很弱，就是我們常説的“物体表面絕热”。

所以一般溫度方程的边界条件有三种形式

1) $$u|_S=f(x,y,z,t),\quad (x,y,z)\in S,\quad t>0,\tag{1,1,5}$$

带有这种边界条件的問題称为**第一边值問題**。

2) $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f(x,y,z,t),\quad (x,y,z)\in S,\quad t>0,\tag{1,1,6}$$

带有这种边界条件的問題称为**第二边值問題**。

3) $$\left[k\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_S=f(x,y,z,t),\quad (x,y,z)\in S,\quad t>0,\tag{1,1,7}$$

带有这种边界条件的問題称为**第三边值問題**。

如果在某物体的局部考察热传导过程，以致边界的影响在研究的时間范围內达不到所研究的地方，或虽达到但影响甚小，則此时对方程只附加初值条件而沒有边值条件，这种問題通常称为**柯西問題或初值問題**。

应該指出，虽然我們习慣上总是称方程 (1,1,3) 为热传导方程，但在生产实际中还有很多物理現象都可以用这种方程来描述。例如在电学中海底电纜的电压 e 滿足

$$\frac{\partial e}{\partial t}=K\frac{\partial^2 e}{\partial x^2},$$

其中 $K=RC$，R 为电阻，C 为电容。又如导电綫圈所围的柱体內的磁場 H 滿足

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right),$$

其中 $a^2=\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$，$c$ 是光速，μ 是磁导率，σ 是电导率。又如在化学中，研究分子在液体中的扩散現象时，溶质的浓度 C 要滿足

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

其中 D 是扩散系数。

§2. 拉普拉斯方程及其定解条件

在前面所研究的溫度分布問題中，如果經过相当长时間后，物体內各点溫度随时間的推移而发生的变化已不显著，我們就說这时溫度分布趋于定常。数学上近似可用 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ 表示。因此这时方程(1,1,3)变为

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。\qquad (1,2,1)$$

通常称这方程为**拉普拉斯方程**；符号 Δ 称为**拉普拉斯算子**。

对于一个具体的物体要确定它的內部定常溫度分布，需要給出边界条件，这些条件仍是(1,1,5)—(1,1,7)的形式，只是其中函数都与 t 无关，此时，这三种边值問題依次称为**狄里赫利問題**、**諾意曼問題**和**洛平問題**。

和前面一样，拉普拉斯方程所能描述的絕不只是定常的溫度分布規律，还有許多其他現象，例如不可压縮流体的无旋运动等都可用拉普拉斯方程描述。

§3. 弦的微小横振动方程及其定解条件

这一节考虑的是一个古典的問題，早在十八世紀就有很多人考虑过。在这問題中方程的推导是簡单的，但也是有典型意义的。

我們考虑两端拉紧的柔顺輕弦的微小横振动，所謂横振动是指弦的运动发生在一个平面內，而且弦上各点的位移与弦的平衡位置垂直。取弦的平衡位置为 Ox 軸，弦上各点的位移用 $u(x,t)$ 表示；在有些情况下，(例如乐器上的弦被敲击而振动时)，$u_x^2 \ll 1$，这时我們說弦的振动是微小的而认为 $1+u_x^2=1$。

如果在某一点 x 把弦截为两部份，則右边部份給左边部份的影响表現为张力 $\boldsymbol{T}(x,t)$，在弦是柔顺的情况下，它不抵抗弯曲，因此张力沿切綫方向。

我們現在在弦上任取一段 $[x_1, x_2]$，分别研究这段弦沿 ox 方向和 ou 方向的运动。

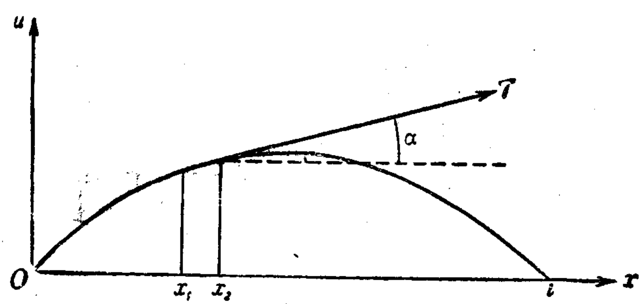

图 1-1

沿 ox 方向：这段弦在 $[t_1, t_2]$ 时間內所受的衝量为

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)\cos\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\cos\alpha(x_1,t)]dt,$$

其中 $\alpha(x,t)$ 是张力 $\boldsymbol{T}(x,t)$与 Ox 軸的夹角。由于弦上各点的位移都垂直于 Ox 軸，故沿 Ox 方向各点速度皆等于 0。因此根据在 Ox 方向的动量守恒定律，有

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)\cos\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\cos\alpha(x_1,t)]dt=0 \tag{1,3,1}$$

沿 Ou 方向，这段弦在 $[t_1,t_2]$ 时間內所受的衝量为

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t)]dt,$$

而它在这段时間內沿 Ou 方向动量的变化为

$$\int_{x_1}^{x_2}[\rho(x,t_2)u_t(x,t_2)-\rho(x,t_1)u_t(x,t_1)]dx。$$

由于沿 Ou 方向动量守恒，故得

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t)]dt$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}[\rho(x,t_2)u_t(x,t_2)-\rho(x,t_1)u_t(x,t_1)]dx。\tag{1,3,2}$$

現在我們将 (1,3,1),(1,3,2) 进一步化簡。由于 $\alpha(x,t)$ 是张力 $\boldsymbol{T}(x,t)$ 与 Ox 軸的夹角，所以

$$\cos\alpha(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\approx 1,$$

$$\sin\alpha(x,t)=\frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\approx u_x(x,t)。$$

因此，在我們考慮的精确范围內，(1,3,1) 与 (1,3,2)可写为

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)-T(x_1,t)]\,dt=0,$$

与

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2\,t)\,u_x(x_2,t)-T(x_1,t)\,u_x(x_1,t)]dt$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}[\rho(x,t_2)u_t(x,t_2)-\rho(x,t_1)u_t(x,t_1)]\,dx,$$

亦即
$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial T}{\partial x}dxdt=0, \tag{1,3,3}$$

与

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt=\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)dtdx。 \tag{1,3,4}$$

由于 $[x_1,x_2]$ 和 $[t_1,t_2]$ 皆任意，故有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial x}=0, & (1,3,5)\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)。 & (1,3,6)\end{cases}$$

由 (1,3,5) 知 T 与 x 无关。实际上，在我們所作的假設下，T 与 t 也无关，因为振动过程中弦长是

$$s=\int_0^l\sqrt{1+u_x^2}\,dx\approx\int_0^l dx=l,$$

它表明在我們所取的精确范围內，应认为弦在振动过程中并未伸长，因此，由虎克定律，知道弦上每点的张力 T 的数值不随时間而变。

如果弦是均匀的，則 $\rho=$常数。我們令 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$，則 (1,3,6) 可写为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}。 \tag{1,3,7}$$

这就是通常所謂**弦振动方程**。如果弦受有沿 ou 方向的外力，在时刻 t 弦上 x 点的力密度为 $f(x,t)$，則方程 (1,3,7) 应改为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t)。 \tag{1,3,8}$$

注　如果研究的是柔順薄膜的微小横振动，用类似的方法可以得到方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)。$$

不論弦多长，不論端点受什么样的約束，也不論弦开始振动时情况怎样，在振动过程中每一时刻 t，弦上点 x 处的位移 $u(x,t)$ 都滿足方程(1,3,7) 或 (1,3,8)，但一个具体的弦在一个确定的振动过程中的状态必然依賴于弦的长度、弦在两端点受約束的情况以及开始时弦上各点的位移和初速度。因此为了确定具体的振动状态必須附加所謂初始条件和边界条件。

設弦在开始时各点的位移为 $\varphi(x)$，初速度为 $\psi(x)$，則 u 应滿足初始条件

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),$$
$$u_t(x,\ 0)=\psi(x)。$$

如在整个过程中弦的两端保持固定，則 u 应滿足边界条件

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0。\qquad (1,3,9)$$

如弦的两端被縛在两个与 ox 軸垂直的弹簧上，弹簧的弹性系数分别为 k_0 和 k_l，則 u 在 $x=0$ 和 $x=l$ 两端分别滿足边界条件

$$\left.\begin{aligned}Tu_x(0,\ t)-k_0\,u(0,\ t)=0\\ Tu_x(l,\ t)+k_l\,u(l,\ t)=0\end{aligned}\right\}① \qquad (1,3,10)$$

如 $k_0\ll T$，$k_l\ll T$，則 (1,3,10) 可近似表作

$$u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0. \qquad (1,3,11)$$

这时弹簧的約束力非常小，我們説弦的两端是“自由”的。类似地，若 $k_0\gg T$，$k_l\gg T$，則 (1,3,10) 可用 (1,3,9) 近似表示。

① 推导的方法与推导溫度滿足的边界条件时类似，在弦上靠端点 l 处任取一段 $[x_1,\ l]$，在任一时段 $[t_1,\ t_2]$ 内沿 ou 方向用动量守恆定律，得

$$\int_{t_1}^{t_2}[-T\sin\alpha(x_1\ ,t)-k_l\ u(l,\ t)]dt=\int_{x_1}^{l}\rho[u_t\ (x,t_2)-u_t\ (x,\ t_1)]dx。$$

設 u 及其一阶导数連續到边界，則簡化后，令 $x_1\to l$，得

$$\int_{t_1}^{t_2}[-Tu_x\ (l,\ t)-k_l\ u(l,\ t)]dt=0。$$

由于 $[t_1,\ t_2]$ 任意，故 $Tu_x\ (l,t)+k_l\ u(l,t)=0$。

如果在弦的两端还加有持續的外力，則 (1,3,10) 应改为

$$Tu_x(0,t)-k_0u(0,t)=\mu(t),$$
$$Tu_x(l,t)+k_lu(l,t)=\nu(t)。$$

因此，一般地讲，弦振动方程的边界条件也是三种形式：

1) $$u(0,t)=\mu(t) \qquad u(l,t)=\nu(t), \tag{1,3,12}$$

2) $$u_x(0,t)=\mu(t) \qquad u_x(l,t)=\nu(t), \tag{1,3,13}$$

3) $$Tu_x(0,t)-k_0u(0,t)=\mu(t),$$
$$Tu_x(l,t)+k_lu(l,t)=\nu(t)。$$
$$T,k_0,k_l\ 皆>0 \tag{1,3,14}$$

分别叫作第一、第二、第三边界条件。

和 §1—§2 一样，自然界中，不只弦振动时其位移滿足弦振动方程，还有許多物理过程也滿足这一方程，例如气体在細长管子中受小扰动时，管中气体的压力 p 滿足

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

其中 $a^2=\frac{kp_0}{\rho_0}$，p_0 和 ρ_0 是初始时刻气体的压力和密度；$k=\frac{c_p}{c_v}$，c_p 是定压比热，c_v 是定容比热 (参看附录 §8 声压方程的推导)。

§4. 基本定义

一个含有 N 个未知函数 $u_1,u_2,\cdots u_N$ 及其偏导数的偏微分方程中，如果含有 n 阶导数而不含有比 n 阶再高的导数，就叫它作一个 n 阶方程。一个偏微分方程組的阶就是指其中所有方程的阶的最大数。

如果一个偏微分方程对所有的未知函数及其导数来説是綫性的，我們就把它叫作綫性偏微分方程。在 §1—§3 中所导出的

那些方程都是二阶綫性方程。如果一个偏微分方程对未知函数的所有最高阶导数来說是綫性的，我們就把它叫作拟綫性偏微分方程。例如方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0$$

对未知函数 u 来說是一个二阶拟綫性方程。方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2u$$

对未知函数 u 来說是一个二阶綫性方程。而方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$$

对于函数 u 来說旣非綫性的又非拟綫性的。

所謂一个偏微分方程的定解問題的解(古典解)是指这样一組函数，它們本身和它們的出現在定解条件中的偏导数都在所考慮的閉区域[①]上連續；而在方程中所出現的它們的偏导数都在开区域內部連續。同时在区域內部它們滿足方程[②]。而当点从区域內部用任意方式趋近边界时，它們滿足定解条件。例如下列問題

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), & (x,y,z)\in G,\quad t>0,\\ u(x,y,z,0)=u_0(x,y,z), & (x,y,z)\in G,\\ \left[k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_S=\varphi(x,y,z,t), & (x,y,z)\in S,\quad t>0,\end{cases}$$

的解卽指这样一个函数 $u(x,\ y,\ z,\ t)$：首先 $u(x,\ y,\ z,\ t)$ 在 $(x,y,z)\in\bar{G}$，$t\geqslant 0$ 处連續，$\frac{\partial u}{\partial n}$[③]在 S 上及 $t\geqslant 0$ 时連續；其次 $\frac{\partial u}{\partial t}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 在 $(x,y,z)\in G$，$t>0$ 处連續；同时用 $u(x,y,z,t)$

① 所考慮的区域是指空間区域与时間区域的拓朴乘积。

② 卽用它們替代方程中的未知函数后，得到在区域內部成立的一个恒等式。

③ 严格地說，这里的法綫导数是指正規法綫导数。可参看索波列夫，数学物理方程，1958年，152頁。