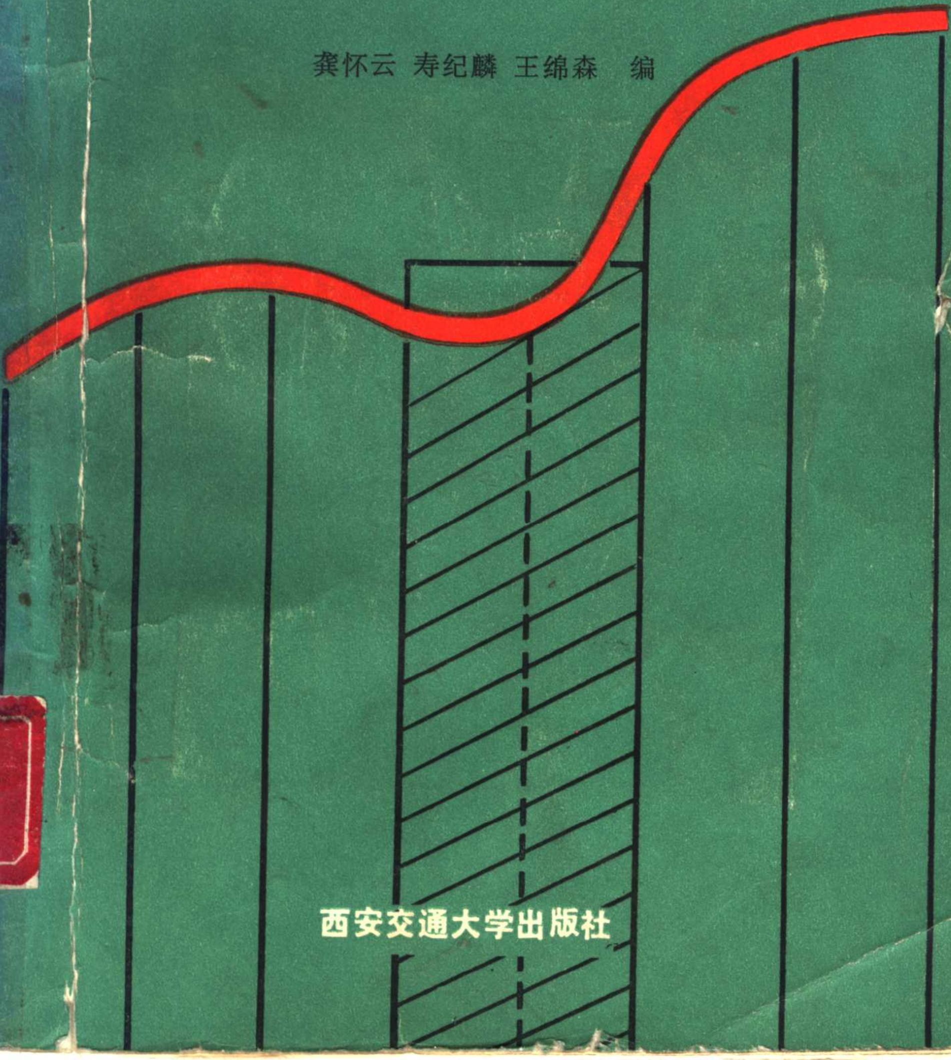
实变函数与泛函分析引论

龚怀云 寿纪麟 王绵森 编



西安交通大学出版社

实变函数与泛函分析引论

龚怀云　寿纪麟　王绵森

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书前三章是实变函数，主要内容有集合与点集，勒贝格测度与可测函数，勒贝格积分理论。后四章是泛函分析，主要介绍距离空间，巴拿赫空间、希尔伯特空间及其线性算子，泛函分析的基本定理以及有界线性算子的谱理论。每章后均配有一定数量的习题。

本书是为应用数学和计算数学专业本科生编写的教材，也可作为综合大学和师范院校数学系的教学参考书，对于理工科院校非数学专业的研究生也不失为一本有价值的参考书。

实变函数与泛函分析引论

龚怀云　寿纪麟　王绵森

责任编辑　王延华

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行　　各地新华书店经售

*

开本787×1092　1/32　印张 13.125　字数：277千字

1990年5月第1版　　1990年5月第1次印刷

印数：1——2000

ISBN7-5605-0254-7/O·49　　定价：2.60元

前　言

本书包括实变函数和泛函分析两部分内容。前三章是实变函数，简要地介绍了集合与点集，勒贝格测度与可测函数以及勒贝格积分理论。这一部分内容以建立勒贝格积分理论为线索和重点，为进一步学习泛函分析和现代数学的其他分支提供必要的基础。后四章是泛函分析。泛函分析是本世纪30年代形成的一个重要的数学分支，它是研究无穷维空间及其上的算子的一门分析学科。60年代以后，泛函分析不但在其自身理论上有了深入的发展，而且被日益广泛地应用于自然科学，工程技术科学和社会科学的众多领域中，成为处理具有无穷多自由度的物理系统的一个重要数学工具，因而是大学生将来从事应用数学和计算数学工作的必不可少的理论基础。本书介绍泛函分析的基本概念和理论中最常用的一些知识，包括距离空间，巴拿赫空间、希尔伯特空间及其线性算子，泛函分析的几个基本定理以及有界线性算子的谱理论等。

目前，国内已经出版了一些为基础数学专业编写的实变函数和泛函分析教材，但为应用数学和计算数学专业编写的教材至今仍付阙如。1985年，在全国高等工科院校应用数学专业（含计算数学）教材编审委员会的武汉会议上，制定了这两个专业用的《实变函数与泛函分析》教学大纲（草案）。本书就是根据这个大纲的要求以及编者多年为这两个

专业讲授该课程的经验编写而成的。在内容上，适当减少了实变函数的内容，着重介绍泛函分析的知识；在体系安排上，将泛函分析中的空间部分相对集中，而将几个基本定理和算子的谱理论分别另立两章放在最后，这样做有利于难点分散，也便于不同院校和专业根据各自的要求和学时数灵活选用。书中对于超出要求的部分内容，均以*号为标志，初学者可以跳过不读，并不影响内容的连贯性。讲完本书的基本内容（指前六章中的大部分章节）估计约需80个学时，而讲完本书的全部内容，大约需用120个学时。

本书经全国高等工科院校应用数学专业教材编审委员会审查，认为：全书内容充实，逻辑严谨，文字流畅，叙述细致。实变函数部分处理简洁，重点突出；泛函分析部分的处理有利于分散难点，具有自己的特色。本书可以作为应用数学专业的教材。此外编委会也对本书提出了一些宝贵的修改意见，编者对此表示衷心感谢！以本书作为教材的张继平副教授和林熙副教授通过教学实践，曾提供了不少细致的有益的修改意见，使得本书增色不少，在此对她们一并致谢！

限于我们的学识水平，书中不妥之处在所难免，恳请专家学者不吝指正！

编　者

（1988年9月于西安交通大学）

目　　录

第一章　集合与点集

由德国数学家康托(Cantor)所创立的集合论，已发展成为数学的一个独立分支，它的基本概念和方法已渗透到现代数学的许多领域中。作为学习实变函数和泛函分析的准备，本章先介绍集合论中的一些常用的基本知识。

第一节　集合及其运算

§1.1 集合的概念

在日常生活中，集合的概念是不难理解的。例如，某班学生的全体；某车间车床的全体；有理数的全体等都可以构成一个集合。但是，正如几何学中的"点"与"直线"一样，集合是数学中最基本的概念之一，要给它下一个精确的数学定义，却并非轻而易举的事。本书不讨论集合的严格定义，而采用朴素的描述方法，即把**集合**（或**集**）看成是具有某种确定性质的事物或对象的全体，组成集合的那些个别事物或对象称为集合的**元素**（或**元**）。下面再举几个集合的例子。

例 1.1　方程 $x^2-1=0$ 的所有解构成一个集合，它的元素是实数 1 与 -1。

例 1.2 平面 R^2 中单位圆周上的点的全体构成一个集合，它的元素是圆周上的点。

例 1.3 闭区间$[a,b]$上的连续函数的全体构成一个集合，记作$C[a,b]$，它的元素是$[a,b]$上的连续函数。

例 1.4 直线上所有开区间也构成一个集合，它的元素就是开区间。

值得注意的是，每当我们给出一个集合时，必须同时指明它的元素所具有的“确定性质”，使我们能够根据这种性质判断哪些是该集合的元素，哪些不是。例如，某班高个子同学的全体就不能构成一个集合，因为“高个子”这个性质是不 Fuzzy 确定的。

通常，用大写英文字母A,B,C……表示集合，用小写英文字母a,b,c……表示集合的元素。

设A是一个集合，若x是A的一个元素，则说x**属于**A，记作$x\in A$；若x不是A的一个元素，则说x**不属于**A，记作$x\overline{\in}A$。

由有限个元素组成的集合，称为**有限集**，如例 1.1 中的集合就是一个有限集。不含任何元素的集合称为**空集**，记作ϕ，如方程$x^2+1=0$的实数解的全体是一个空集。既不是空集又不是有限集的集合称为**无限集**。例1.2，例1.3与例1.4中的集合都是无限集，无限集是我们今后研究的主要对象。

集合有两种表示法：一种是列举法，就是把它的所有元素写在一个花括号里。例如，例 1.1 中的集合可以表示为$S=\{-1,1\}$，自然数的集合可以表示为$N=\{1, 2, 3, \cdots, n,\cdots\}$；另一种方法是指明集合中元素所具有的确定性质，就是说，若A是由具有性质$P(x)$的所有元素构成的集合，我们用

$$A=\{x \mid x\text{具有性质}P(x)\}$$

来表示。例如，例 1.1 中的集合又可表示为

$$S=\{x \mid x^2-1=0\}$$

例 1.3 中集合 $C[a,b]$ 可以表示为

$$C[a,b]=\{x(t) \mid x(t)\text{为区间}[a,b]\text{上的连续函数}\}$$

下面讨论集合之间的关系。

设有集合 A 与 B，若集 A 中的每个元素都属于集 B，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A **包含于** B 或 B **包含** A。例如，自然数集 N 是实数集 R 的一个子集。若 $A\subset B$，并且至少存在 B 的一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**。对于任何集合 A，显然有 $A\subset A$，$\phi\subset A$。若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$。相等的两个集合具有完全相同的元素，例如，

$$\{x \mid x\in R,\ x^2-4\geqslant 0,\ x^2-4x<0\}=\{x \mid 2\leqslant x<4\}$$

§1.2 集合的运算

设 A 与 B 是两个集合。由集 A 与集 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**并(或和)集**，简称为 A、B 的**并(或和)**，记作 $A\cup B$。它可以表示为

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\} \tag{1.1}$$

可以直观地将 $A\cup B$ 表示如图 1.1(a)。由同时属于集 A 与集 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**交**(或**通**)**集**，简称为 A、B 的**交**(或**通**)，记作 $A\cap B$，如图1.1(b)。$A\cap B$ 可以表示为

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\in B\} \tag{1.2}$$

由属于集 A 但不属于集 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B

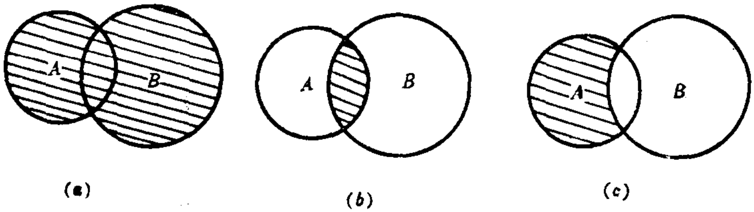


图 1·1

的**差集**，记作 $A\setminus B$，如图 1.1(c)，$A\setminus B$ 可以表示为

$$A\setminus B=\{x|x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\} \tag{1.3}$$

若 $B\subset A$，则称差集 $A\setminus B$ 为 B 关于 A 的**余**(或**补**)**集**，记作 $\mathscr{C}_A B$。通常，在我们研究的问题中，所讨论的集合往往是某个集合 X（称为**基本集**）的子集，差集 $X\setminus A$ 就简称为 A 的**余**（或**补**）**集**，记作 $\mathscr{C}A$ 或 A^c。

若 $A\cap B=\phi$，我们就说 A 与 B 不相交；若 $A\cap B\neq\phi$，就说 A 与 B 相交。

利用上述有关概念，不难证明下面几个简单事实：

1) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

2) $A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$；

3) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$，$A\setminus B=\phi$；

4) 设 X 为基本集，则

$$A\cup\mathscr{C}A=X,\quad A\cap\mathscr{C}A=\phi$$

$$\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A,\quad A\setminus B=A\cap\mathscr{C}B$$

5) 若 $A\subset B$，则 $\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$。

集合的运算满足下面基本法则。

定理 1.1 设 A,B 与 C 为三个任意集合，则有

1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A \quad A\cap B=B\cap A$$

2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$$

3) 分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

$$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$$

证 我们只证明分配律的第一个等式，其余等式的证明方法相同，请读者自己去证。

先证明包含关系

$$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

设 $x\in(A\cup B)\cap C$，则 $x\in(A\cup B)$ 且 $x\in C$，从而 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\in C$。这就是说，$x\in A$ 且 $x\in C$，或 $x\in B$ 且 $x\in C$，故 $x\in A\cap C$，或 $x\in B\cap C$，所以 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，上述包含关系成立。

再证明相反的包含关系

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$$

也成立。事实上，设 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，则 $x\in A\cap C$，或 $x\in B\cap C$，从而 $x\in A$ 且 $x\in C$，或 $x\in B$ 且 $x\in C$。这就是说，$x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\in C$，故 $x\in A\cup B$ 且 $x\in C$，所以 $x\in(A\cup B)\cap C$。

根据集合相等的定义，即知所要证明的等式成立。

集合的并与交的概念可以推广到任意多（有限多或无限

多）个集合所组成的集族的情形。设$\{A_\alpha | \alpha \in I\}$是一个集族，其中$\alpha$为集合的指标，它在指标集$I$中变化，这族集合的并与交分别定义为：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \text{存在 } \alpha \in I, \text{ 使 } x \in A_\alpha\} \tag{1.4}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \text{对一切 } \alpha \in I, \text{ 有 } x \in A_\alpha\} \tag{1.5}$$

例 1.5 设$A_\alpha = \{x | \alpha \leqslant x < \alpha + 1\}$，指标集$I$是实数集，则

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = (-\infty, \infty)$$

例 1.6 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实函数，则

$$\{x | x \in [a,b], f(x) > c\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x | x \in [a,b], \quad f(x) \geqslant c + \frac{1}{n}\right\}$$

$$\{x | x \in [a,b], f(x) \geqslant c\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x | x \in [a,b], \quad f(x) > c - \frac{1}{n}\right\}$$

集合论中的一个重要定理就是下面的**笛摩根**(De Morgen)**对偶原理**，它使我们可以将关于集合的某种性质转移到它的余集上去。

定理 1.2 设x为基本集，$\{A_\alpha | \alpha \in I\}$为任一集族，则

1) $\mathscr{C}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (\mathscr{C} A_\alpha)$；

2) $\mathscr{C}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (\mathscr{C} A_\alpha)$

这就是说，集族中所有集合并的余集等于各个集的余集的交；而集族中所有集合交的余集等于各个集的余集的并。

证 1) 设$x \in \mathscr{C}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$，则$x \bar{\in} \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，即对每个

$\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha$，就是说，对于每个$\alpha\in I$，$x\in\mathscr{C}A_\alpha$，故$x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$，因此我们有

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$$

显然，上述推理可以反方向进行，因此，相反的包含关系也成立，故1)得证。

2) 根据1)有

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(\mathscr{C}\mathscr{C}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$$

从而得

$$\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(\mathscr{C}A_\alpha)$$

在集合论中，证明集合运算等式的成立通常有两种方法：一种是根据集合的交、并、差（余）以及相等、包含等有关概念的定义进行逻辑推理，如定理1.1及定理1.2的1)中所用的证法，这是基本方法；另一种方法是利用集合运算的各种法则（为交换律、结合律、分配律及对偶原理等）以及已经证明的集合运算等式直接进行运算推理，如定理1.2的2)中所用的证法，这种方法常常比较简捷，现再举一例。

例 1.7 证明 $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$

证
$$\begin{aligned}A\setminus(A\setminus B)&=A\cap\mathscr{C}(A\setminus B)=A\cap\mathscr{C}(A\cap\mathscr{C}B)\\&=A\cap(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}\mathscr{C}B)=A\cap(\mathscr{C}A\cup B)\\&=(A\cap\mathscr{C}A)\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)\\&=A\cap B\end{aligned}$$

下面我们研究集合列（简称集列）的极限集。

定义 1.1 设$\{A_n\}$是一个集列。由同时属于集列$\{A_n\}$中无限多个集的所有元素构成的集合，称为该集列的**上限**