工程振动与测试技术

刘习军　贾启芬　张文德　编著

-43

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是面向21世纪力学系列课程教材。

本书共分两篇。第一篇系统地介绍了结构振动和机械振动的基本原理及其在工程中的应用。内容主要包括：单自由度、多自由度和弹性体的自由振动，受迫振动及响应的计算方法。第二篇论述了有关工程振动测试技术的基本理论及现代工程测试技术在工程中的实际应用。内容主要包括：传感器、测试系统及激振设备的工作原理、应用及校准，基本参数的测量及模拟平稳信号分析、数字信号分析、实验模态分析简介及工程应用实例。

本书内容丰富，通俗易懂，由浅入深，以务实为根本，既可作为高等工科院校的本科生和研究生的工程振动与测试技术课程的教材或教学参考书，也适合于从事机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等的工程技术人员，在进行理论研究和实验研究工作中参考和自学。

图书在版编目（CIP）数据

工程振动与测试技术/刘习军，贾启芬编著．－天津：天津大学出版社，1999

ISBN 7－5618－1240－X

Ⅰ．工…　Ⅱ．①刘…　②贾…　Ⅲ．①工程力学－振动理论　②工程力学－振动测量　Ⅳ．TB123

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第43206号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
电　话　发行部：022－27403647　邮购部：022－27402742
印　刷　天津市宝坻县第二印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　21
字　数　530千
版　次　1999年9月第1版
印　次　1999年9月第1次
印　数　1－2 000
定　价　23.00元

第一篇　工程振动力学

引　　言

机械振动是指物体在其稳定的平衡位置附近所作的往复运动。这是物体的一种特殊形式的运动。运动物体的位移、速度和加速度等物理量都是随时间往复变化的。

机械振动是一种常见的物理现象，如桥梁、机床的振动，钟摆的摆动，飞机机翼的颤动，汽车运行时发动机和车体的振动等等。振动的存在会影响机器的正常运转，使机床的加工精度、精密仪器的灵敏度下降，严重的还会引发机器或建筑结构的毁坏；此外，还会引发噪音、污染环境，这是不利的一面。另一方面，人们利用机械振动现象的特征，设计制造了众多的机械设备和仪器仪表，如振动筛选机、振动研磨机、振动输送机、振动打桩机、混凝土振捣器以及测量传感器、钟表计时仪器、振子示波器等等。随着机器设备向着大型、高速高效和自动化诸方面发展，需要分析处理的振动问题愈来愈重要。因此，掌握机械振动的基本理论，正确地运用它，对于设计制造安全可靠和性能优良的机器、仪器仪表、建筑结构以及各种交通运输工具，并有效地抑制、防止振动带来的危害是十分必要的。

为了便于研究振动现象的基本特征，需要将研究对象进行适当地简化和抽象，形成一种分析研究振动现象的理想化模型，即所谓**振动系统**。振动系统可以分为两大类：**连续系统**与**离散系统**。实际工程结构的物理参数（例如板壳、梁、轴等的质量及弹性）一般是连续分布的，具有这种特点的模型系统称为连续系统或**分布参数系统**。绝大多数场合中，为了能够分析或者便于分析，需要通过适当的准则将分布参数“凝缩”成有限个离散的参数，这样便得到离散系统。

由于所具有的自由度数目上的区别，连续系统又称为**无限自由度系统**，离散系统则称为**多自由度系统**，它的最简单情况是**单自由度系统**。

分析连续系统与离散系统的振动的数学工具有所不同，前者借助于偏微分方程，后者借助于常微分方程。

离散系统中的一种典型是由有限个惯性元件、弹性元件及阻尼元件等组成的系统，这类系统称为**集中参数系统**。其中，惯性元件是对系统的惯性的抽象，表现为仅计及质量的质点或者仅计及转动惯量和质量的刚体；弹性元件是对系统的弹性的抽象，表现为不计质量的弹簧、扭转弹簧或者仅具有某种刚度（如抗弯刚度、抗扭刚度等）但不具有质量的梁段、轴段等；阻尼元件既不具有惯性，也不具有弹性，它是对系统中的阻尼因素或有意识施加的阻尼器件的抽象，通常表示为阻尼缓冲器。阻尼元件是一种耗能元件，主要以热能形式消耗振动过程中的机械能，这与惯性元件能贮存动能、弹性元件能贮存弹性势能在性质上完全不同。

实际振动系统是很复杂的，以系统的自由度数的不同，可分为单自由度系统、两个和多个自由度系统以及弹性体系统等等。从运动微分方程中所含参数的性质的不同，可分为线性系统和非线性系统。线性系统是在系统的运动微分方程式中，只包含位移、速度的一次方项。如果还包含位移、速度的二阶或高阶项则是非线性系统。工程实际中有很多振动系统

（例如单摆）未必是线性系统，但是，在微幅振动的情况下，略去高阶项，线性化系统就是它的理想化模型。本书只研究线性系统的振动规律。值得指出的是，有关线性振动系统的结论，不能无条件地引申到非线性系统中去，否则，不仅在分析结果上会导致过大的误差，更重要的是无法预示或解释实际的振动系统中可能出现的非线性现象。按系统的受激励的情况分类，振动可分为自由振动、衰减振动和受迫振动。此外，还有周期振动、非周期振动和随机振动等等。

本篇主要介绍单自由度系统、多自由度系统和弹性体的自由振动和受迫振动，着重讨论它们的基本理论、分析方法及其在工程中的应用。

第一章　振动的基本理论

周期运动的最简单形式是**简谐振动**。这种振动的表示方法及特点是描述其它振动形式的基础。一般的周期振动可以借助傅里叶级数表示成一系列简谐振动的叠加，该过程称为**谐波分析**。非周期振动则需要通过傅里叶积分作谐波分析。

第一节　简谐振动

一、简谐振动的表示

用时间 t 的正弦或余弦函数表示的运动规律，称为**简谐振动**。其一般表达式为

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1-1}$$

式中 A、α、ω 分别称为**振幅**、**初相位**和**圆频率**，它们是表征简谐振动的**三要素**。

一次振动循环所需的时间 T 称为**周期**；单位时间内振动循环的次数 f 称为**频率**。它们与圆频率的关系为

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1-2}$$

式中，周期 T 的单位为秒(s)，频率 f 的单位为赫兹(Hz)，圆频率 ω 的单位为弧度/秒(rad/s)。图 1－1 描述了式(1－1)所示的运动，它可看成是该图中左边半径为 A 的圆上一点作等角速度 ω 的运动时在 x 轴上的投影。

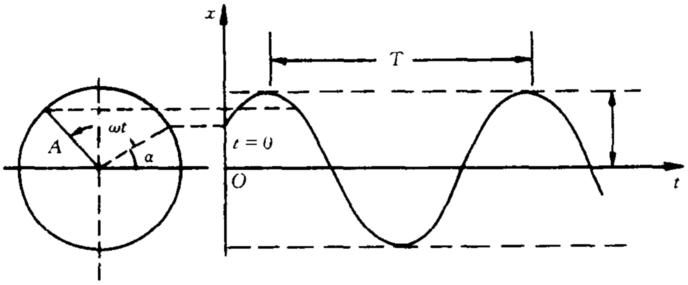


图 1－1　简谐振动的时间历程曲线

如果视 x 为位移，则简谐振动的速度和加速度就是位移表达式(1－1)关于时间 t 的一阶和二阶导数，即

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \alpha) = A\omega\sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \tag{1-3}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = A\omega^2\sin(\omega t + \alpha + \pi) \tag{1-4}$$

可见，若位移为简谐函数，其速度和加速度也是简谐函数，却具有相同的频率。只不过在相位上，速度和加速度分别超前位移 $\frac{\pi}{2}$ 和 π。比较式(1－4)与式(1－1)，可得到加速度与位移

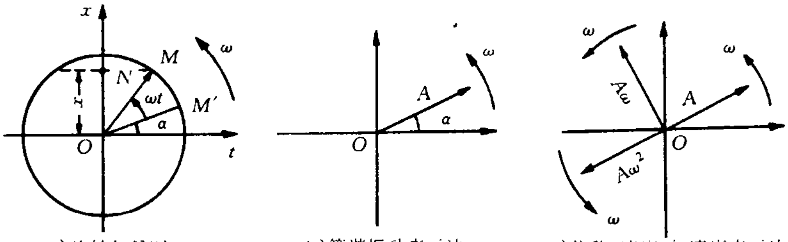
试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

有如下关系

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1-5}$$

即简谐振动的加速度大小与位移成正比，但方向总是与位移相反，始终指向平衡位置。这是简谐振动的重要特征。

在振动分析中，简谐振动可以用平面上的**旋转矢量**表示。旋转矢量 $\boldsymbol{OM}$ 的模为振幅 A，角速度为圆频率 ω，任一瞬时 $\boldsymbol{OM}$ 在纵轴上的投影 ON 即为式(1－1)中的简谐振动表达式，如图 1－2a）所示。通常将这个旋转矢量画成如图 1－2b）所示。利用旋转矢量能直观形象地表示出上述位移、速度和加速度之间的关系，如图 1－2c）所示。



a）旋转矢量图　b）简谐振动表示法　c）位移、速度、加速度表示法

图 1－2　用旋转矢量表示简谐振动示意图

简谐振动也可以用复数表示。记 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，复数

$$Z = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha)+\mathrm{j}A\sin(\omega t+\alpha) \tag{1-6}$$

复数 Z 的实部和虚部可分别表示为

$$\mathrm{Re}(z) = A\cos(\omega t+\alpha)$$

$$\mathrm{Im}(z) = A\sin(\omega t+\alpha)$$

因此，简谐振动的位移 x 与它的复数表示 Z 的关系可写为

$$x = \mathrm{Im}(z) \tag{1-7}$$

由于

$$\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, \qquad -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$$

用复数表示的简谐振动的速度、加速度为

$$\dot{x} = \mathrm{Im}[\mathrm{j}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}] = \mathrm{Im}[A\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})}] \tag{1-8}$$

$$\ddot{x} = \mathrm{Im}[-A\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}] = \mathrm{Im}[A\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha+\pi)}] \tag{1-9}$$

式(1－6)也可写成

$$Z = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \overline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1-10}$$

式中

$$\overline{A} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$$

是一复数，称为复振幅。它包含了振动的振幅和相角两个信息。用复指数形式描述简谐振动将给运算带来很多方便。

二、简谐振动的合成

1．两个同频率振动的合成

有两个同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1\sin(\omega t+\alpha_1), \qquad x_2 = A_2\sin(\omega t+\alpha_2)$$

这两个简谐振动对应的旋转矢量分别是 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$。由于 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 的角速度相等，旋转时它们之间的夹角（$\alpha_1-\alpha_2$）保持不变，它们的合矢量 $\boldsymbol{A}$ 也必然以相同的角速度 ω 作匀速转动，如图 1－3 所示。由矢量的投影定理可知，合矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影等于其分矢量 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 在同一轴上投影的代数和，于是得出

$$x=A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(\omega t+\alpha_2)=A\sin(\omega t+\alpha) \tag{1-11}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$$

$$A=\sqrt{(A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2)^2+(A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2)^2}$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}\right) \tag{1-12}$$

即两个同频率简谐振动合成的结果仍然是简谐振动，其角频率与原来简谐振动的相同，其振幅和初相角用式(1－12)确定。

2．两个不同频率振动的合成

有两个不同频率的简谐振动

$$x_1=A_1\sin\omega_1 t,\quad x_2=A_2\sin\omega_2 t \tag{A}$$

若 ω_1 与 ω_2 之比是有理数，即

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n} \tag{B}$$

式(B)经变换可写为

$$m\,\frac{2\pi}{\omega_1}=n\,\frac{2\pi}{\omega_2} \tag{C}$$

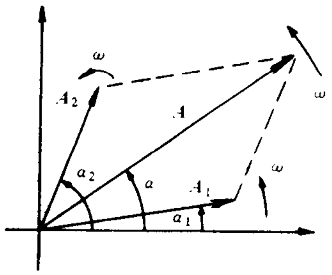


图 1－3　同频率简谐振动矢量合成示意图

其中$\dfrac{2\pi}{\omega_1}$和$\dfrac{2\pi}{\omega_2}$分别是两个简谐振动的周期 T_1 和 T_2，取

$$T=mT_1=nT_2 \tag{D}$$

并且记 $x=x_1+x_2$，则

$$\begin{aligned}x(t+T)&=x_1(t+T)+x_2(t+T)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+nT_2)\\&=x_1(t)+x_2(t)=x(t)\end{aligned}$$

可见 T 就是 x_1 与 x_2 合成的周期。所以，**两个不同频率的简谐振动的合成不再是简谐振动．当频率比为有理数时，可合成为周期振动，合成振动的周期是两个简谐振动周期的最小公倍数．**

若 ω_1 与 ω_2 之比是无理数，则找不到这样一个周期。因此，**其合成振动是非周期的**

若 $\omega_1\approx\omega_2$，对 $A_1=A_2=A$，则有

$$\begin{aligned}x&=x_1+x_2=A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t\\&=2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)t\end{aligned}$$

令

$$\omega=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2),\quad \delta\omega=\omega_2-\omega_1$$

上式可表示为

$$x=2A\cos\frac{\delta\omega}{2}t\sin\omega t \tag{1-13}$$

式中的正弦函数完成了几个循环后，余弦函数才能完成一个循环。这是一个频率为 ω 的变幅振动，振幅在 $2A$ 与零之间缓慢地周期性变化。它的包络线由

$$A(t)=2A\cos\frac{\delta\omega}{2}t \tag{1-14}$$

确定。这种特殊的振动现象称为“拍”，或者说**“拍”是一个具有慢变振幅的振动，其拍频为** $\delta\omega$，运动波形如图 1－4 所示。拍的现象在实验测量频率中是很有用的。

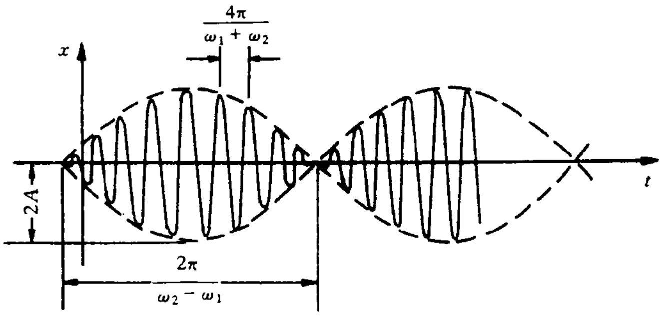


图 1－4　“拍”振示意图

第二节　周期振动的谐波分析

在工程技术中，许多振动是非简谐的，但它们是周期性的。设周期振动 $x(t)$的周期是 T，则有

$$x(t)=x(t+nT)\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{1-15}$$

根据傅里叶级数理论，任何一个周期函数如果满足狄里赫利（Dirichlet）条件，则可以展成傅氏级数，即

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \tag{1-16}$$

式中 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}$称为基频；系数 a_0、a_n、b_n 由下式确定：

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t\\ a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t\\ b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{1-17}$$

常数项$\dfrac{a_0}{2}$表示周期振动 $x(t)$在一个周期 T 中的平均值。

式(1－16)也可写成

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n) \tag{1-18}$$

式中

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\mathrm{tg}\varphi_n=\frac{a_n}{b_n},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{1-19}$$

可见，一个周期振动可视为频率顺次为基频 ω_1 及整倍数的若干或无数简谐振动分量的合成振动过程。这些分量依据 $n=1$，2，3，…分别称为基频分量、二倍频分量、三倍频分量等等。A_n 和 φ_n 即频率为 $n\omega_1$ 的简谐振动的振幅及相位角。因此，**在振动力学中将傅氏展开称为谐波分析**。

为清晰表达一个周期函数中所含各简谐分量的频率、振幅及相位角的关系，现以频率 $n\omega_1$（$n=1$，2，3，…）为横坐标，以与之对应的振幅 A_n、初相位角 φ_n 分别为纵坐标绘制图 1-5。则图 1-5a）称周期函数的**幅值频谱图**，简称**频谱图**；图 1-5b）称**相位频谱图**。图 1-5 表明，周期函数的谱线是互相分开的，故称为**离散频谱**。

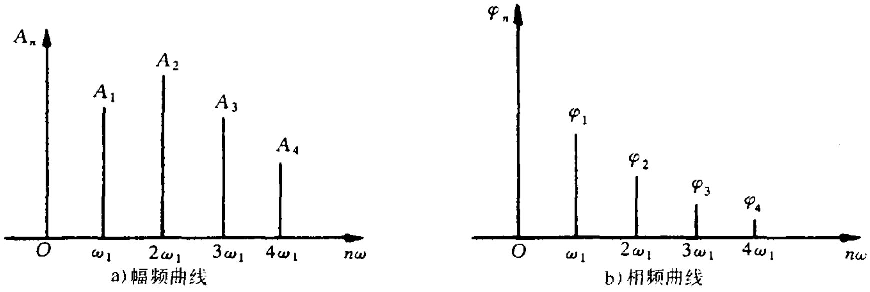


图 1-5 离散频谱图

函数的频谱，说明了组成该函数的简谐成分，反映了该周期函数的特性。这种分析振动的方法称为**频谱分析**。由于自变量由时间改变为频率，所以频谱分析实际上是由时间域转入频率域。这是将周期振动展开为傅里叶级数的另一个物理意义。

虽然周期振动的谐波分析以无穷级数出现，但一般可以用有限项近似表示周期振动。

例 1-1 已知一周期性矩形波如图 1-6 所示，试对其作谐波分析。

解：矩形波一个周期内函数 $F(t)$ 可表示为

$$F(t)=\begin{cases} f_0 & 0<t<\pi \\ -f_0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

由式(1-17)得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\mathrm{d}t=0$$

a_0 等于零，表示 $F(t)$ 的波形关于 t 轴对称，故其平均值为零。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f_0\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}f_0\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}f_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t\right]=\frac{2f_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{4f_0}{n\pi}$$

于是，得 $F(t)$ 的傅氏级数

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t=\frac{4f_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t=\frac{4f_0}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots\right)$$

上式表明,$F(t)$是奇函数，在它的傅氏级数中也只含正弦函数项。在实际的振动计算中，级数均取有限项。$F(t)$的幅值频谱如图 1－7 所示。

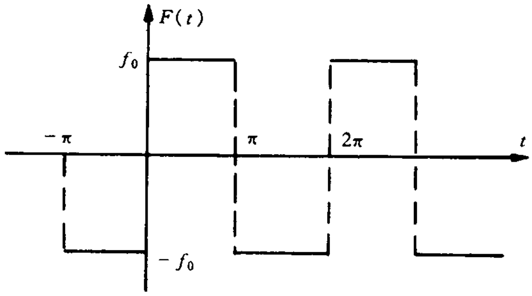


图 1－6　周期性矩形波示意图

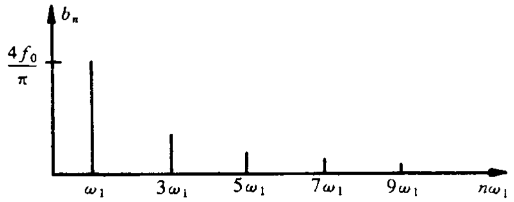


图 1－7　幅值频谱图

在以后的内容中将看到，这种谐波分析的方法是分析振动的重要方法。对能用解析式表达的周期函数，均可应用本节讲述的方法分析。对那些通过测量得到的函数，则需用数字计算机或用频谱分析仪器去完成。

第三节　非周期函数的连续频谱

如果函数$f(t)$的周期 T 无限增大，则$f(t)$称为非周期函数。傅氏积分及傅氏变换是研究非周期函数的有力手段。

由数学知，若非周期函数$f(t)$满足条件：（1）在任一有限区间满足狄氏条件；（2）在区间（$-\infty$，$+\infty$）上绝对可积，则在$f(t)$的连续点处有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega \tag{1-20}$$

上式称函数$f(t)$的**傅氏积分公式**。如令

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1-21}$$

则式（1－20）可写成

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1-22}$$

以上二式表明，$f(t)$与 $G(\omega)$可以通过积分互相表达，式（1－21）叫做$f(t)$的**傅氏变换**，记为

$$G(\omega)=\mathcal{F}[f(t)] \tag{1-23}$$

$G(\omega)$称为$f(t)$的**象函数**，它是频率 ω 的函数，式（1－22）的右端又称$G(\omega)$的**傅氏逆变换**，记为

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] \tag{1-24}$$

式(1－21)和式(1－22)构成一**傅氏变换对**。

在振动力学中，$G(\omega)$又称非周期函数$f(t)$的**频谱函数**。频谱函数的值一般是复数。它的$|G(\omega)|$称非周期函数$f(t)$的**频谱**或**幅值频谱**。与周期函数的频谱不同，非周期函数的频谱图形是频率 ω 的连续曲线，故称**连续频谱**。一般地讲，对一个非周期函数$f(t)$求傅里叶变换$G(\omega)$，即表示对$f(t)$作频谱分析。

例 1－2 试求图 1－8 所示的单个矩形脉冲的频谱图形。

解： $f(t)$可表示为

$$f(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t<-\dfrac{\tau}{2}\\ E & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & \dfrac{\tau}{2}<t<+\infty\end{cases}$$

根据式(1－21),可求得频谱函数

$$G(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

$f(t)$的傅氏积分为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

其振幅频谱

$$|G(\omega)|=2E\left|\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right|=E\tau\left|\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right|$$

频谱图如图 1－9 所示（其中只画出 $\omega\geqslant0$ 这一半）。

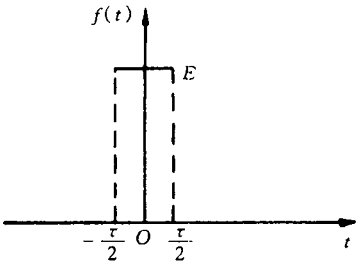


图 1－8 矩形脉冲示意图

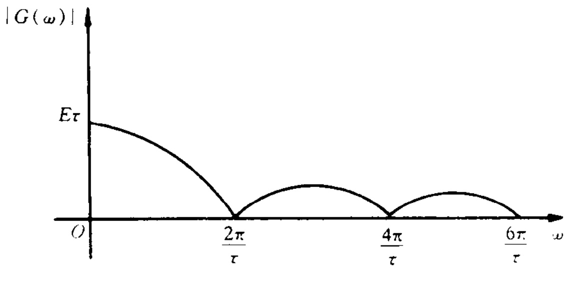


图 1－9 频谱图

傅氏积分和变换，是研究瞬态振动与随机振动的重要工具。实际应用时，可使用计算机运算或应用各种快速傅氏分析仪器(FFT)。

习 题

1－1 一个物体放在水平台面上，当台面沿铅垂方向作频率为 5 Hz 的简谐振动时，要使物体不跳离平台，对台面的振幅应有何限制？

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1-2 有一作简谐振动的物体，它通过距离平衡位置为 $x_1 = 5$ cm 及 $x_2 = 10$ cm 时的速度分别为 $v_1 = 20$ cm/s 及 $v_2 = 8$ cm/s，求其振动周期、振幅和最大速度。

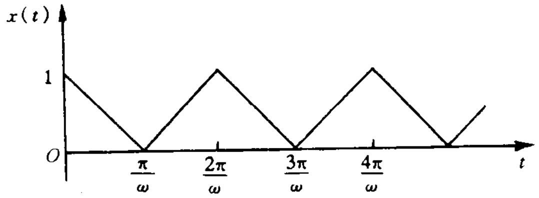
1-3 一个机器内某零件的振动规律为 $x = 0.5\sin\omega t + 0.3\cos\omega t$，$x$ 的单位是 cm，$\omega = 10\pi$ 1/s。这个振动是否为简谐振动？试求它的振幅、最大速度及最大加速度，并用旋转矢量表示这三者之间的关系。

1-4 某仪器的振动规律为 $x = a\sin\omega t + 3a\sin 3\omega t$。此振动是否为简谐振动？试用 x—t 坐标画出运动图。

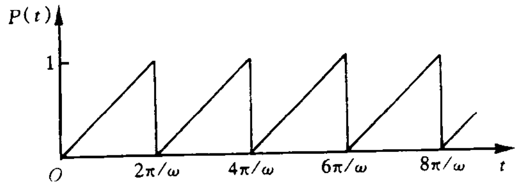
1-5 已知以复数表示的两个简谐振动分别为 $3e^{i5\pi t}$ 和 $5e^{i(5\pi t+\frac{\pi}{2})}$，试求它们的合成的复数表示式，并写出其实部与虚部。

1-6 将题 1-6 图的三角波展为傅里叶级数。

1-7 将题 1-7 图的锯齿波展为傅氏级数，并画出频谱图。



题 1-6 图

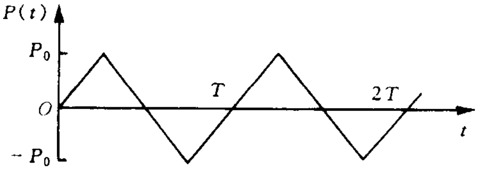


题 1-7 图

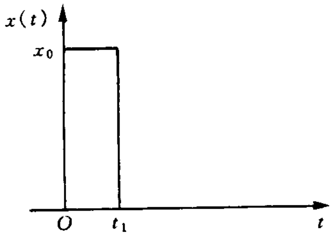
1-8 将题 1-8 图的三角波展为复数傅氏级数，并画出频谱图。

1-9 求题 1-9 图的矩形脉冲的频谱函数及画频谱图形。

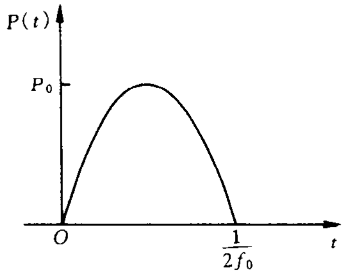
1-10 求题 1-10 图的半正弦波的频谱函数并画频谱图形。



题 1-8 图



题 1-9 图



题 1-10 图

第二章　单自由度系统的振动

以弹簧—质量系统为力学模型，研究单自由度系统的振动有着非常普遍的实际意义，因为工程上有许多问题通过简化，用单自由度系统的振动理论就能得到满意的结果。而同时对多自由度系统和无限自由度系统的振动，在特殊坐标系中考察时，显示出与单自由度系统类似的性态。因此，揭示单自由度振动系统的规律、特点，为进一步研究复杂振动系统奠定了基础。

第一节　无阻尼系统的自由振动

设有质量为 m 的物块（可视为质点）挂在弹簧的下端，弹簧的自然长度为 l_0、弹簧常量为 k，如不计弹簧的质量，这就构成典型的单自由度系统，称之为弹簧—质量系统，如图2－1所示。工程中许多振动问题都可简化成这种力学模型。例如，梁上固定一台电动机（图2－2），当电机沿铅直方向振动时，梁和电机组成一个振动系统，如不计梁的质量，则它在该系统中的作用相当于一根无重弹簧，而电机可视为集中质量。于是这个系统可简化成如图2－1所示的**弹簧—质量系统**。

一、自由振动方程

以图2－1所示的弹簧—质量系统为研究对象。取物块的静平衡位置为坐标原点 O，x 轴顺弹簧变形方向铅直向下为正。当物块在静平衡位置时，由平衡条件 $\sum X=0$，得到

$$mg=k\delta_{st} \tag{A}$$

δ_{st}称为弹簧的静变形。

当物块偏离平衡位置为 x 时，物块的运动微分方程为

$$m\ddot{x}=mg-k(\delta_{st}+x)$$

即

$$m\ddot{x}=-kx \tag{2-1}$$

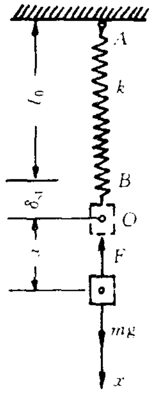


图2－1　弹簧—质量系统

将式(2－1)两边除以 m，并令

$$p_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2-2}$$

则式(2－1)可写成

$$\ddot{x}+p_n^2x=0 \tag{2-3}$$

这就是弹簧—质量系统只在线弹性力 $-kx$ 的作用下所具有的振动微分方程，称之为**无阻尼自由振动的微分方程**，是二阶常系数线性齐次方程。由微分方程理论可知，式(2－3)的通解

为

$$x = C_1\cos p_n t + C_2\sin p_n t$$

其中 C_1 和 C_2 为积分常数，由物块运动的起始条件确定。

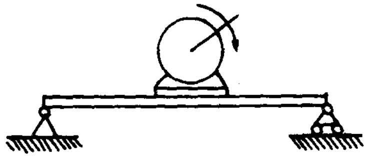


图 2-2　简支梁振动系统

设 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，可解得

$$C_1 = x_0 \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{p_n}$$

所以

$$x = x_0\cos p_n t + \frac{\dot{x}_0}{p_n}\sin p_n t \tag{2-4}$$

式(2-4)亦可写成下述形式

$$x = A\sin(p_n t + \alpha) \tag{2-5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p_n}\right)^2} \\ \alpha &= \mathrm{arctg}\left(\frac{p_n x_0}{\dot{x}_0}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

式(2-4)和式(2-5)是物块振动方程的两种形式，称为**无阻尼自由振动**，简称**自由振动**。

二、振幅、初相位和频率

式(2-5)表明，无阻尼的**自由振动是以其静平衡位置为中心的简谐振动**。系统的**静平衡位置称为振动中心**，其振幅 A 和初相位角 α 由式(2-6)决定。

系统振动的周期

$$T = \frac{2\pi}{p_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2-7}$$

系统振动的频率

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p_n}{2\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2-8}$$

而系统振动的圆频率

$$p_n = 2\pi f \tag{2-9}$$

这表明，**圆频率 p_n 是物块在自由振动中每 2π 秒内振动的次数**。还可以看出，f、p_n 只与振动系统的弹簧常量 k 和物块的质量 m 有关，而与运动的初始条件无关。因此，通常将频率 f 称为**固有频率**，将圆频率 p_n 称为**固有圆频率**。

由式(A)可知，$k=\dfrac{mg}{\delta_{st}}$，代入式(2-2)得

$$p_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{2-10}$$

这是用弹簧静变形时的变形量 δ_{st} 表示自由振动固有圆频率的计算公式。

例 2-1　在图 2-3 和图 2-4 中，已知物块的质量为 m，弹簧的弹簧常量分别为 k_1、k_2，试求并联弹簧与串联弹簧直线振动系统的固有频率。

解：1. 并联弹簧

图 2－3a）所示的振动系统在运动过程中，物块始终作平行移动。取平衡位置时的物块为研究对象。物块受重力、弹性力作用处于平衡状态。两根弹簧的静变形都是 δ_{st}；弹性力分别是

$$F_1 = k_1\delta_{st}, \qquad F_2 = k_2\delta_{st}$$

$$\sum X = 0, \qquad mg = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)\delta_{st} \tag{a}$$

如果用一根弹簧常量为 k 的弹簧来代替原来的两根弹簧，使该弹簧的静变形与原来两根弹簧所产生的静变形相等，如图 2－3b）所示，则

$$mg = k\delta_{st} \tag{b}$$

比较式(a)与式(b)，得

$$k = k_1 + k_2 \tag{c}$$

k 称为并联弹簧的**等效弹簧常量**。式（c）表明，**并联后的等效弹簧常量是各并联弹簧常量的算术和**。弹簧并联的特征是：**二弹簧变形相等**。

由式(2－8)，可求出系统的固有频率

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

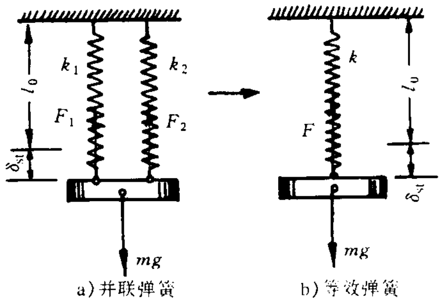


图 2－3　并联弹簧系统

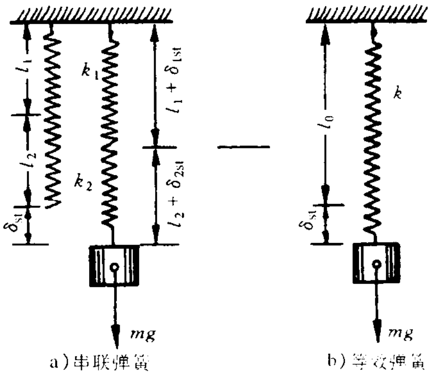


图 2－4　串联弹簧系统

2．串联弹簧

当物块在静平衡位置时，它的静位移 δ_{st} 等于每根弹簧的静变形之和，即

$$\delta_{st} = \delta_{1st} + \delta_{2st} \tag{d}$$

因为弹簧是串联的，其特征是：**二弹簧受力相等**，即每根弹簧所受的拉力都等于重力 mg。

$$\delta_{1st} = \frac{mg}{k_1}, \qquad \delta_{2st} = \frac{mg}{k_2} \tag{e}$$

如果用一根弹簧常量为 k 的弹簧来代替原来的两根弹簧，此弹簧的静变形等于 δ_{st}（图 2－4b））。

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} \tag{f}$$

将式(e)和式(f)代入式(d)，得

$$\frac{mg}{k} = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \tag{g}$$

所以

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

或者

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

k 称为串联弹簧的等效弹簧常量。式(g)表明，**串联后的弹簧常量的倒数等于各串联弹簧常量倒数的算术和**。由此可知，串联后的等效弹簧常量是降低了，而且比原来任一根的弹簧常量都要小。

可求出系统的固有频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

例 2-2 一个质量为 m 的物块从 h 的高处自由落下，与一根抗弯刚度为 EJ、长为 l 的简支梁作塑性碰撞(图 2-5)，不计梁的质量，求该系统自由振动的频率、振幅和最大挠度。

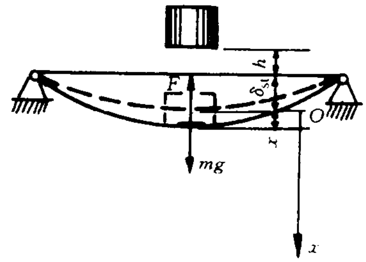


图 2-5 简支梁系统

解：当梁的质量可以略去不计时，梁可以用一根弹簧来代替，因此这是一个单自由度系统。如果知道系统的静变形 δ_{st}，则由式(2-10)可求出系统的固有频率

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

由材料力学可知，简支梁受集中载荷作用，其中点的静挠度

$$\delta_{st}=\frac{mgl^3}{48EJ}$$

可求出系统的固有频率

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}$$

以梁承受重物时的静平衡位置为坐标原点 O，建立坐标系如图 2-5 所示，并以撞击时刻为零瞬时，则 $t=0$ 时，有

$$x_0=-\delta_{st},\quad \dot{x}_0=\sqrt{2gh}$$

代入式(2-6)，自由振动的振幅

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p_n}\right)^2}=\sqrt{\delta_{st}^2+2h\delta_{st}}$$

梁的最大挠度

$$\delta_{max}=A+\delta_{st}=\sqrt{\delta_{st}^2+2h\delta_{st}}+\delta_{st}=\frac{mgl^3}{48EJ}\left(1+\sqrt{1+\frac{96EJh}{mgl^3}}\right)$$

例 2-3 质量为 m 的物块悬挂情况如图 2-6 所示。设杆 AB 的质量不计，两弹簧的弹簧常量分别为 k_1 和 k_2，又 $AC=a$，$AB=b$，求物块的自由振动频率。

解：应用等效弹簧常量求解。

、将各弹簧的弹簧常量按静力等效的原则，折算到质量所在处。先将弹簧常量 k_2 换算至质量 m 所在处 C 的等效弹簧常量 k'。设在 C 处作用一力 F，按静力平衡的关系，作用在 B 处的

力应为$\frac{Fa}{b}$，由此力使弹簧 k_2 产生的变形 $\delta=\frac{Fa}{bk_2}$，而此变形使 C 点发生的变形

$$\delta_C=\delta\frac{a}{b}=\frac{Fa^2}{k_2b^2}$$

由此得到作用在 C 处而与 k_2 弹簧等效的弹簧常量

$$k'=\frac{F}{\delta_C}=k_2\frac{b^2}{a^2}$$

然后再将其与弹簧 k_1 串联，可得整个系统的等效弹簧常量

$$k=\frac{k_1k_2\frac{b^2}{a^2}}{k_1+k_2\frac{b^2}{a^2}}=\frac{k_1k_2b^2}{a^2k_1+b^2k_2}$$

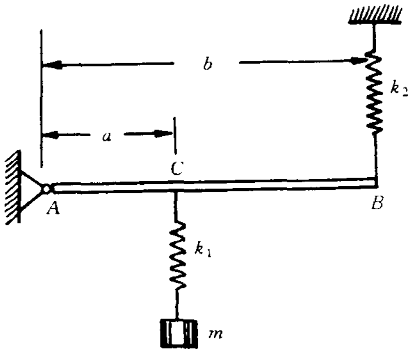


图 2-6　等效弹簧系统

物块的自由振动频率

$$p_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=b\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(a^2k_1+b^2k_2)}}$$

三、单自由度系统的扭转振动

前面研究的单自由度振动系统，主要是弹簧—质量组成的直线振动系统。在工程实际中还有许多其它形式的振动系统，如内燃机的曲轴、轮船的传动轴等等，在运转中常常产生**扭转振动**，简称**扭振**。

图 2-7 所示为一扭振系统。其中 OA 为一铅直圆轴，上端 A 固定，下端 O 固结一水平圆盘，圆盘对中心轴 OA 的转动惯量为 I_O。如果在圆盘的水平面内加一力偶，然后突然撤去，圆轴就会带着圆盘作自由扭振，这种装置称为**扭摆**。在研究它的运动规律时，假定圆轴的质量可以略去不计，圆盘的位置可由圆盘上任一根半径线和该线的静止位置之间的夹角 φ 来决定，称之为**扭角**。再假定圆轴的抗扭弹簧常量为 k_n，它表示使圆盘产生单位扭角所需的力矩。根据刚体转动微分方程建立该系统的运动微分方程

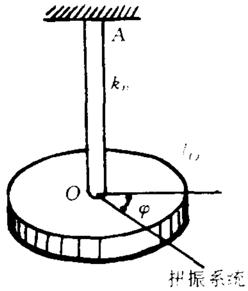


图 2-7　扭振系统

$$I_O\ddot{\varphi}=-k_n\varphi$$

令

$$p_n=\frac{k_n}{I_O} \tag{2-11}$$

则上式改写为

$$\ddot{\varphi}+p_n^2\varphi=0 \tag{2-12}$$

可以看到，式(2-12)与式(2-3)具有相同的形式，因此，扭振的运动规律也具有与式(2-4)相同的形式，即

$$\varphi=\varphi_0\cos p_nt+\frac{\dot{\varphi}_0}{p_n}\sin p_nt \tag{2-13}$$

综上所述，对于单自由度振动系统来说，尽管直线振动和扭转振动的结构形式、振动形式不一样，但其振动规律及特征是完全相同的。如果在弹簧—质量系统中，将 m、k 理解

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com