北京师范大学现代数学丛书

Bochner–Riesz 平均

陆善镇　王昆扬　著

北京师范大学出版社

北京师范大学现代数学丛书

Bochner-Riesz平均

陆善镇　王昆扬　著

国家自然科学基金资助项目

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书是一本专著，它比较系统地介绍了作为多元富氏分析的重要分支之一的 Bochner-Riesz 平均的理论，七十年代以来国际上许多重要的研究成果和国内学者某些有价值的工作也包含在本书中。全书共分四章。第一章是多重富氏级数概论。第二章是多重富氏积分的 Bochner-Riesz 平均，其中包括著名的 Carleson-Sjölin 定理和否定“圆盘猜想”的 Fefferman 定理。第三章是多重富氏级数的 Bochner-Riesz 平均，其中包括新近发展起来的一类同富氏级数的收敛性密切相关的函数空间 (Block 空间) 的理论。最后一章是共轭富氏积分与级数的 Bochner-Riesz 平均，这里共轭的概念是建立在 Calderón-Zygmund 奇异积分理论的基础上的。

本书可作为大学数学系的研究生、教师以及研究人员的参考书。

北京师范大学现代数学丛书
Bochner-Riesz 平均
陆善镇 王昆扬 著
*
北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
国 营 五 二 三 厂 印 刷

开本：850×1168 1/32 印张：13.25 字数：325 千
1988 年 3 月第 1 版 1988 年 3 月第 1 次印刷
印数：1—2 700

ISBN 7-303-00207-3/O·52
定价：(平) 3.00 元
(精) 5.00 元

序

1974年国际数学家大会上C. Fefferman作了关于经典Fourier分析的一小时报告，他指出了多重Fourier积分的研究还远远没有达到完善的地步，并举出了在低维流形上关于一个函数的某种形式的积分可以受控于函数的高维Fourier积分，从而他认为在多元Fourier变换的研究中，Lebesgue测度还不是理想的合适工具。1986年国际数学家大会上E.M.Stein作了关于调和分析中问题的一小时报告，他指出了近十年来调和分析的进展，使人们愈益理解有关问题的研究往往涉及积分区域的很基本的几何性质，而这种联系越来越显得重要。他举出函数在$\mathbf{R}^n$的超曲面S上的积分均值函数的极限性质与超曲面S的曲率有本质的联系。以上两位国际著名的数学家在时隔12年的两次重要报告中，分别各自总结了多元调和分析不同的十多年时间内的进展情况，而得出的结论是相同的，即多元调和分析仍有许多重要的基本问题有待于进一步深入研究。

本书着重于多元Fourier积分及Fourier级数的Bochner-Riesz平均的研究。从这一领域的许多成果来分析，可以看出多元函数的Fourier积分和Fourier级数的球形平均是表达函数的最自然的方式。事实上，从函数展开的唯一性问题，收敛问题，全测度收敛问题，逼近问题，全测度逼近问题以及强求和问题等的研究中，我们可以看到相应阶的Bochner-Riesz平均都起着重要而又十分自然的作用。这个领域是多元Fourier分析中成果比较丰富的领域；也是我国学者较早弥补十年动乱的损失，较快进入国际前沿的领域，其中作者们的贡献是很重要的方面；也是

至今仍有许多基本的问题没有得到解决，有待于继续深入研究的领域，正如作者们在前言中指出的那样。

本书的一个显著的特点就是它不仅是一本研究生选课的优秀教材，同时它又是一本能引导读者进入这一领域研究前沿的优秀读物。这个特点充分反映在本书的各章内容中，例如关于多重 Fourier 积分和多重 Fourier 级数的 Bochner-Riesz 平均这两章的内容以及附录中关于“多重 Fourier 级数理论中一些结果与问题的综述”这部分内容，都十分出色地反映了本书的上述特点。这个特点在一定程度上已经得到了作者们教学实践的检验。在作者们采用本书内容进行讲学的过程中，获得了很好的效果，证实它是一本优秀的研究生选课教材和指导研究生进入科研前沿的优秀读物。应当指出本书许多重要内容都是作者们自己科研成果的总结，而本书前一署名的作者已经培养出了卓有才能的研究人员。

本书出版以后，一定能在更大的范围内获得教学实践方面的宝贵经验；一定能在更广泛的基础上扩大这一领域的研究成果；也一定能进一步拓展与其它有关领域的联系促进不同领域间的相互渗透。这是完全可以预期的前景。

程民德

一九八七年五月于北京大学数学所

前　言

本书的主题是多重 Fourier 积分和级数的 Bochner-Riesz 平均（以下简称 B-R 平均），它是多元 Fourier 分析的一个重要分支。这个领域的开创性工作是 S.Bochner 于三十年代提出的，当时，S.Bochner 等人的研究课题基本上局限于大于临界阶的情形。四十年代末，我国程民德教授（在美国）曾对 B-R 平均作过系统的研究，他还是研究多重三角级数球形和唯一性理论的奠基者。五十年代末和六十年代初，E.M.Stein 对临界阶以及小于临界阶情形下的研究作出了重大的贡献。这期间，程民德教授等也开创了用 B-R 平均逼近函数的研究。七十年代以来，在近代分析数学蓬勃发展的推动下，许多欧美、苏联以及我国的学者也先继在这个领域内作出了许多重要的或有价值的成果。这个领域虽然已经经历了半个世纪的发展、取得了丰富的成果，但至今仍有许多基本问题没有解决，有待继续深入研究。

本书目的就是要较系统地介绍 B-R 平均的基本理论以及近二十年来所取得的重要成果，其中也包括近几年来国内学者所取得的某些有价值的结果。大量的研究成果表明：B-R 平均最自然地反映了 Fourier 级数的单变量情形到多变量情形的扩充。全书共分四章，第一章是多重 Fourier 级数理论的概述。第二章和第三章是本书的重点，两章内容密切相关。第二章介绍多重 Fourier 积分的 B-R 平均，其中包括否定“圆盘猜测”的 C.Fefferman 定理，以及著名的 Carleson-Sjölin 定理。第三章介绍多重 Fourier 级数的 B-R 平均，其中包括新近由 Taibleson、Weiss 等人发展起来的与 B-R 平均的收敛性密切相关的一类函

数空间（块空间）的理论及其应用。第四章介绍共轭积分和共轭级数的B-R平均，这里共轭积分和共轭级数的概念是基于Calderón-Zygmund奇异积分理论上的。

本书第二、三章的主要内容曾由前一署名著者对北京师范大学数学系八二届函数论专业研究生讲授过。第一、三、四章内容则由后一署名著者对浙江大学应用数学系八四届函数论专业研究生讲授过。全书便是在这两次教学基础上整理出来的，第二章由前一署名者执笔写成，第一、三、四章由后署名者执笔完成。全书最后添加了一个附录，内容是同本书知识密切相关的有关调和分析的某些基本事实，如Fourier变换、算子内插理论，以及Calderón-Zygmund奇异积分等，这些内容取材于E.M.Stein和G.Weiss合写的“Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces”和E.M. Stein写的“Singular integrals and differentiability properties of functions”两书。由于著者的水平有限，本书的缺点和错误必定很多，恳请读者给予指正。

最后，著者深深地感谢中国科学院学部委员、北京大学数学研究所所长程民德教授，他仔细地阅读了本书的部分章节，并提出了一些富有启发性的意见。他还专门为本书写了序，这无疑是对著者的很大鼓励。著者还借此机会对北京师范大学数学系孙永生教授的一贯所给予的支持、鼓励和帮助表示衷心感谢。

陆善镇　王昆扬

一九八五年底于北京

目 录

第一章　多重 Fourier 级数概论

设 $Q=Q^n=[-\pi,\pi)^n$，$1\leqslant p<\infty$。在 Q^n 上 p 次可积且关于每个变元都以 2π 为周期的（复值）函数的全体记作 $L^p(Q)$，它是赋有范数 $\|f\|_p=\left(\int_Q|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 的 Banach 空间。在 Q 上连续的关于每个变元都以 2π 为周期的函数的全体记为 $C(Q)$，它赋有一致范数，成为 Banach 空间，它的范数是

$$\|f\|_c=\max\{|f(x)|:x\in Q\}.$$

设 $f\in L(Q)$。f 的 Fourier 系数是

$$C_m=C_m(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q f(x)e^{-ixm}dx,m\in\mathbf{Z}^n. \tag{0.1}$$

f 的 Fourier 级数记作 $\sigma(f)$：

$$\sigma(f)(x)\sim\sum_{m\in Z^n}C_m(f)e^{imx}. \tag{0.2}$$

Fourier 级数的部分和，按求和方式的不同而有多种形式，其中最常见的是矩形和与球形和。矩形和是指

$$S_m(f;x)=\sum_{l:|l_j|\leq m_j,j=1,\cdots,n}C_l(f)e^{ilx},\ m\in\mathbf{Z}_+^n. \tag{0.3}$$

它有积分表达式

$$S_m(f;x)=\frac{1}{\pi^n}\int_Q f(x-t)D_{m_1}(t_1)\cdots D_{m_n}(t_n)dt,\ m\in\mathbf{Z}_+^n, \tag{0.4}$$

其中 $D_\nu(u)=\dfrac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$ 是 Dirichlet 核。

球形部分和是

$$S_R^0(f;x)=\sum_{|m|<R}C_m(f)e^{imx}\quad(R>0)$$

其中 $|m|=(m_1^2+\cdots+m_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

显然，对于多重 Fourier 级数，在讨论收敛问题或求和问题时，仅极限方式的取法就有很大的多样性。通常讨论这样几类极限：矩形极限，例如 $\lim\limits_{m_1,\cdots,m_n\to\infty}S_m(f;x)$；限制矩形极限，事先取常数 $\lambda\geqslant1$，当 m_1，$\cdots$，$m_n\to\infty$ 时限制 $\frac{m_j}{m_k}\in\left[\frac{1}{\lambda},\ \lambda\right]$；还有就是我们将要着重讨论的球形极限，例如 $\lim\limits_{R\to\infty}S_R(f;\ x)$.

关于矩形方式的求和，此处提一下算术平均（Fejér 平均）. f 的矩形 Fejér 平均是三角多项式

$$\sigma_m(f;x)=\frac{1}{(m_1+1)\cdots(m_n+1)}\cdot\sum_{j_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{j_n=0}^{m_n}S_{j_1\cdots j_n}(f;x).\tag{0.5}$$

用（0.4），得（0.5）的积分形式：

$$\sigma_m(f;x)=\frac{1}{\pi^n}\int_Q f(x-t)K_{m_1}(t_1)\cdots K_{m_n}(t_n)dt\tag{0.6}$$

其中 $K_j(u)=\frac{1}{j+1}\sum\limits_{l=0}^{j}D_l(u)=\frac{1}{2(j+1)}\left(\frac{\sin\frac{j+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2$ 是 Fejér 核.

关于球形求和，我们下面要着重讨论的是 Bochner-Riesz 平均，即如下的球形 R 阶三角多项式：

$$S_R^\alpha(f;x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha C_m(f)e^{imx}\quad(R>0)\tag{0.7}$$

其中指数 α 可以是任何实部大于 -1 的复数.（在 S_R^α 的定义式

中，限制 $R>0$。为了方便，把 S_0^α 理解作 $\lim\limits_{R\to 0_+} S_R^\alpha$，即 $S_0^\alpha(f;x)=$ $C_0(f)$）．

多元 Fourier 级数以及三角级数的球形和理论，在很多方面表现出它更适合于做为一元理论的推广。例如在多重三角级数球形和的唯一性理论方面，程民德[1]的奠基性成果就说明了这一点。在 Fourier 级数的收敛和逼近理论方面，下面将要介绍的一系列事实也表现了这一点．这也是我们对球形和理论更感兴趣的一个原因。

§1　多重 Fourier 级数的基本性质

为讨论 Fourier 级数，首先证明 $L^p(Q)$ 的一个基本性质——三角多项式的稠密性。为了写法方便，我们约定 $L^\infty(Q)$ 表示 $C(Q)$。

定理 1.1　n 元三角多项式在 $L^p(Q^n)$ 中稠密（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）。

证　由实分析的基本事实可知 $C(Q)$ 作为 $L^p(Q)$ 的子集，是稠密的。所以，用 Stone 定理证明三角多项式在 $C(Q)$ 中稠密，然后注意到 L^p 距离不超过 $C(Q)$ 距离，即可完成定理的证明。

此处我们通过直接证明

$$\lim_{m_1-m_n\to\infty}\|f-\sigma_m(f)\|_p=0 \tag{1.1}$$

来完成定理的证明。

为了书写简便，令 $n=2$。用（0.6），得

$$\begin{aligned}
&\|f-\sigma_{m_1m_2}(f)\|_p\\
&=\left\|\frac{1}{\pi^2}\int_Q\left\{f(x_1+t_1,x_2+t_2)-f(x_1,x_2)\right\}K_{m_1}(t_1)K_{m_2}(t_2)dt_1dt_2\right\|_p\\
&\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_Q\|f(\cdot+t_1,\cdot+t_2)-f(\cdot,\cdot)\|_pK_{m_1}(t_1)K_{m_2}(t_2)dt_1dt_2
\end{aligned}$$

用$\omega(f;\mu,\nu)_p$表示f的L_p连续模，即

$$\omega(f;\mu,\nu)_p=\sup_{|h|\leqslant\mu,|\tau|\leqslant\nu}\|f(\cdot+h,\cdot+\tau)-f(\cdot,\cdot)\|_p$$

于是

$$\|f-\sigma_{m_1,m_1}(f)\|_p\leqslant\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\omega(f;t_1,t_2)_pK_{m_1}(t_1)K_{m_2}(t_2)\,dt_1$$

dt_2。

记$\mu=\log(m_1+1)/(m_1+1)$，$\nu=\log(m_2+1)/(m_2+1)$　　设$m_1,m_2>0$，则

$$\|f-\sigma_{m_1,m_2}(f)\|_p\leqslant\frac{4}{\pi^2}\left(\int_0^\mu\int_0^\nu+\int_\mu^\pi\int_0^\nu+\int_0^\mu\int_\nu^\pi+\int_\mu^\pi\int_\nu^\pi\right).$$

$$\omega(f;t_1,t_2)_pK_{m_1}(t_1)K_{m_2}(t_2)dt_1dt_2=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}(I_1+I_2+I_3+I_4).$$

$$I_1\leqslant\omega(f;\mu,\nu)_p\int_0^\pi\int_0^\pi K_{m_1}(t_1)K_{m_2}(t_2)dt_1dt_2\leqslant\frac{\pi^2}{4}\omega(f;\mu,\nu)_p.$$

利用连续模的性质，有

$$\omega(f;t_1,t_2)_p\leqslant\omega(f;\mu,t_2)_p\left(\frac{t_1}{\mu}+1\right).$$

所以

$$I_2=\int_\mu^\pi dt_1\int_0^\nu dt_2\,\omega(f;t_1,t_2)_pK_{m_1}(t_1)K_{m_2}(t_2)\leqslant$$

$$\leqslant\omega(f;\mu,\nu)_p\int_\mu^\pi\left(1+\frac{t_1}{\mu}\right)K_{m_1}(t_1)dt_1\int_0^\pi K_m(t_2)dt_2\leqslant$$

$$\leqslant C\omega(f;\mu,\nu)_p\left(\int_\mu^\pi\frac{t_1}{\mu}\,\frac{dt_1}{(m_1+1)t_1^2}+1\right)\leqslant C\omega(f;\mu,\nu)_p.$$

同样，

$$I_3\leqslant C\omega(f;\mu,\nu)_p$$

最后，

$$I_4=\int_\mu^\pi dt_1\int_\nu^\pi dt_2\,\omega(f;t_1,t_2)_pK_{m_1}(t_1)K_{m_2}(t_2)\leqslant$$

$$\leqslant\omega(f;\mu,\nu)_p\cdot\int_\mu^\pi\left(1+\frac{t_1}{\mu}\right)K_{m_1}(t_1)dt_1\int_\nu^\pi\left(1+\frac{t_2}{\nu}\right)K_{m_2}(t_2)dt_2\leqslant$$

$$\leqslant C\omega(f;\mu,\nu)_p.$$

总之，

$$\|f-\sigma_{m_1,m_2}(f)\|_p\leqslant C\omega\left(f;\frac{\log(m_1+1)}{m_1+1},\ \frac{\log(m_2+1)}{m_2+1}\right)_p$$

$$(m_1,m_2>0)\quad(1.2)$$

这就完成了定理的证明。

注. 从定理的证明看到，实际上我们是把多重的问题化为累次的一元估计。所以证明在实质上是平庸的。在许多情况下，多重的矩形方式的问题，可化为累次的一元问题去处理，从而很多一元的结果，可直接推广到多元的矩形情形。在这种情况下，看不出多元与一元的本质区别。我们对这种情况没有兴趣。

定理 1.2 设 $f\in L(Q)$。若 $C_m(f)=0$，$\forall m\in\mathbf{Z}^n$，则 $f(x)\overset{a.e.}{=}0$。

证 由

$C_m(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q f(x)e^{-imx}dx=0\quad\forall m\in\mathbf{Z}^n$，知对任意三角多项式 $P(x)$，皆成立

$$\int_Q f(x)P(x)dx=0.\qquad(1.3)$$

任取 $g\in C(Q)$。对于任何正数 ε，根据定理 1.1，存在三角多项式 P_ε，使

$$\|g-P_\varepsilon\|_C<\varepsilon\qquad(1.4)$$

由（1.3）、（1.4）得

$$\left|\int_Q fg\right|=\left|\int_Q f(g-P_\varepsilon)\right|\leqslant\varepsilon\int_Q|f|$$

从而推出

$$\int_Q fg=0 \quad \forall g\in C(Q).$$

由此可知．$f=0$．证毕．

推论 1.3 设$f\in L(Q)$，$\sum\limits_m |C_m(f)|<+\infty$，那么存在$g\in C(Q)$使 $f(x)\overset{a.e.}{=}g(x)$．

对于 $L^2(Q^n)$，下述定理同 $n=1$ 时一样，也是基本的．

定理 1.4 设 $f\in L^2(Q^n)$．则

$$\sum_{m\in Z^n} |C_m(f)|^2=\frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_2^2 \tag{1.5}$$

证 同一维的证明完全一样．作为复习，我们作简略叙述．

① $$(2\pi)^n\sum_{|m|<R}|C_m(f)|^2=\int_Q f(x)\cdot\overline{S_R(f,x)}dx\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_2\cdot\|S_R(f)\|_2=\|f\|_2\left\{(2\pi)^n\sum_{|m|<R}|C_m(f)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow\sum_{|m|<R}|C_m(f)|^2\leqslant\frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_2^2. \qquad (R>0)$$

$\Longrightarrow S_R(f)$是$L^2(Q)$的 Cauchy 序列（$R\to\infty$）．从而有 $g\in L^2(Q)$，使

$$S_R(f)\xrightarrow{L^2}g$$

$$\Rightarrow\sigma(g)=\sigma(f).$$

由定理 1.2 知 $g=f$.

② 由 $S_R(f)\xrightarrow{L^2}f\Rightarrow\|S_R(f)\|_2\to\|f\|_2$

$$\Rightarrow\left\{(2\pi)^n\sum_{m\in Z^n}|C_m(f)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\|f\|_2\Rightarrow(1.5).$$

推论 1.5 设 $f\in C^{(k)}(Q^n)$ $k>\dfrac{n}{2}$． 则

$$\Sigma|C_m(f)|<+\infty.$$

证 设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$，$\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant k$，有

$$D^{\alpha}(f)(x)=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\in C(Q^n).$$

分部积分算出

$$\int_Q D^{\alpha}(f)(x)e^{-imx}dx=(im)^{\alpha}\int_Q f(x)e^{-imx}dx$$
$$=(im)^{\alpha}\cdot(2\pi)^n C_m(f),\ m\in\mathbf{Z}^n.$$

用定理 1.4，

$$\sum_{\langle\alpha\rangle=k}\left\{\sum_{m\in Z^n}|C_m(f)|^2\ |(im)^{\alpha}|^2\right\}<+\infty.$$

即

$$\sum_{m\in Z^n}|C_m(f)|^2\left(\sum_{\langle\alpha\rangle=k}|m_1|^{2\alpha_1}\cdots|m_n|^{2\alpha_n}\right)<+\infty \tag{1.6}$$

显然，存在常数 $C=C_{k,n}>0$ 使

$$|m|^{2k}=(|m_1|^2+\cdots+|m_n|^2)^k\leqslant C\sum_{\langle\alpha\rangle=k}|m_1|^{2\alpha_1}\cdots|m_n|^{2\alpha_n}. \tag{1.7}$$

设 $b_m=\left(\sum_{\langle\alpha\rangle=k}|m_1|^{2\alpha_1}\cdots|m_n|^{2\alpha_n}\right)^{\frac{1}{2}}$. 则 (1.6)、(1.7) 可分别写成

$$\Sigma|C_m(f)|^2b_m^2<+\infty, \tag{1.8}$$
$$|m|^k\leqslant Cb_m. \tag{1.9}$$

由 (1.9) 知

$$\sum_{m\neq0}|C_m(f)|\leqslant C\sum_{m\neq0}|C_m(f)|\frac{b_m}{|m|^k}\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\sum_{m\neq0}|C_m(f)|^2b_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{m\neq0}\frac{1}{|m|^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

由于 $k>\frac{n}{2}$，有 $\sum_{m\neq0}\frac{1}{|m|^{2k}}<+\infty$，故由 (1.8)、(1.10) 推出 $\Sigma|C_m(f)|<+\infty$