



普通高等教育“十三五”规划教材



华冬英 李祥贵 编著

# 微分方程的数值解法 与程序实现



中国工信出版集团



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十三五”规划教材

# 微分方程的数值解法与程序实现

华冬英 李祥贵 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书从理论和实践出发,全面介绍求解微分方程的数值方法——有限差分法,并简单地介绍有限元法.全书共6章,主要内容包括:预备知识、常微分方程的数值解法、抛物型偏微分方程的有限差分法、双曲型偏微分方程的有限差分法、椭圆型偏微分方程的有限差分法、有限元法简介等.本书提供配套电子课件、例题程序代码、课后习题参考运行结果及程序代码.

本书可作为高等学校信息与计算科学、数学等专业的基础教材,也可供相关领域的工程技术人员学习和参考.

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容.

版权所有,侵权必究.

## 图书在版编目(CIP)数据

微分方程的数值解法与程序实现 / 华冬英, 李祥贵编著. —北京: 电子工业出版社, 2016.7

ISBN 978-7-121-29254-5

I. ①微… II. ①华… ②李… III. ①微分方程—数值计算—高等学校—教材 IV. ①O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 149354 号

策划编辑: 王羽佳

责任编辑: 周宏敏

印 刷: 涿州市京南印刷厂

装 订: 涿州市京南印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 14.25 字数: 412 千字

版 次: 2008 年 6 月第 1 版

2016 年 7 月第 3 版

印 次: 2016 年 7 月第 1 次印刷

印 数: 2 000 册 定价: 45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换. 若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888.

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn).

本书咨询联系方式: (010) 88254535.

# 前言

在自然科学、工程技术甚至经济管理领域中的很多数学模型,其表现形式通常为常微分方程或偏微分方程的定解问题,如何有效地进行求解是非常关键的.这些微分方程定解问题的精确解通常是很难用解析的方法求得的,所以很大程度上要依靠数值求解.现代计算技术软、硬件的发展为借助计算机的数值求解微分方程奠定了媒质基础,而真正高效地求解微分方程的定解问题则更需要坚实的数学理论和计算机编程实践基础,为此我们编写了这本教材.

该教材具有如下特色:

① 教材起点比较低,为了适应一般院校学生数学基础相对薄弱的特点,直到最后的两三章才使用变化较多的差分算子记号,使学生一开始就不被这些算子记号而束缚,而在经过前几章的学习、逐渐适应了常用的差商表示以后,再引入这些算子就显得很自然、也很有效了.

② 在内容和描述上,我们尽可能地把复杂、深奥的数学理论用简单、通俗的语言和例子进行描述,把一些问题最本质的特点反映出来,让学生看得见、摸得着,“知其然”还“知其所以然”.通过一些思路的描述,让学生了解各种方法的实际演化,从而明白算法改进的实际意义其实本质上就是追求更好、更优,让学生切实体会到这些理论的实际意义.

③ 国内的很多基础教材在微分方程的求解方面都侧重于传授理论知识,而实际上,我们认为微分方程数值求解的理论固然重要,而相应的编程实践同样重要.所以“两手都要抓,两手都要硬”,这就是我们既把理论知识又把编程算例写入教材的初衷.让学生从一开始就实实在在地进行编程,从模仿到独立完成.教材中的算例配上程序和结果是为了让学生能自己实践和对比,从而提高学生的实践能力.

④ 在配套的程序编写方面,我们采用 C 语言进行程序设计,主要是因为一般高等院校普遍开设过《C 语言程序设计》这门课程, C 语言也是程序设计的主流高级语言.另外, C 语言数组从 0 开始编号的特点也正好与微分方程的数值计算理论中从 0 开始设置下标相匹配.

⑤ 此外,我们的程序设计也从简到难,从开始十几行的代码到后来百来行的代码,从开始简单的数组到后来文件数据的存储、读取,以及与 MATLAB 软件结合来画图,都遵循循序渐进的原则,让学生最后能系统地学会独立编程.

⑥ 本书提供配套电子课件、例题程序代码、课后习题参考运行结果及程序代码,请登录华信教育资源网(<http://www.hxedu.com.cn>)免费注册下载,或扫描封底、章首和习题的二维码获取相关教学资源.

全书共分 6 章,主要内容包括:第一章预备知识,介绍常用的差商近似及泰勒公式等;第二章常微分方程的数值解法,主要介绍常微分方程初值问题的有限差分方法,包括最经典的欧拉方法、龙格-库塔方法等,还介绍了差分法的相容性、稳定性及收敛性的概念,然后推广到求解二阶常微分方程的边值问题,为后面介绍偏微分方程定解问题的有限差分法打下基础;第三章抛物型偏微分方程的有限差分法,第四章双曲型偏微分方程的有限差分法,第五章椭圆型偏微分方程的有限差分法,本着从易到难的原则,以上 3 章分别介绍偏微分方程的 3 种标准方程在带不同初、边值条件下的差分解法;最后第六章有限元法简介,主要介绍了有限元法的实际意义及简单的编程操作.

本书可作为一般高等院校信息与计算科学专业的基础教材，也可供相关领域的工程技术人员学习和参考。

教学中，可根据教学对象和学时等具体情况对书中的内容进行删减和组合，也可以进行适当扩展，参考学时为 48~64 学时。

本书第一章至第五章由华冬英编写，第六章由李祥贵编写，所有程序由李祥贵编写。全书由华冬英统稿。在本书的编写过程中，电子工业出版社的王羽佳编辑为本书的出版做了大量工作。在此一并表示感谢！

由于时间紧促，作者学识有限，书中难免有疏漏及错误之处，恳请广大读者批评指正。

编著者

2016 年 6 月

# 目 录

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 第一章 预备知识 .....                   | 1  |
| 第一节 微分方程的相关概念与分类 .....           | 1  |
| 一、微分方程的相关概念 .....                | 1  |
| 二、微分方程的分类 .....                  | 2  |
| 第二节 数值分析的工具 .....                | 3  |
| 本章要求及小结 .....                    | 6  |
| 习题一 .....                        | 6  |
| 第二章 常微分方程的数值解法 .....             | 7  |
| 第一节 欧拉 (Euler) 方法 .....          | 8  |
| 一、欧拉方法 .....                     | 8  |
| 二、梯形方法 .....                     | 9  |
| 三、改进的欧拉方法 .....                  | 11 |
| 第二节 误差分析的相关概念 .....              | 12 |
| 一、局部截断误差与相容性 .....               | 12 |
| 二、稳定性 .....                      | 13 |
| 三、收敛性 .....                      | 14 |
| 四、收敛阶的数值意义 .....                 | 15 |
| 第三节 龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法 ..... | 15 |
| 一、泰勒级数方法 .....                   | 16 |
| 二、龙格-库塔方法 .....                  | 17 |
| 第四节 线性多步法 .....                  | 20 |
| 一、线性多步法 .....                    | 21 |
| 二、阿当姆斯方法 .....                   | 24 |
| 三、预估-校正方法 .....                  | 26 |
| 第五节 一阶方程组及高阶方程初值问题的解法 .....      | 27 |
| 一、一阶方程组初值问题的解法 .....             | 27 |
| 二、高阶方程初值问题的解法 .....              | 29 |
| 第六节 两点边值问题的解法 .....              | 30 |
| 一、打靶法求解两点狄利克雷边值问题 .....          | 30 |
| 二、打靶法求解两点混合边值问题 .....            | 32 |
| 三、差分法求解两点狄利克雷边值问题 .....          | 33 |
| 四、差分法求解两点混合边值问题 .....            | 36 |
| 第七节 高精度算法 .....                  | 39 |
| 一、理查德森 (Richardson) 外推法 .....    | 39 |
| 二、紧差分方法 .....                    | 42 |
| 本章参考文献 .....                     | 43 |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| 本章要求及小结                              | 43         |
| 习题二                                  | 44         |
| <b>第三章 抛物型偏微分方程的有限差分法</b>            | <b>46</b>  |
| 第一节 向前欧拉方法                           | 46         |
| 一、向前欧拉格式                             | 46         |
| 二、向前欧拉格式解的存在唯一性、稳定性和收敛性分析            | 48         |
| 三、数值算例                               | 52         |
| 第二节 向后欧拉方法                           | 55         |
| 一、向后欧拉格式                             | 55         |
| 二、向后欧拉格式解的存在唯一性、稳定性和收敛性分析            | 57         |
| 三、数值算例                               | 57         |
| 第三节 Crank-Nicolson 方法                | 60         |
| 一、理查德森差分格式                           | 61         |
| 二、Crank-Nicolson 差分格式                | 65         |
| 三、Crank-Nicolson 格式解的存在唯一性、稳定性和收敛性分析 | 67         |
| 四、数值算例                               | 68         |
| 第四节 高精度算法                            | 69         |
| 一、理查德森外推法                            | 70         |
| 二、紧差分方法                              | 76         |
| 第五节 混合边界条件下的差分方法                     | 80         |
| 一、几种差分格式的建立                          | 81         |
| 二、差分格式稳定性的讨论                         | 84         |
| 三、数值算例                               | 87         |
| 第六节 二维抛物型方程的交替方向隐格式                  | 89         |
| 一、向前欧拉格式                             | 90         |
| 二、Crank-Nicolson 格式                  | 91         |
| 三、交替方向隐 (ADI) 格式                     | 94         |
| 四、关于添加辅助项的说明                         | 97         |
| 五、数值算例                               | 100        |
| 第七节 二维抛物型方程的紧交替方向隐式方法                | 101        |
| 一、二维紧差分格式                            | 101        |
| 二、紧交替方向隐格式                           | 103        |
| 三、紧 ADI 格式的收敛性分析                     | 105        |
| 四、数值算例                               | 105        |
| 本章参考文献                               | 106        |
| 本章要求及小结                              | 107        |
| 习题三                                  | 107        |
| <b>第四章 双曲型偏微分方程的有限差分法</b>            | <b>110</b> |
| 第一节 一阶双曲型方程的若干差分方法                   | 110        |
| 一、精确解所具有的波的传播性质及对初值的局部依赖性            | 110        |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 二、迎风格式                       | 111 |
| 三、一个完全不稳定的差分格式               | 113 |
| 四、蛙跳 (Leapfrog) 格式           | 113 |
| 五、Lax-Friedrichs 格式          | 115 |
| 六、Lax-Wendroff 格式            | 116 |
| 七、Beam-Warming 格式            | 116 |
| 八、隐格式的设计                     | 117 |
| 九、Courant-Friedrichs-Lewy 条件 | 118 |
| 十、数值算例                       | 119 |
| 十一、推广                        | 120 |
| 第二节 二阶双曲型方程的显式差分法            | 122 |
| 一、三层显差分格式的建立                 | 122 |
| 二、显格式的稳定性、收敛性分析              | 123 |
| 三、改进的三层显格式                   | 126 |
| 四、数值算例                       | 127 |
| 第三节 二阶双曲型方程的隐式差分法            | 128 |
| 一、隐差分格式的建立                   | 128 |
| 二、隐格式的稳定性、收敛性分析              | 130 |
| 三、数值算例                       | 131 |
| 第四节 二阶双曲型方程的紧差分方法            | 131 |
| 一、紧差分格式的建立                   | 131 |
| 二、紧差分格式的稳定性、收敛性分析            | 133 |
| 三、数值算例                       | 135 |
| 第五节 二维双曲型方程的交替方向隐格式          | 135 |
| 一、显差分格式                      | 135 |
| 二、交替方向隐格式                    | 137 |
| 三、交替方向隐格式的稳定性、收敛性分析          | 140 |
| 四、二维抛物型方程交替方向隐格式的稳定性         | 142 |
| 五、数值算例                       | 142 |
| 第六节 二维双曲型方程的紧交替方向隐式方法        | 143 |
| 一、二维紧差分格式                    | 143 |
| 二、紧交替方向隐格式                   | 145 |
| 三、紧交替方向隐格式的稳定性、收敛性分析         | 146 |
| 四、二维抛物型方程紧交替方向隐格式的稳定性        | 148 |
| 五、数值算例                       | 148 |
| 本章参考文献                       | 149 |
| 本章要求及小结                      | 150 |
| 习题四                          | 150 |
| 第五章 椭圆型偏微分方程的有限差分法           | 155 |
| 第一节 五点菱形差分方法                 | 155 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 一、五点菱形格式 .....             | 155 |
| 二、五点菱形格式的收敛性分析 .....       | 159 |
| 三、数值算例 .....               | 162 |
| 第二节 九点紧差分方法 .....          | 162 |
| 一、九点紧差分格式 .....            | 163 |
| 二、九点紧差分格式的收敛性分析 .....      | 165 |
| 三、数值算例 .....               | 170 |
| 第三节 混合边界条件下的差分方法 .....     | 170 |
| 一、二阶差分格式 .....             | 171 |
| 二、差分格式的收敛性分析 .....         | 176 |
| 三、数值算例 .....               | 176 |
| 本章参考文献 .....               | 177 |
| 本章要求及小结 .....              | 177 |
| 习题五 .....                  | 177 |
| 第六章 有限元法简介 .....           | 182 |
| 第一节 一个引例 .....             | 182 |
| 一、常微分方程两点边值问题的等价形式 .....   | 182 |
| 二、模型问题的有限元法 .....          | 184 |
| 三、有限元法的编程 .....            | 185 |
| 四、有限元法的收敛性分析 .....         | 188 |
| 五、数值算例 .....               | 189 |
| 第二节 变分原理与弱解 .....          | 190 |
| 一、原问题的等价变分形式 .....         | 191 |
| 二、Lax-Milgram 定理 .....     | 192 |
| 第三节 有限元空间的构造 .....         | 194 |
| 一、对区域 $\Omega$ 的剖分 .....   | 194 |
| 二、三角形一次元 .....             | 194 |
| 三、一次元的基函数与面积坐标 .....       | 195 |
| 四、三角形二次元及其基函数 .....        | 196 |
| 第四节 有限元法的实现 .....          | 198 |
| 一、单元刚度矩阵及单元荷载 .....        | 198 |
| 二、总刚度矩阵和总荷载的合成 .....       | 199 |
| 三、边界条件的处理 .....            | 200 |
| 四、数值算例 .....               | 200 |
| 第五节 抛物型方程初边值问题的有限元方法 ..... | 201 |
| 一、原方程的变分形式 .....           | 201 |
| 二、用有限元法进行空间半离散 .....       | 202 |
| 三、用差分法进行时间全离散 .....        | 203 |
| 四、相关量的数值计算 .....           | 203 |
| 五、编程时的一些说明 .....           | 204 |

六、数值算例..... 204

本章参考文献..... 205

本章要求及小结..... 205

习题六 ..... 205

附录 A 二阶线性偏微分方程的变换与分类 ..... 207

附录 B 四阶龙格-库塔方法的推导 ..... 212

附录 C 解线性方程组的迭代法 ..... 217

# 第一章 预备知识

## 第一节 微分方程的相关概念与分类

### 一、微分方程的相关概念

在自然科学、工程技术甚至经济管理领域中,某些现象的变化过程往往遵循一些基本规律.这些规律抽象成为数学模型后就转变为寻找有关变量之间的函数关系.有时这种关系不容易直接建立起来,却可能建立起含有待求函数的导数或偏导数的关系式,这种关系式称为微分方程.具体地,含有未知函数及其导数或偏导数的方程称为微分方程.其中,未知函数为一元函数从而出现一元函数的导数或高阶导数的微分方程称为常微分方程.未知函数为多元函数从而出现多元函数偏导数的方程称为偏微分方程.如,

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (1-1)$$

$$y''(x) + ay'(x) = f(x, y(x)) \quad (1-2)$$

其中  $a$  为常数.

$$y^{(4)} + 4y'' - 21y = 0, \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1-5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = f(x, y), \quad (1-6)$$

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0, \quad (1-7)$$

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \quad (1-8)$$

其中,  $a_{ij}, b_k, c, u, f$  ( $i, j, k = 1, 2$ ) 都是自变量  $x, y$  的函数.

方程中所含未知函数的导数或偏导数的最高阶数称为方程的阶.以上式(1-1)至式(1-3)都是常微分方程,分别是一阶、二阶和四阶方程;式(1-4)至式(1-8)都是偏微分方程,分别是一阶、二阶、一阶、二阶、二阶方程.一阶常微分方程的一般形式为  $y' = f(x, y)$  或者  $u' = f(t, u)$ , 此处导数记号' 分别表示  $y$  关于  $x$  的导数和  $u$  关于  $t$  的导数.高阶常微分方程的一般形式为  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ,  $n \geq 2$ .

若方程对未知函数及其各阶导数或偏导数都是线性的,则称为线性微分方程,否则称为非线性微分方程.如上述方程中,式(1-1)、式(1-2)通常是非线性的,因为右端函数  $f$  含有未知函数,且  $f$  通常不是  $u$  或  $y$  的线性函数;式(1-4)、式(1-6)和式(1-7)是非线性的,式(1-5)和式(1-8)是线性的.

如果将一个函数代入微分方程以后, 方程两端恒等, 则称此函数为该方程的解. 确切地说, 若函数在所考察的区域内具有方程中所出现的各阶导数或偏导数, 且它们都是连续的, 将其代入微分方程后方方程恒成立, 这样的函数称为该方程的解析解或古典解. 方程的解析解对方程是精确成立的, 所以也称为方程的精确解. 微分方程的解一般有无穷多个.

常微分方程的解中一般含有任意常数, 这些任意常数彼此相互独立, 且任意常数的个数等于微分方程的阶数, 则此解称为常微分方程的通解. 用于确定通解中的任意常数的条件称为初始条件. 确定了任意常数的通解称为特解.

偏微分方程的解与常微分方程相比, 其自由度更大, 解中可以包含任意函数, 往往很难用通解的形式表示出来. 事实上, 在实际应用中, 重要的并不是求出方程的通解, 而是求出在一定条件下的解, 称为特解. 用于确定特解的条件称为定解条件, 一般为初始条件(方程中的某个变量被赋予时间的意义后给出的定解条件)和边界条件(在区域边界上给出的定解条件). 特别地, 只有初始条件而无边界条件的定解问题称为初值问题, 也称为柯西(Cauchy)问题; 只有边界条件而无初始条件的定解问题称为边值问题; 既有初始条件又有边界条件的定解问题则称为初边值问题, 也称为混合问题. 如,

一阶常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - \frac{2t}{u(t)}, & 0 < t \leq 1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

二阶常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} y''(x) + \varphi(x)y(x) = \psi(x), & a < x < b, \\ y(a) = 0, & y(b) = 0. \end{cases}$$

二阶偏微分方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & 0 < x < \pi, 0 < t \leq T, \quad a > 0 \text{ 为常数}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = \alpha(t), & u(\pi, t) = \beta(t), \quad 0 < t \leq T. \end{cases}$$

微分方程建立以后, 对它进行研究并找出未知函数的过程就是解微分方程. 不加特殊说明的情况下, 本书默认所要研究的微分方程定解问题的解都是存在的, 而且是唯一的. 微分方程的解在数学意义上的存在性及唯一性可以在非常一般的条件下得到证明, 这已经有了许多重要的结论. 但即使这样, 由于理论方法的局限性, 有很多方程是无法求出解析解来的. 所以从实际应用上来讲, 人们需要的往往并不是解在数学理论上的存在唯一性或者具体地求出其解析式(这属于基础数学的范畴), 而是在我们关心的某个定义范围内求出对应于精确解的近似值——这样的数值称为这个微分方程在该范围内的数值解. 寻找数值解的过程称为数值求解微分方程(这属于计算数学或应用数学的范畴). 本书所要研究的正是利用数值方法近似求解微分方程.

## 二、微分方程的分类

由于方程的种类繁多, 性质各异, 作为本科教材, 我们的目标是引导学生掌握基本的具有代表性的典型方程的分析求解方法, 以此作为敲门砖, 为以后进一步学习更专业、更具体、更特殊的方程的具体求解方法做准备. 所以, 本书重点求解的方程有以下几类:

① 一阶常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a < x \leq b, \\ y(a) = \alpha. \end{cases} \quad (1-9)$$

② 二阶常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} y''(x) + \varphi(x)y(x) = \psi(x), & a < x < b, \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} y''(x) + \varphi(x)y(x) = \psi(x), & a < x < b, \\ y'(a) + \lambda_1 y(a) = \alpha, \quad y'(b) + \lambda_2 y(b) = \beta. \end{cases} \quad (1-10)$$

③ 二阶线性偏微分方程中的抛物型方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T, \quad a > 0 \text{ 为常数}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(\pi, t) = \beta(t), & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (1-11)$$

④ 二阶线性偏微分方程中的双曲型方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T, \quad a > 0 \text{ 为常数}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(\pi, t) = \beta(t), & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (1-12)$$

⑤ 二阶线性偏微分方程中的椭圆型方程边值问题:

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y), & (x, y) \in \mathring{\Omega}, \\ u(x, y) = \varphi(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega = \Gamma. \end{cases} \quad (1-13)$$

以上方程中的有关符号、函数等将在后文具体阐述时进行描述. 式(1-11)至式(1-13)所描述的抛物型方程、双曲型方程及椭圆型方程这三大类方程都是二阶线性偏微分方程的标准形式, 是其一般形式(1-8)通过函数变换的方法获得的, 具体变换方法可以参考附录A.

另外, 关于求解微分方程的数值方法, 本书重点介绍有限差分法, 有限差分法是数值求解微分方程最有效的方法之一, 理论基础起点比较低, 入门比较容易. 有限元方法及谱方法也是目前工程上应用非常广泛的数值方法, 我们将在最后两章进行简单的介绍, 让大家对这两种方法也有所了解.

## 第二节 数值分析的工具

在进行微分方程的数值计算时, 常常需要对导数或偏导数在一点处的值进行数值近似, 所以以下泰勒(Taylor)公式及其变形需要重点掌握.

在这里, 假设一元函数  $u(x)$  关于自变量有直到  $n+1$  阶的导数, 从而有  $n$  阶泰勒公式:

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0)h + \frac{u''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad (1-14)$$

其中,  $\xi$  是在以  $x_0$  和  $x_0+h$  为端点的区间  $I$  内的某一点. 在不需要具体、精确的余项的时候, 为了方便

可以将上式写成

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0)h + \frac{u''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + O(h^{n+1}), \quad (1-15)$$

注意, 这里假设对函数  $u(x)$  存在某个常数  $M > 0$ , 满足  $|u^{(n+1)}(x)| \leq M, \forall x \in I$ . 上式中的记号“ $O$ ” (读作大  $O$ ) 定义为: 对函数  $f(x)$  和  $g(x)$ , 如果存在某个常数  $C > 0$ , 满足  $|f(x)| \leq C|g(x)|, \forall x \in I$ , 则记  $f(x) = O(g(x))$ .

同样, 还有

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - u'(x_0)h + \frac{u''(x_0)}{2!}h^2 - \cdots + (-1)^n \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + O(h^{n+1}), \quad (1-16)$$

从而由式 (1-15) 和式 (1-16) 很容易得到

$$u(x_0) = \frac{u(x_0 - h) + u(x_0 + h)}{2} + O(h^2) \quad (1-17)$$

及以下导数的表达式

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} + O(h^2) \quad (1-18)$$

或

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} + O(h^2) \quad (1-19)$$

及

$$u''(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h))}{h^2} + O(h^2) \quad (1-20)$$

基于以上导数的表达式, 如果在  $x$  轴上设置一些离散的等距节点  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), 节点间的间距为  $h$ , 就可以得到导数的有限差商形式, 即用差商近似导数 (也就是微商), 得到等距情况下导数的各阶差商形式罗列如下.

关于一阶导数的差商为:

$$\text{一阶向前差商: } u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}, \text{ 误差为 } O(h), \quad (1-21)$$

$$\text{一阶向后差商: } u'(x_i) \approx \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h}, \text{ 误差为 } O(h), \quad (1-22)$$

$$\text{二阶中心差商: } u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}, \text{ 误差为 } O(h^2). \quad (1-23)$$

关于二阶导数的差商为:

$$\text{二阶中心差商: } u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}, \text{ 误差为 } O(h^2). \quad (1-24)$$

注意, 这里的误差指的都是截断误差. 若差商表示中的截断误差为  $O(h^p)$ , 则称此差商为  $p$  阶差商. 所以, 向前、向后差商都是一阶的, 而中心差商是二阶的. 注意, 阶数的高低很大程度上影响数值方法的精度 (粗略地讲就是方法的好坏). 一般来讲当  $h$  很小时 (可以认为  $h < 1$ ), 阶数越高, 算法越好. 例如, 对函数  $u(x) = \sin x$ , 取  $[0, \pi]$  间的等距节点  $x_i = \frac{i\pi}{10}, i = 0, 1, \dots, 10$ , 则函数在  $x = \frac{\pi}{5}$  处的导数有以下差商结果:

$$u'\left(\frac{\pi}{5}\right) = u'(x_2) \approx \frac{u(x_3) - u(x_2)}{x_3 - x_2} \approx 0.704203 \quad (\text{向前差商近似})$$

$$u'\left(\frac{\pi}{5}\right) = u'(x_2) \approx \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} \approx 0.887347 \quad (\text{向后差商近似})$$

$$u'\left(\frac{\pi}{5}\right) = u'(x_2) \approx \frac{u(x_3) - u(x_1)}{x_3 - x_1} \approx 0.795775 \quad (\text{中心差商近似})$$

与精确值  $u'\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0.809017$  相比较, 可见中心差商的近似效果更好.

需要注意的是, 差分的阶数并不完全决定近似算法的好坏, 一个好的算法还得综合考虑算法的复杂度、计算时间及内存占用的情况等等, 所以不能理所当然地认为有了二阶的差商形式就不需要一阶的了.

类似地, 对于多元函数, 也可以通过取定一个变量而固定其他变量, 得到以下偏导数的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + O(\Delta y) = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0, y_0 - \Delta y)}{\Delta y} + O(\Delta y) \\ &= \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 - \Delta y)}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \end{aligned}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - \Delta y)}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

如果对平面内某区域设置等距 (关于  $x$  方向和  $y$  方向分别设置间距为  $h_x$  和  $h_y$ ) 的矩形网格节点  $(x_i, y_j)$ , 则有以下一阶偏导数的各阶差商形式:

$$\text{一阶向前差商: } \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_x}, \text{ 误差为 } O(h_x), \quad (1-25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{h_y}, \text{ 误差为 } O(h_y). \quad (1-26)$$

$$\text{一阶向后差商: } \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_x}, \text{ 误差为 } O(h_x), \quad (1-27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{h_y}, \text{ 误差为 } O(h_y). \quad (1-28)$$

$$\text{二阶中心差商: } \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h_x}, \text{ 误差为 } O(h_x^2), \quad (1-29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2h_y}, \text{ 误差为 } O(h_y^2). \quad (1-30)$$

以及二阶偏导数的二阶中心差商:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h_x^2}, \text{ 误差为 } O(h_x^2), \quad (1-31)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h_y^2}, \text{ 误差为 } O(h_y^2). \quad (1-32)$$

以上各种差商形式及其阶数请同学们务必记住! 后续微分方程的差分格式设计中将经常使用。

## 本章要求及小结

1. 掌握微分方程的相关概念: 常微分方程、偏微分方程、线性方程、非线性方程、解、解析解、数值解、定解条件、初值问题、边值问题、初边值问题。
2. 掌握一阶、二阶导数或偏导数的各种差商形式。

## 习 题 一



1. 指出下列方程的类型(指明是常微分方程还是偏微分方程, 是线性方程还是非线性方程, 并指出方程的阶数):

$$(1) y' = x^2 + 100y^2$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$(4) y''' - 3yy'' + e^y = 0$$

$$(5) y^{(4)} - y^{(2)} + y = e^x$$

2. 设函数  $f(x) = e^{2x}$ , 考察在  $[0, 1]$  区间上的一个等距剖分  $x_i = \frac{i}{10}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ ), 分别利用一阶向前、一阶向后、二阶中心差商近似计算  $f(x)$  在  $x = 0.2$  处的导数值, 并与精确值  $f'(0.2)$  相比较. 再用二阶中心差商近似计算  $f(x)$  在  $x = 0.4$  处的二阶导数值并与精确值  $f''(0.4)$  相比较. 要求写一段简单的程序实现以上功能。

3. 对上题进一步分析, 如果将等距剖分节点设为  $x_i = \frac{i}{20}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 20$ ), 在这样的剖分情况下再进行上述近似计算, 并将计算的结果与上题比较, 有什么结论?



## 第二章 常微分方程的数值解法

在自然科学的许多领域特别是科学与工程计算中,经常遇到常微分方程的求解问题.然而,只有非常少数且十分简单的微分方程可以用初等方法求得它们的解,多数情形只能利用近似方法求解,如幂级数解法、皮卡(Picard)逐步逼近法等.这些方法可以给出解的近似表达式,通常称为近似解析方法,主要是通过手算和符号计算软件如 Maple<sup>[1]</sup>、Mathematica<sup>[2]</sup>实现.还有一类近似方法称为数值方法,这些方法可以给出解在一些离散点上的近似值,主要是利用计算机编写程序来处理.我们所要研究的正是这类方法.

本章主要研究的对象为一阶常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a < x \leq b, \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad (2-1)$$

其中,  $f(x, y)$  为  $x, y$  的已知函数,  $\alpha$  为给定的初始值,将上述问题的精确解记为  $y(x)$ . 正如上面所提到的,即使形如式(2-1)这样形式简单的方程也未必能找到精确解.事实上, C. Henry Edwards 和 David E. Penney 在其所著的《常微分方程基础》<sup>[3]</sup>一书中这样描述:具有以上一般形式的微分方程可以用初等的方法精确求解出来只是个例外而不是常规(It is the exception rather than a rule when a differential equation of the above general form can be solved exactly and explicitly by elementary methods). 作为我们要研究的对象,原则上只有当初值问题式(2-1)的解存在且唯一时,使用数值解法去求解才有意义,这一前提条件由下面的存在唯一性定理保证.当然,有时候我们也会遇到一些实际问题理论上难以证明其解的存在唯一性或者根本不知道原问题解的情况,这些问题属于微分方程基本理论研究的范畴,这时通常可以采用数值方法先进行试探性的数值模拟,然后根据数值方法的结果来提供一些理论上的证明方向与思路.

**定理** 设函数  $f(x, y)$  在区域  $D: a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}$  上连续,且在区域  $D$  内关于  $y$  满足李普希兹(Lipschitz)条件,即存在正数  $L$ ,使得对于  $D$  内任意两点  $(x, y_1)$  与  $(x, y_2)$ ,恒有  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$ ,则初值问题式(2-1)的解  $y(x)$  存在并且唯一.

**证:** 此定理的证明可在普通的《常微分方程》教材上找到,此处从略.

用数值方法求解问题式(2-1)的基本思想是:在求解区域  $I = [a, b]$  上任取  $m+1$  个节点  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ ,在这些节点上采用离散化方法(通常用数值积分、微分、泰勒展开式等)将上述初值问题化成关于离散变量的相应问题,并且将所得离散问题的解  $y_i (i = 0, 1, \cdots, m)$  作为精确解  $y(x_i)$  的近似值,这样求得的  $y_i$  就是上述初值问题在节点  $x_i$  上的数值解.离散节点的下标从 0 开始,用 C 语言(数组从 0 开始计数)进行程序设计时很方便.一般说来,不同的离散过程将得到不同的数值方法,从而得到不同的解.数值方法的具体操作过程如下.

第一步,网格剖分(在求解区域上作剖分).

在求解区域  $I$  上取  $m+1$  个节点  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ ,这里  $h_i = x_{i+1} - x_i$  称为  $x_i$  到  $x_{i+1}$  的步长,  $i = 0, 1, \cdots, m$ . 这些  $h_i$  可以不相等,但有时为了计算方便,特别是编写程序方便,一般取成相等,此时就有等步长  $h = \Delta x = \frac{b-a}{m}$ ,这样的区域剖分称为等距剖分或者一致网格剖分,  $x_i$  称为网格节点.整个剖分过程相当于对一维的求解区域进行离散化.