复旦大学数学系主编

拓扑学

李元熹　张国樑　编

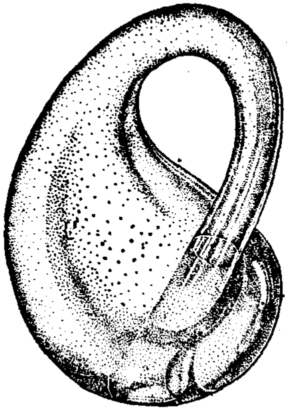
上海科学技术出版社

拓　　扑　　学

复旦大学数学系主编

李元熹　张国樑　编

上海科学技术出版社



Klein 瓶

拓扑学

复旦大学数学系主编

李元熹　张国樑　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 10.75　字数 284,000

1986 年 9 月第 1 版　1986 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—6,600

统一书号：13119·1335　　定价：2.65 元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革. 这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960 年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从 1962 年到 1965 年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验. 当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的.

1980 年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和每门课程的教学大纲. 同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性和灵活性相结合的原则". 按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革. 我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材.

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程. 这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端.

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的. 其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是必不可少的. 这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据. 但是我们还注意到，在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化，尽量根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑.

使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律．我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学．

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用．在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受．正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系．

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材，都经过多次的课堂教学实践．一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学．我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版．

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务．由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟．

上海科技出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢．

复旦大学数学系

1982.4.

编者的话

本书是根据80年全国教材会议拟订的拓扑学教学大纲编写的，可作为综合大学数学专业拓扑学课程的教材．全书分点集拓扑学与代数拓扑学两部分，以后者为重点．内容主要包括点集拓扑、基本群与覆盖空间、单纯同调论．另立一章简单介绍代数拓扑学的进一步内容，如奇异同调论与同伦群等．

学习本书所必须的预备知识是数学分析和高等代数（包括群论初步）．我们要求读者具有一定的数学修养，而不要求事先掌握过多的数学知识．

为此，我们特别注意提供来自数学分析和几何学的背景，力求阐明有关概念和命题、定理的来龙去脉，并给出了一些经典的应用．在强调拓扑学处理问题的基本思想的同时，我们着重几何式的方法，使之易于为初学者所接受．希望读者通过本书既能学到点集拓扑和代数拓扑中多种不同的方法和应用，又能加强几何直观能力．

作为一个整体的全书各章仍保持一定的相对独立性，以便于按不同的要求和侧重点来组织教学．对于已学过点集拓扑或欧氏空间的点集拓扑学的读者，可选取第二、三章和第四章的部分内容，这样对初等代数拓扑学将有一个较全面的了解；对于另一些读者，在学完第一章后，可选取第二章或者第三章，然后选取第四章的有关章节．对于程度较好的班级，在一学期内讲授全书的绝大部分内容是能够做到的．

书末有几个附录．附录A系统地提供本书所必须的群论知识．附录B和E是代数拓扑中两个重要定理的完整证明，供有兴趣的读者查阅．附录C和D是代数拓扑中的两个著名定理，从中

可以看到代数拓扑的方法和力量. 附录的内容不属教学大纲的范围，但可以部分地穿插在教学中.

本书给出了较多的难易程度不同的习题. 有的是为了加深理解课程内容，掌握有关方法；有的是为了扩大知识面. 完成一定数量的习题是学好本课程所必不可少的环节.

为查阅方便，定理和定义等给予统一的编号. 例如：第二章中第20个定理（或定义、引理、命题、推论）编号为2.20. 本书所用记号力求是标准而流行的.

本书曾用于复旦大学数学系数学专业81～84届拓扑课的教学实践，虽经多次修改，但限于编者水平，一定还存在缺点和错误，恳切希望读者批评指正.

本书的编写得到苏步青、谷超豪、夏道行、金福临和胡和生诸先生的关心和指导. 历届同学也提出了不少修改意见，在此一并致谢.

编　者

1984年1月

目　　录

序
编者的话

第0章　集合与映射 ……………………………………………1

第一章　点集拓扑 ……………………………………………5

§1.1　拓扑空间 ……………………………………………6
1.1.1　拓扑　开集　闭集 ……………………………………6
1.1.2　邻域　闭包　内部　边界 ……………………………11
1.1.3　子空间 ………………………………………………14
1.1.4　基　子基　局部基 ……………………………………16
§1.2　连续映射 ……………………………………………18
1.2.1　连续映射 ……………………………………………19
1.2.2　同胚　拓扑性质 ………………………………………21
1.2.3　积空间 ………………………………………………27
1.2.4　商空间 ………………………………………………29
1.2.5*　收敛性 ………………………………………………35
§1.3　可数性　分离性 ………………………………………37
1.3.1　可数性 ………………………………………………37
1.3.2　分离性 ………………………………………………38
1.3.3　Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理 ……………………42
§1.4　紧性 …………………………………………………46
1.4.1　紧空间 ………………………………………………47
1.4.2*　可数紧空间　序列紧空间　聚点紧空间 ………………53
1.4.3　局部紧性　单点紧化 …………………………………57

§1.5 连通性 ……60
1.5.1 连通空间和局部连通空间 ……60
1.5.2 道路连通空间和局部道路连通空间 ……65
§1.6 点集拓扑的进一步概念 ……67
1.6.1 度量化定理 ……67
1.6.2 单位分解 ……71
1.6.3 流形 ……72
1.6.4 仿紧空间 ……73
1.6.5 函数空间 ……74

第二章 基本群和覆盖空间 ……89
§2.1 同伦 ……90
2.1.1 映射的同伦 ……90
2.1.2 同伦等价 ……93
§2.2 基本群 ……98
2.2.1 道路类及其乘法 ……98
2.2.2 基本群及其性质 ……103
§2.3 基本群的计算 ……108
2.3.1 圆周的基本群 ……108
2.3.2 计算基本群的方法 ……114
§2.4 覆盖空间的概念及其基本性质 ……117
2.4.1 覆盖空间的定义与例子 ……117
2.4.2 覆盖空间的基本性质 ……121
§2.5 映射提升定理 ……127
§2.6 覆盖空间的分类定理 ……130
2.6.1 覆盖空间的示性类 ……131
2.6.2 分类定理 ……132
2.6.3* 覆盖空间的存在性 ……135
§2.7 万有覆盖空间 ……139

第三章 单纯同调论 ……155
§3.1 单纯复形与多面体 ……155
3.1.1 单纯复形 ……156

3.1.2 多面体与可剖空间 ……158
3.1.3 复形的定向 ……161
3.1.4* 抽象单纯复形 ……162
§ 3.2 单纯复形的同调群 ……164
3.2.1 链群与边缘同态 ……165
3.2.2 同调群的定义 ……168
3.2.3 复形的连通性与零维同调群的结构 ……170
3.2.4 计算同调群的进一步例子 ……171
§ 3.3 Euler-Poincaré 公式 ……176
3.3.1 整同调群的结构 ……176
3.3.2 Euler-Poincaré 公式 ……177
3.3.3* 以任意 Abel 群作系数群的同调群 ……180
§ 3.4 单纯映射与单纯逼近 ……182
3.4.1 单纯映射及其诱导同态 ……184
3.4.2 单纯逼近 ……188
§ 3.5 单纯逼近定理和连续映射的诱导同态 ……192
3.5.1 重心重分和单纯逼近定理 ……193
3.5.2 重分链映射与连续映射的诱导同态 ……196
3.5.3 同调群的伦型不变性 ……198
§ 3.6 伪流形 ……199
§ 3.7 球面上的映射与不动点定理 ……203
3.7.1 拓扑度 ……204
3.7.2 球面的向量场 ……208
3.7.3 Borsuk-Ulam 定理……210
3.7.4 Brouwer 不动点定理 ……214
3.7.5 Lefschetz 不动点定理……215
§ 3.8 局部同调群与维数不变性……220
3.8.1 局部同调群 ……220
3.8.2 维数不变性 ……224
§ 3.9 棱道群. $\pi_1(|K|)$与 $H_1(K)$的关系……225

第四章 代数拓扑学中若干其他论题 ……241
§ 4.1 相对同调群与同调序列 ……241

4.1.1 相对同调群 ……241
4.1.2 切除定理 ……244
4.1.3 同调序列 ……245
§4.2 上同调群与上同调环 ……248
4.2.1 上同调群 ……249
4.2.2 上同调环 ……251
§4.3 奇异同调论 ……254
4.3.1 奇异同调群 ……255
4.3.2 Mayer-Vietoris 序列 ……259
§4.4 同伦群 ……262
4.4.1 定义和简单性质 ……262
4.4.2 同伦群的交替描述及其进一步的性质 ……263
4.4.3 同伦论中几个著名的结果 ……266
§4.5 范畴与函子 同调论的公理 ……270
4.5.1 范畴与函子 ……270
4.5.2 同调论的公理 ……273

附录A Abel 群与非 Abel 群 ……275
附录B Van Kampen 定理 ……288
附录C Jordan 曲线定理 ……295
附录D 紧曲面的拓扑分类 ……303
附录E 同调群的拓扑不变性 ……316

符号一览表 ……324
参考书目 ……327
索引 ……329

第0章　集合与映射

在这里我们给出本书要用到的关于集合与映射的一些基本概念与结论．其证明留给读者．关于集合、子集、集合的并与交等概念假定读者已熟悉，所用符号是流行的．

整数集、有理数集、实数集与复数集分别记为 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$．正整数集、正有理数集与正实数集分别记为 $\mathbb{Z}_+$、$\mathbb{Q}_+$ 与 $\mathbb{R}_+$．

1．De Morgan 公式

定义　设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是以 Λ 为指标集的一族集合，$\mathscr{A}$ 中集合的并集是集合 $\{x\in A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$，记为 $\cup\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$，或 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$．$\mathscr{A}$ 中集合的交集是集合 $\{x\in A_\lambda \mid \forall\lambda\in\Lambda\}$，记为 $\cap\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$，或 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$．

命题　(De Morgan 公式)　设 $\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是集合 X 的一族子集，则有

$$X\setminus\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus A_\lambda);$$

$$X\setminus\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus A_\lambda).$$

2．笛氏积

定义　设 X, Y 是集合，X 和 Y 的笛氏积是由所有有序偶 (x, y) 组成的集合，$x\in X$, $y\in Y$，记为 $X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x, y) \mid x\in X,\ y\in Y\}.$$

n 个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的笛氏积定义为

$$X_1\times\cdots\times X_n=\{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i\in X_i,\ i=1, \cdots, n\}.$$

n 个实数集的笛氏积记为 $\mathbb{R}^n$．

3. 等价关系

定义 集合 X 上的关系 R 是笛氏积 $X\times X$ 的一个子集，若 $(x_1, x_2)\in R$，记为 x_1Rx_2.

(1) 若对任意 $x\in X$，有 xRx，则称 R 是自反的；

(2) 若对任意 $x, y\in X$，xRy 蕴涵 yRx，则称 R 是对称的；

(3) 若对任意 $x, y, z\in X$，xRy 和 yRz 蕴涵 xRz，则称 R 是传递的.

自反、对称且传递的关系称为等价关系. 等价关系常记为$\sim$.

设$\sim$是集合 X 上的一个等价关系，$x\in X$，集合 $\{y\in X|x\sim y\}$ 称为 x 所属的关于$\sim$的等价类，记为$[x]$.

命题 设 R 是集合 X 上的一个等价关系，则$\{[x]|x\in X\}$构成 X 的一个分割，即 $X=\bigcup\{[x]|x\in X\}$且$[x]\cap[y]=\emptyset$或$[x]=[y]$，$x, y\in X$.

以 $X/\sim$ 记 X 关于 $\sim$ 的等价类所成的集合，称为 X 关于$\sim$的商集合，即 $X/\sim=\{[x]|x\in X\}$.

4. 映射

定义 设 X 和 Y 是集合，f 是 $X\times Y$ 的子集. 如果对每个 $x\in X$，存在唯一的 $y\in Y$，使得 $(x, y)\in f$，则称 f 是 X 到 Y 的一个映射，记作 $f: X\to Y$. $(x, y)\in f$ 记作 $y=f(x)$. X 称为 f 的定义域，Y 称为 f 的值域，集合 $\{f(x)|x\in X\}$ 称为 f 的象，记作 $\mathrm{Im}f$. 当值域为数域时常称映射为函数.

定义 设 $f: X\to Y$ 是映射，$A\subset X$，$B\subset Y$，集合

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$$

称为 A 在 f 下的象；集合

$$f^{-1}(B)=\{x|f(x)\in B\}$$

称为 B 在 f 下的原象.

定义 设 $f: X\to Y$ 是映射，若 $\mathrm{Im}f=Y$，则称 f 是满射；若对任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$是空集或独点集，则称 f 是单射；既单且满的

映射称为双射或一一对应.

命题 设 $\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的一族子集 $\{B_\mu|\mu\in M\}$ 是 Y 的一族子集, $f: X\to Y$ 是映射, 则

(1) $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$;

(2) $f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$;

(3) $f^{-1}(\bigcap_{\mu\in\Lambda}B_\mu)=\bigcap_{\mu\in\Lambda}f^{-1}(B_\mu)$;

(4) $f^{-1}(\bigcup_{\mu\in\Lambda}B_\mu)=\bigcup_{\mu\in\Lambda}f^{-1}(B_\mu)$.

命题 设 $f: X\to Y$ 是映射, $A\subset X$, $B\subset Y$, 则

(1) $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$;

(2) 若 f 是满射, 则 $Y\setminus f(A)\subset f(X\setminus A)$; 若 f 是单射, 则 $f(X\setminus A)\subset Y\setminus f(A)$;

(3) $A\subset f^{-1}(f(A))$. 当 f 是单射时, $A=f^{-1}(f(A))$;

(4) $f(f^{-1}(B))\subset B$. 当 f 是满射时, $f(f^{-1}(B))=B$.

定义 设 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 是映射, f 和 g 的复合映射 $g\circ f: X\to Z$ 定义为 $g\circ f(x)=g(f(x))$, $x\in X$. $g\circ f$ 常简记为 gf.

定义 设 X 是一个集合, $1_X: X\to X$ 定义为 $1_X(x)=x$, $x\in X$, 称为 X 上的恒同映射. 设 $f: X\to Y$ 是映射, $A\subset X$, 映射 $f|_A: A\to Y$ 定义为 $f|_A(x)=f(x)$, $x\in A$, 称为 f 在 A 上的限制, f 称为 $f|_A$ 在 X 上的扩张. 特别地, $1_X|_A: A\to X$ 称为包含映射, 也记为 $i: A\to X$.

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系. 映射 $\pi: X\to X/\sim$ 定义为 $\pi(x)=[x]$ 称为自然射影.

利用映射可定义任意一族集合的笛氏积.

定义 设 $\{X_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是一族集合, 它们的笛氏积是集合 $\{f: \Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda|\forall\lambda\in\Lambda,\ f(\lambda)\in X_\lambda\}$, 记为 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$. 其中元素 f 常记为 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 或 (x_λ), 这里 $x_\lambda=f(\lambda)$.

显然, 当 Λ 为有限集时, 这样定义的笛氏积和前面 **2** 中定义的笛氏积可建立自然的一一对应, 因此两种定义事实上是一致的.

设 $\mu\in\Lambda$, p_μ: $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\to X_\mu$ 由 $p_\mu((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})=x_\mu$ 给出，称为第 μ 个射影.

定义 设 X, Y, Z 是集合，f: $X\to Y$, g: $Y\to Z$, h: $X\to Z$ 是映射，如果 $gf=h$: $X\to Z$, 则称下面图表可交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

类似地，如果下面图表中的映射满足 $gf=qp$: $X\to Z$, 则称此图表可交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ W \arrow[r, "q"] & Z \end{tikzcd}$$

第一章　点集拓扑

什么是拓扑学？通俗地说，当我们研究几何图形的各种性质时，发现有一类性质，在图形被“拉伸”、“扭曲”但不撕破和重迭的过程中保持不变．不妨将图形想象为具有弹性的橡皮膜，在“拉伸”，“扭曲”等变形过程中，原来不同的点仍变为不同的点(一一对应)，原来邻近的点仍变为邻近的点（连续变换），并且变形后邻近的点是原来邻近的点的象（逆变换连续），这种变形称为“拓扑变换”或“同胚”，能这样互相变换的图形称为“拓扑等价”的．例如，圆周可以拓扑变换为长方形四条边组成的几何图形．将圆周切断，打个结再粘接也是拓扑变换．然而圆周与“8”字形就不是拓扑等价的．因为要将圆周变成“8”字形，必定将圆周上不同的两点熔合为同一点．

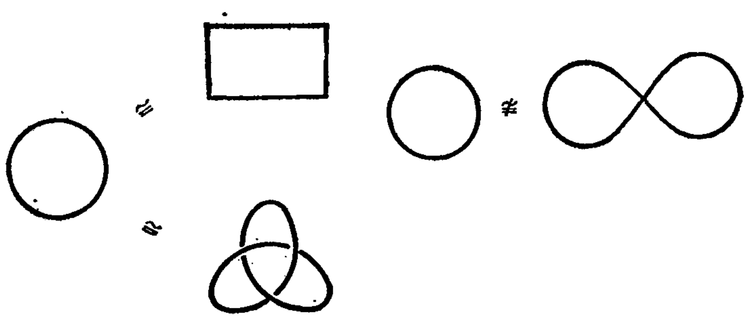


图　1.1

拓扑学就是研究图形在拓扑变换下不变性质的学科．

拓扑学包括点集拓扑学、代数拓扑学等分支．点集拓扑学是在 Cantor 的集合论和 Frechet、Hausdorff 等人工作的基础上发

展起来的.它起源于将集合论与函数空间的研究结合起来的想法.点集拓扑学将几何图形看作是点的集合，而且具有某种“空间结构”,即不是互不相关的一堆点,而是通过“捆扎”使点与点之间发生某种联系,于是导致拓扑空间的概念.在本章中,将给出拓扑空间和连续映射的定义以及基本性质，研究在一个集合上给出拓扑的各种方法,以及加上进一步限制的重要空间(如紧空间、连通空间)的性质等等.

点集拓扑学是数学的基础,它在微分方程、几何、概率论、函数论与泛函分析中都有广泛的应用，其基本思想与处理方法对近代数学产生深刻的影响.

§1.1 拓扑空间

1.1.1 拓扑 开集 闭集

下面，我们将 n 维实欧氏空间记为 $\mathbb{R}^n=\{(x_1, \cdots, x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}, i=1, \cdots, n\}$. 其中任意两点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 与 $y=(y_1, \cdots, y_n)$ 的距离为

$$d(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

它的基本性质可概括如下:对任意 $x, y, z\in\mathbb{R}^n$, 有

(D_1) $d(x, y)\geqslant 0$, 当且仅当 $x=y$ 时 $d(x, y)=0$;

(D_2) $d(x, y)=d(y, x)$;

(D_3) $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

1 维和 2 维欧氏空间分别称为实直线与欧氏平面.

连续性是数学分析中的一个基本概念.在欧氏空间中，可以利用距离来描述“邻近”的概念,从而可用“$\varepsilon-\delta$”方式来定义连续性.由此很自然地可以将欧氏空间的概念推广.

1.1 定义 设 X 是一个集合,如果映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 满足上述性质(D_1),(D_2)和(D_3)，则称(X, d)为度量空间，简记为 X, d 称为 X 上的度量，$d(x, y)$称为点 x 与 y 的距离.