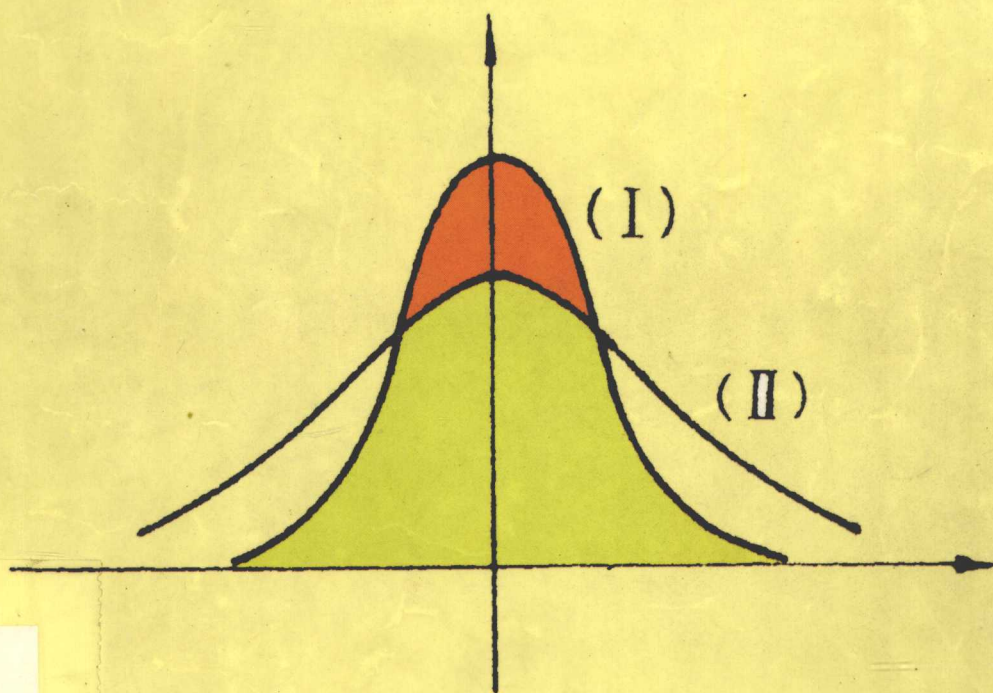


❖ 现代测绘科技丛书

测量平差

赵长胜 石金峰 主编



7

4701

教育科学出版社

测量平差

赵长胜 石金峰 王仲锋 李勇 编著

测量平差



教育科学出版社



0224701

责任编辑:徐长发

装帧设计:安广军

责任校对:赵长胜

图书在版编目(CIP)数据

现代测绘科技丛书/武文波 主编

测量平差/赵长胜 石金峰 王仲锋 李 勇 编著

北京:教育科学出版社,2000.05

ISBN 7-5014-1648-6

I. ①现…②武…

II. ①测…②赵…③石…④王…⑤李…

III. 测量平差

IV. P. 207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(20)第 01469 号

测量平差

编著 赵长胜 石金峰 王仲锋 李 勇

教育科学出版社出版

(北京海淀区北三环中路 46 号)

通州印刷厂印刷

2000 年 5 月第 1 版 2000 年 5 月北京第 1 次印刷

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:13.75

字数:320 千字

印数:1000 册

ISBN 7-5014-1648-6/P. 208-6(课)

定价:25.00 元

《现代测绘科技丛书》编著说明

辽宁工程技术大学测量工程系具有近五十年的办学历史,具有雄厚的师资力量、较先进的教学设备及丰富的办学经验。“大地测量学与测量工程”学科为辽宁省重点学科,“测量工程实验室”为国家煤炭工业重点实验室。现有“大地测量学与测量工程”、“地图制图学与地理信息工程”、“摄影测量与遥感”三个硕士授权点。近年来在科研和教学上均取得了可观的成果和经验,在东北地区、煤炭工业系统乃至全国都有一定的影响。

随着计算机技术、微电子技术、空间技术、通讯技术和信息技术的不断进步,测绘仪器设备不断更新换代,测绘技术领域也发生了深刻的变化。从数据的采集、处理和管理,到数据的存储、输出,不断向自动化、数字化、集成化、科学化的方向迈进。GPS技术、RS技术、GIS技术、数字化测绘技术开始广泛地应用于国民经济建设的各个领域。为了适应测绘科学技术的迅猛发展,满足科教兴国战略方针的需要,从1995年开始,我们进行了面向二十一世纪的课程体系和教学内容的改革,已取得显著成果,并按新的教学体系和教学内容组织编著了这套《现代测绘科技丛书》。该科技丛书是按新科学体系经过优化组合后编著而成,其特点是面向未来、面向现代化,删除陈旧内容,纳入新理论和新技术。每部书既注意基本原理、基础知识的阐述,又大量的融入高新技术,并具有大量的实际操作内容。这些都是全体科技人员的科研成果、生产实践和教学经验的科学总结。该科技丛书密切结合教学实践妥善处理了传统技术与新技术之间的关系,各书之间既相互衔接,又自成体系。

在本科技丛书的编著中,徐州师范大学、东北大学、河北理工学院、黑龙江工程学院、鞍山钢铁学院、长春建筑高等专科学校、本溪冶金高等专科学校等院校的有关专家参加了编著工作,并提出了宝贵意见,对本科技丛书的完成给予了有益的帮助。

本科技丛书是经过多年教学试用后重新组织编著的。编著者都是具有丰富教学、科研和生产实践经验的教授和副教授,同时组织了专家审阅和修改,现决定正式出版。该科技丛书适用对象为测绘生产及科研工作者的参考和自学用书,亦可作为“测绘工程”、“地理信息系统”、“城市规划”、“土地管理”及相关专业本、专科生教学用书。

《现代测绘科技丛书》编著委员会成员:

主 任:武文波

副主任:宋伟东、金继读、刘谊、马洪滨、王仲锋、包永德、王晏民

编 委(以姓氏笔画为序):马洪滨、马明栋、马振利、马俊海、王家贵、王仲锋、王国军、王晏民、石金锋、包永德、宋伟东、刘立忱、刘谊、乔仰文、朱伟刚、邢贵和、任秀、杜维甲、杜明义、李勇、李正中、金继读、武文波、张永彬、徐爱功、施群德、赵长胜、赵波、景海涛、谢宏全

秘 书:马振利、朱伟刚

《现代测绘科技丛书》(第一部分)名称、编著者:

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1、数据库原理及在测量中应用 | 武文波、马洪滨、景海涛、王崇倡 |
| 2、面向对象的测量程序设计 | 马明栋、赵长胜、施群德、杜维甲 |
| 3、计算机绘图原理及应用 | 杜明义、包永德、朱伟刚、李巍 |
| 4、数字化测图原理及应用 | 宋伟东、张永彬、金继读、赵波 |
| 5、GPS 定位与应用 | 乔仰文、赵长胜、谢宏全、徐爱功 |
| 6、测量平差 | 赵长胜、石金锋、王仲锋、李勇 |
| 7、测绘学基础 | 王家贵、金继读、刘立忱、马俊海 |
| 8、地理信息系统原理 | 马明栋、武文波、申立群、宋伟东 |
| 9、遥感技术基础 | 徐爱功、杜明义、刘谊、武文波 |
| 10、现代路线工程测量 | 李正中、任秀、周涌波、武文波 |
| 11、测量学(非测绘专业用) | 刘谊、邢贵和、马振利、王国军 |

《现代测绘科技丛书》编著委员会

辽宁工程技术大学测量工程系

2000 年 1 月 20 日

前 言

自 80 年代以来,测量误差理论与数据处理方法产生了飞跃的发展,从只对偶然误差的分析处理到顾及系统误差、粗差的综合分析与处理,从独立观测值的误差传播到广义误差传播,从传统的条件平差、间接平差到自由网平差、滤波、推估和配置,从以表格手算为主到以计算机电算为主等方面都有长足的发展与进步。另外,随着现代测绘科学技术的不断发展,测量新技术、新仪器层出不穷,专业面越来越宽,因此对测量平差的课程教学进行改革是必要的和必需的,为满足新的教学体系的需要,我们编写了本书。

本书的编写,本着有利于加强基础理论学习、有利于计算机的应用、有利于提高能力培养、有利于知识面的拓宽和少而精的原则,努力做到理论基础扎实、方法先进、内容实用和深入浅出。

全书共分八章,第一至第四章是测量平差基础部分,包括观测误差、精度指标、广义传播率、最小二乘原理、条件平差、间接平差、直接平差、附有条件的间接平差、逐次间接平差和附有系统参数的间接平差;第五章为控制网平差,包括各种平面控制网(三角网、三边网、导线网和边角网)和 GPS 向量控制网的平差方法、程序设计思路及其算法;第六章为平差结果的统计检验,包括偶然误差特性的检验、平差参数的显著性检验、系统参数的检验、方差分量估计和粗差检验;第七章为自由网平差,介绍了自由网平差的概念、数学模型和解算方法;第八章介绍了滤波、推估和配置的概念、理论与应用方法。

本书在内容上主要突出了计算机的应用,与现有平差教材相比,把平差的函数模型改造成容易编写程序的表达方式,增加了算法和程序框图,删减了与手算有关的计算方法与表格。

在本书的编写过程中,参阅了大量文献,引用了同类书刊中的部分内容与算例,在此,谨向有关作者,表示衷心的感谢!

本书由赵长胜教授主编,石金峰教授参加了编写大纲的制订,并审阅了全部书稿,提出了宝贵的修改意见,石金峰、王仲铎和李勇同志参加了部分章节的编写工作。

由于作者的水平有限,书中如有不妥与错误之处,肯请广大读者予以批评指正。

编 者

二〇〇〇年六月

目 录

第一章 观测误差与传播律

第一节 观测误差	1
第二节 偶然误差的统计性质	3
第三节 衡量精度的指标	7
第四节 协方差阵、协因数阵和权阵	16
第五节 广义传播律	22
第六节 广义传播律在测量中的应用	30
第七节 系统误差的传播	36

第二章 最小二乘原理

第一节 参数估计及其最优性质	40
第二节 最小二乘原理	44
第三节 测量平差的数学模型	48
第四节 函数模型的线性化	52

第三章 条件平差

第一节 条件平差原理	55
第二节 条件方程	59
第三节 精度评定	66
第四节 条件平差算法与算例	70
第五节 平差结果的统计性质	73

第四章 间接平差

第一节 间接平差原理	77
第二节 误差方程	81
第三节 精度评定	89
第四节 间接平差算法与算例	95
第五节 误差椭圆	103
第六节 间接平差特例——直接平差	112
第七节 附有条件的间接平差	114
第八节 逐次间接平差	120
第九节 附有系统参数的间接平差	127
第十节 平差结果的统计性质	128

第五章 控制网平差

第一节 平面控制网平差模型的建立	132
第二节 平面控制网平差计算	140
第三节 平面控制网平差程序设计	145
第四节 GPS 向量控制网平差	150

第六章 平差结果的统计检验

第一节 概述	154
第二节 偶然误差特性的检验	160
第三节 平差参数的显著性检验	165
第四节 系统参数的检验	171
第五节 方差分量估计	172
第六节 粗差检验	175

第七章 自由网平差

第一节 概述	181
第二节 自由网平差的直接解法	184
第三节 附加条件法	187
第四节 经典转换法	196

第八章 滤波、推估与配置

第一节 最小二乘滤波与推估	201
第二节 最小二乘配置	205

主要参考文献	210
--------	-----

第一章 观测误差与传播律

第一节 观测误差

当对某量进行重复观测时,就会发现,这些观测值之间会存在一些差异。例如,对同一段距离重复测量若干次,量得的长度通常是互有差异。另一种情况是,如果已经知道某几个量之间应该满足某一理论关系,但当对这几个量进行观测后,也会发现实际观测结果往往不能满足应有的理论关系。例如,从几何上知道一平面三角形三内角之和应等于 180° ,但如果对这三个内角进行观测,则三内角观测值之和常常不等于 180° ,而有差异。

在同一量的各观测值之间,或在各观测值与其理论上的应有值之间存在差异的现象,在测量工作中是普遍存在的。为什么会产生这种差异呢?不难理解,这是由于观测值中包含有观测误差的缘故。

观测误差的产生,原因很多,概括起来有以下三方面:

一、测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器只具有一定限度的精密度,因而使观测值的精密度受到了一定的限制,例如,在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时,就难以保证在估读厘米以下的尾数时完全正确无误;同时,仪器本身也有一定的误差,例如,水准仪的视准轴不平行于水准轴,水准尺的分划误差等等。因此,使用这样的水准仪和水准尺进行观测,就会使水准测量的结果产生误差。同样,经纬仪、测距仪、GPS、全站仪等仪器的误差也使测量结果产生误差。

二、观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性,所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时,观测者的工作态度和技术水平,也是对观测成果质量有直接影响的重要因素。

三、外界条件

观测时所处的外界条件,如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果直接产生影响;同时,随着温度的高低,湿度的大小,风力的强弱以及大气折光的不同,它们对观测结果的影响也随之不同,因而在这样的客观环境下进行观测,就必然使观测的结果产生误差。

上述测量仪器、观测者、外界条件三方面的因素是引起误差的主要来源。因此,我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想象,观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些,观测中所产生的误差平均说来就可能相应地小一些,因而观测成果的质量就会高一些。反之,观测条件差一些,观测成果的质量就会低一些。如果观测条件相同,观测成果的质量也就可以说是相同的。所以说,观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是,不管观测条件如何,在整个观测过程中,由于受到上述种种因素的影响,观测的结

果就会产生这样或那样的误差。从这一意义上来说,在测量中产生误差是不可避免的。当然,在客观条件允许的限度内,测量工作者可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

根据观测误差的来源与对观测结果的影响性质、可将观测误差分为系统误差、偶然误差和粗差三种。

一、系统误差

在相同的观测条件下作一系列的观测,如果误差在大小、符号上表现出系统性,或者在观测过程中按一定的规律变化,或者为某一常数,那么,这种误差就称为系统误差。

例如,用具有某一尺长误差的钢尺量距时,由尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加,距离愈长,所积累的误差也愈大;经纬仪因校正或整置的不完善而使所测角度产生误差;等等。这些都是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。又如,用钢尺量距时的温度与检定尺长时的温度不一致,而使所测的距离产生误差;测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等等,这些都是由于外界条件所引起的系统误差。此外,如某些观测者在照准目标时,总是习惯于把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧,也会使观测结果带有系统误差。

二、偶然误差

在相同的观测条件下作一系列的观测,如果误差在大小和符号上都表现出偶然性,即从单个误差看,该列误差的大小和符号没有规律性,但就大量误差的总体而言,具有一定的统计规律,这种误差称为偶然误差。

例如,在用经纬仪测角时,测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差、仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然(随机)因素所引起的小误差的代数和。例如照准误差可能是由于脚架或觇标的晃动或扭转、风力风向的变化、目标的背影、大气折光和大气透明度等等偶然因素影响而产生的小误差的代数和。因此,测角误差实际上是许许多多微小误差项的总和,而每项微小误差又随着偶然因素影响的不断变化,其数值忽大忽小,其符号或正或负,这样,由它们所构成的总和,就某个个体而言,无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的,因此,把这种性质的误差称为偶然误差。

根据概率统计理论知,如果各个误差项对其总和的影响都是均匀地小,即其中没有一项比其它项的影响占绝对优势时,那么它们的总和将是服从或近似地服从正态分布的随机变量。因此,偶然误差就其总体而言,都具有一定的统计规律,故有时又把偶然误差称为随机误差。

三、粗 差

粗差是一种大量级的观测误差,它是测量上的失误。在测量成果中,是不允许粗差存在的。

粗差产生的原因较多,主要是作业员的疏忽大意、失职而引起的,如大数被读错、读数被记录员记错、照准了错误的目标、在航测象片上选错了控制点的影象等。

在观测数据中应尽可能设法避免出现粗差。行之有效的发现粗差的方法有:进行必要的重复观测;通过多余观测,采用必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗差。国家的测绘机构制定的各类测量规范和细则,一般也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此,一旦发现粗差,该观测值必须舍弃或重测。尽管

我们十分小心谨慎,粗差有时仍然在所难免。因此,如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差,或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差计算成果的影响,乃是测绘界十分关注的课题之一。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时,偶然误差就居于次要地位,观测误差就呈现出系统的性质。反之,则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般具有累积的作用,它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中,应该采用各种方法来消除系统误差,或者减小其对观测成果的影响,达到实际上可以忽略不计的程度。例如,在进行水准测量时,使前后视距相等,以消除由于视准轴不平行于水准轴对观测高差所引起的系统误差;对量距用的钢尺预先进行检定,求出尺长误差的大小,对所量的距离进行尺长改正,以消除由于尺长误差对量距所引起的系统误差等等,都是消除系统误差的方法。

当观测列中已经排除了系统误差的影响,或者与偶然误差相比已处于次要地位,则该观测列中主要是存在着偶然误差。这样的观测列,就称为带有偶然误差的观测列。这样的观测结果和偶然误差便都是一些随机变量,如何处理这些随机变量,是测量平差这一学科所要研究的内容。

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响,因此,在实际工作中,为了提高成果的质量,同时也为了检查和及时发现观测值中有无粗差存在,通常要使观测值的个数多于未知量的个数,也就是要进行多余观测。例如,对一条导线边,丈量一次就可得出其长度,但实际上总要丈量两次或两次以上;一个平面三角形,只需要观测其中的两个内角,即可决定它的形状,但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在,通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致,或不符合应有关系而产生的不符值。因此,必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理,使得消除不符值后的结果,可以认为是观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量,因此,可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果,这就是测量平差的一个主要任务。

测量平差的另一项任务,就是评定观测值及其函数的最可靠结果的精度,也就是考核测量结果的质量。人们把这一数据处理的整个过程叫做“测量平差”。概括起来讲,测量平差有两大任务:一是通过数据处理求待定量的最佳估值;二是评估观测成果的质量。

第二节 偶然误差的统计性质

任何一个观测量,客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数。这一数值就称为该观测量的真值。从概率和数理统计的观点看,当观测量仅含偶然误差时,其数学期望也就是它的真值。

设进行了 n 次观测,其观测值为 $L_1, L_2, \dots, L_n$, 假定观测量的真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$, 由于各观测值都带有一定的误差,因此,每一观测值 L_i 与其真值 $\tilde{L}_i$ 或 $E(L_i)$ 之间必存在一差数, 设为

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \quad (1-1)$$

式中 Δ_i 称为真误差,有时简称为误差。若记

$$L_{n,1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \tilde{L}_{n,1} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix}, \Delta_{n,1} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix},$$

则有

$$\Delta = \tilde{L} - L, \quad (1-2)$$

如果以被观测量的数学期望

$$E(L) = [E(L_1), E(L_2), \dots, E(L_n)]^T$$

表示其真值,则

$$\left. \begin{aligned} E(L) &= \tilde{L}, \\ \Delta &= E(L) - L. \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

测量平差中所要处理的观测值是假定不包含系统误差和粗差的,因此这里的 Δ 仅仅是指偶然误差。人们从无数的测量实践中发现,在相同的观测条件下,大量偶然误差的分布表现出一定的统计规律性,那就是它服从正态分布。下面通过实例来说明这种规律性。

在某测区,在相同的条件下,独立地观测了 358 个三角形的全部内角,由于观测值带有误差,故三内角观测值之和不等于其真值 180° ,根据(1-1)式,各个三角形内角和的真误差可由下式算出:

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3) \quad (i=1, 2, \dots, 358),$$

式中 $(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间的间隔 $d\Delta$ 为 $0.20''$,将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列;统计误差出现在各区间内的个数 v_i ,以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n (此处 $n=358$),其结果列于表 1-1 中。

表 1-1

误差的区间 "	Δ 为 负 值			Δ 为 正 值			备 注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00~0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	$d\Delta=0.20''$; 等于区间左端值的误差算入该区间内。
0.20~0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40~0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60~0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80~1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00~1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20~1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40~1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
和	181	0.505		177	0.495		

从表 1-1 中可以看出,误差的分布情况具有以下性质:(1)误差的绝对值有一定的限值;(2)绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多;(3)绝对值相等的正负误差的个数相近。

为了便于以后对误差分布互相比,下面对另一测区的 421 个三角形内角和的一组真

误差,按上述方法作了统计,其结果列于表 1-2。

表 1-2 中所列的 421 个真误差,尽管其观测条件不同于表 1-1 中的真误差,但从表中可以看出:愈接近于零误差的区间,其频率愈大;随着离开零误差愈来愈远,其频率亦逐渐递减;且出现在正负误差区间内的频率基本上相等。因而,表 1-2 的误差分布情况与表 1-1 内误差分布的情况具有相同的性质。

表 1-2

误差的区间 "	Δ 为 负 值			Δ 为 正 值			备 注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00~0.20	40	0.095	0.475	37	0.088	0.440	$d\Delta=0.20''$; 等于区间左端值的误差算入该区间内。
0.20~0.40	34	0.081	0.405	36	0.085	0.425	
0.40~0.60	31	0.074	0.370	29	0.069	0.345	
0.60~0.80	25	0.059	0.295	27	0.064	0.320	
0.80~1.00	20	0.048	0.240	18	0.043	0.215	
1.00~1.20	16	0.038	0.190	17	0.040	0.200	
1.20~1.40	14	0.033	0.165	13	0.031	0.155	
1.40~1.60	9	0.021	0.105	10	0.024	0.120	
1.60~1.80	7	0.017	0.085	8	0.019	0.095	
1.80~2.00	5	0.012	0.060	7	0.017	0.085	
2.00~2.20	6	0.014	0.070	4	0.009	0.045	
2.20~2.40	2	0.005	0.025	3	0.007	0.035	
2.40~2.60	1	0.002	0.010	2	0.005	0.025	
2.60 以上	0	0	0	0	0	0	
和	210	0.499		211	0.501		

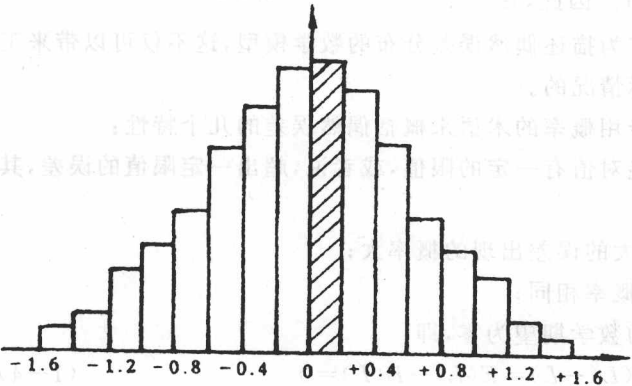


图 1-1

表误差出现在 $0.00'' \sim +0.20''$ 区间内的频率 0.128。这种图通常称为直方图,它形象地表示

误差分布的情况,除了采用上述误差分布表的形式表达外,还可以利用图形来表达。例如,以横坐标表示误差的大小,纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值,即 $\frac{v_i/n}{d\Delta}$ (此处间隔值均取为 $d\Delta=0.20''$)。分别根据表 1-1 和表 1-2 中的数据绘制出图 1-1 和图 1-2。可见,此时图中每一误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率。例如,图 1-1 中画出斜线的长方条面积,就是代

了误差的分布情况。

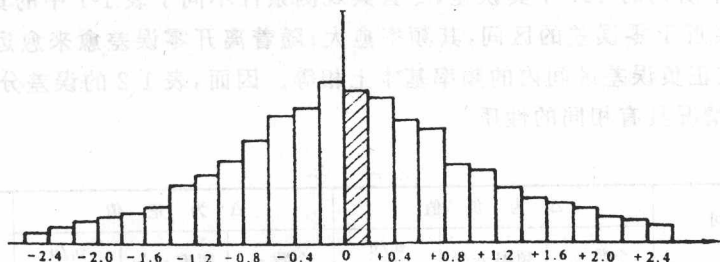


图 1-2

由此可知,在相同观测条件下所得到的一组独立观测的误差,只要误差的总个数 n 足够多,那么,误差出现在各区间内的频率就总是稳定在某一常数(理论频率)附近,而且当观测个数愈多时,稳定的程度也就愈大。例如,就表 1-1 的一组误差而言,在观测条件不变的情况下,如果再继续观测更多的三角形,则可预期,随着观测的个数愈来愈多,误差出现在各区间内的频率,其变动的幅度也就愈来愈小,当 $n \rightarrow \infty$ 时,各频率也就趋于一个完全确定的数值,这就是误差出现在各区间的概率。这就是说,在一定的观测条件下,对应着一种确定的误差分布。

在 $n \rightarrow \infty$ 的情况下,由于误差出现的频率已趋于完全稳定,如果此时把误差区间间隔无限缩小,则可想象到,图 1-1 及图 1-2 中各长方条顶边所形成的折线将分别变成如图 1-3 所示的两条光滑的曲线。这种曲线也就是误差的概率分布曲线,或称为误差分布曲线。由此可见,偶然误差的频率分布,随着 n 的逐渐增大,都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布,而将正态分布称为它们的理论分布。因此,在

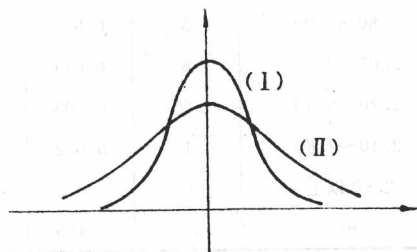


图 1-3

以后的理论研究中,都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型,这不仅可以带来工作上的便利,而且基本上也是符合实际情况的。

通过以上讨论,我们还可以进一步用概率的术语来概括偶然误差的几个特性:

1. 在一定的观测条件下,误差的绝对值有一定的限值,或者说,超出一定限值的误差,其出现的概率为零;
2. 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大;
3. 绝对值相等的正负误差出现的概率相同;
4. 根据(1-3)式可知,偶然误差的数学期望为零,即

$$E(\Delta) = E(E(L) - L) = E(L) - E(L) = 0 \quad (1-4)$$

换句话说,偶然误差的理论平均值为零。

对于一系列的观测而言,不论其观测条件是好是差,也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测,只要这些观测是在相同的条件下独立进行的,则所产生的一组偶然误差必然都具有上述的四个特性。

图 1-1 和图 1-2 中各长方条的纵坐标为 $\frac{v_i}{n}$, 其面积即为误差出现在该区间内的频率。如果将这个问题提到理论上讨论, 则以理论分布取代经验分布(图 1-3), 此时, 图 1-1 和图 1-2 中各长方条的纵坐标就是 Δ 的密度函数 $f(\Delta)$, 而长方条的面积为 $f(\Delta)d\Delta$, 即代表误差出现在该区间内的概率, 即

$$P(\Delta) = f(\Delta)d\Delta \quad (1-5)$$

顾及(1-4)式, 可写出 Δ 的概率密度式为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}, \quad (1-6)$$

式中 σ 为中误差。当上式中的参数 σ 确定后, 即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta) = 0$, 所以该曲线是以横坐标为 0 处的纵轴为对称轴。当 σ 不同时, 曲线的位置不变, 但分布曲线的形状将发生变化。例如, 图 1-3 中就是表示 σ 不相等时的两条曲线。由上述讨论可知, 偶然误差 Δ 是服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布的随机变量。

第三节 衡量精度的指标

测量平差的主要任务之一, 就是评定测量成果的精度。如何正确理解“精度”的含义以及怎样衡量精度的高低? 这是本节所要讨论的主要内容。

为了阐述精度的含义, 先分析上节中的两个实例。图 1-1 和图 1-2 分别是在不同的观测条件下所测得的两组误差的频率分布图(直方图), 图中每个长方条的面积就是误差出现于该区间内的频率。频率的大小见表 1-1 及表 1-2 中的数值。

不难理解, 如果将表 1-1 中 $0.00'' \sim -0.20''$ 和 $0.00'' \sim +0.20''$ 这两个区间的频率相加, 即得 $-0.20'' \sim +0.20''$ 区间内的频率为 0.254。如果按此法进行累计, 则知误差出现于 $-0.60'' \sim +0.60''$ 区间内的频率为 0.665。这就是说, 在表 1-1 的这组误差中, 出现于 $-0.60'' \sim +0.60''$ 区间以内的误差占误差总数的 66.5%; 而出现在这一区间以外的误差, 即绝对值大于 $0.6''$ 的误差, 其频率为 $1 - 0.665 = 0.335$, 即占误差总数的 33.5%。如果对表 1-2 的那组误差也如此累计, 即知出现在 $-0.60'' \sim +0.60''$ 区间内的频率为 0.492, 而出现在这一区间以外的频率为 $1 - 0.492 = 0.508$ 。这就是说, 出现于 $-0.60'' \sim +0.60''$ 这一区间之内和区间之外的误差, 各占误差总数的 49.2% 和 50.8%。

上述数字说明了, 表 1-1 中的误差更集中于零的附近, 因此可以说这一组误差分布得较为密集, 或者说它的离散度小; 相对而言, 可以说表 1-2 中的误差分布得较为离散或者说它的离散度大。

从直方图来看, 误差分布较为密集的图 1-1, 其图形在纵轴附近的顶峰则较高, 且由各长方条所构成的阶梯比较陡峭; 而误差分布较为分散的图 1-2, 在纵轴附近的顶峰则较低, 且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线(图 1-3)的形态上, 即误差分布曲线(I)较高而陡峭, 误差分布曲线(II)则较低而平缓。

在一定的观测条件下进行的一组观测, 它对应着一种确定的误差分布。不难理解, 如果分布较为密集, 即离散度较小时, 则表示该组观测质量较好, 也就是说, 这一组观测精度较高; 反之, 如果分布较为离散, 即离散度较大时, 则表示该组观测质量较差, 也就是说, 这一组

观测精度较低。

因此,所谓精度,就是指误差分布的密集或离散的程度,也就是指离散度的大小。假如两组观测成果的误差分布相同,便是两组观测成果的精度相同;反之,若误差分布不同,则精度也就不同。

在相同的观测条件下所进行的一组观测,由于它们对应着同一种误差分布,因此,对于这一组中的每一个观测值,都称为是同精度观测值。例如,表 1-1 中所列的 358 个观测结果是在相同观测条件下测得的,各个结果的真误差彼此并不相等,有的甚至相差很大(例如有的出现于 $0.00'' \sim 0.20''$ 区间,有的出现于 $1.40'' \sim 1.60''$ 区间),但是,由于它们所对应的误差分布相同,因此,这些结果彼此是同精度的。

将上节表 1-1 及表 1-2 中数值相比较可知,表 1-2 中的误差分布比表 1-1 中的误差分布较为离散,因此,表 1-2 中的 421 个观测值,其精度均低于表 1-1 中的观测值。

为了衡量观测值的精度高低,当然可以按上节的方法,把在一组相同条件下得到的误差,用组成误差分布表、绘制直方图或画出误差分布曲线的方法来比较。但在实际工作中,这样做比较麻烦,有时甚至很困难,而且人们还需要对精度有一个数字概念。这种具体的数字应该能够反映误差分布的密集或离散的程度,即应能够反映其离散度的大小,因此称它为衡量精度的指标。

衡量精度的指标有很多种,下面介绍几种常用的精度指标。

一、方差和中误差

由数理统计学知,随机变量 X 的方差定义为

$$\sigma_x^2 = E\{(x - E(x))^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx \quad (1-7)$$

式中, $f(x)$ 为 X 的概率分布密度函数。 X 的方差也可记为 $D(X)$ 或 D_x 。

观测值 L 和观测值的真误差 Δ 均为随机变量,因此,它们的方差应是:

$$D(L) = \sigma_L^2 = E\{(L - E(L))^2\}$$

$$D(\Delta) = \sigma_\Delta^2 = E\{(\Delta - E(\Delta))^2\}$$

顾及 $E(\Delta) = 0, E(L) = \bar{L}, (L - E(L))^2 = (L - \bar{L})^2 = \Delta^2$, 则

$$D(L) = D(\Delta) = E(\Delta^2) \quad (1-8)$$

可见,任一观测值的方差与观测值误差的方差恒等。

误差 Δ 的概率密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

式中 σ^2 是误差分布的方差。由方差的定义知

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta \quad (1-9)$$

而 σ 就是中误差

$$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)} \quad (1-10)$$

不同的 σ 将对应着不同形状的分布曲线, σ 愈小,曲线愈为陡峭, σ 愈大,则曲线愈为平缓。正态分布曲线具有两个拐点,它们在横轴上的坐标为 $X_{拐} = \mu_x \pm \sigma$, μ_x 为变量 X 的数学期望。对于偶然误差而言,由于其数学期望 $E(\Delta) = 0$, 所以拐点在横轴上的坐标应为

$$\Delta_{\text{测}} = \pm \sigma. \quad (1-11)$$

由此可见, σ 的大小可以反映精度的高低。故常用中误差 σ 作为衡量精度的指标。

如果在相同的条件下得到了一组独立的观测误差, 可由(1-9)式, 并根据定积分的定义可以写出

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta$$

或

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k^2}{n},$$

即

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

根据(1-12)式的第一式或(1-9)式定义的方差, 是真误差平方(Δ^2)的数学期望, 也就是 Δ^2 的理论平均值。在分布律为已知的情况下, 它是一个确定的常数。可者说, (1-12)式中的方差 σ^2 和中误差 σ , 分别是 $\frac{[\Delta\Delta]}{n}$ 和 $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ 的极限值, 它们都是理论上的数值。但是, 实际上观测个数 n 总是有限的, 由有限个观测值的真误差只能求得方差和中误差的估(计)值。方差 σ^2 和中误差 σ 的估值将用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 表示, 即

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ \hat{\sigma} &= \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

当真值或理论值未知时, 可用算术平均值作为真值的估值, 计算公式为

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1-13)a$$

在数理统计中, X_i 称为子样值, $\bar{X}$ 称为子样均值。有了子样均值再计算子样方差, 并以此作为观测值方差的估值, 其计算式为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1-13)b$$

上式分母采用 $n-1$ 而不是 n , 以此保证子样方差的无偏性。

二、其它精度指标

1. 平均误差

在一定的观测条件下, 一组独立的偶然误差绝对值的数学期望称为平均误差。设以 θ 表示平均误差, 则有

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta,$$

同样, 如果在相同条件下得到了一组独立的观测误差, 上式也可写为

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|\Delta|]}{n}, \quad (1-14)$$

即平均误差是一组独立的偶然误差绝对值的算术平均值之极限值。

因为