现代数学译丛

几　何

（第一卷）

群的作用，仿射与射影空间

〔法〕M. 贝尔热 著

科 学 出 版 社

现代数学译丛

几　　何

（第一卷）

群的作用，仿射与射影空间

〔法〕M. 贝尔热 著

周克希 译

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 簡 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书. 全书共分五卷. 主要内容为: 群在集合上的作用,仿射与射影空间;欧氏仿射空间;凸集与紧多面体;二次型,二次超曲面与圆锥曲线;球面与椭圆,双曲几何. 本书配有大量的图和例,并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍.

第一卷介绍群在集合上的作用,仿射与射影空间.

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考.

M. Berger

GÉOMÉTRIE

1/*Action de groupes, espaces affines et projectifs*

CEDIC/Fernand Nathan, 1979,2e édition

现代数学译丛

几 何

(第一卷)

群的作用,仿射与射影空间

〔法〕M. 贝尔热 著

周克希 译

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 7 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1987 年 7 月第一次印刷 印张:6 1/4

印数:0001—4,100 字数:158,000

统一书号:13031・3576

本社书号:5383・13—1

定价: 1.80 元

作者为中译本写的序

《几何》一书译成中文出版，使我感到很荣幸．首先，我要感谢我的朋友周克希在翻译过程中不惮其烦所作的出色工作．

其次，我衷心地期望这本小书能对各个领域不同水平的广大读者都有所裨益．

最后我要强调，我认为中法两国之间在科学上的合作，包括在纯数学以及一些看起来更实用的领域上的合作，是极其重要的．这种合作，将是我们两国之间日益深入、友好的关系的一个开端．

M．贝尔热

1985年6月25日于上海

引　　言

本书的内容基本上取材于两个方面：一方面是1972—1973和1973—1974学年在巴黎第七大学讲授"基础数学续论"课程时的讲稿，另一方面是十五年来在数学教师学衔考试中参加"几何"部分的口试准备工作的经验。

本书的主要目的，或者更确切地说，整个基础几何的主要目的在于：

强调视觉印象、图画和几何的"造型艺术"。

其次，针对所引进的每个概念，尽可能给出一个恰到好处的定理，它的陈述简单而有趣，而证明却并不显豁，甚至还颇困难。

最后，说明这些形似简单的数学大多并非博物馆里的数学，而是在今天的数学发展中得到充分应用的；有时还可以在最初等的水平上，引出人们迄今尚未解决的问题来。

在我看来，本书有以下这些基于上述准则的特点：首先，尽量举例说明各项定义，例子力求新颖而不落俗套。

其次是图形；我们往往给每一步几何论证配上一幅图形，尤其是在全书的开头部分。五十年以前，几何书都是这样的；如今，这种图形完全(或者说几乎完全)绝迹了。好象有这么一种理由：作者相信他的读者看书时手边是不离一张纸、一支笔的，一边读着一边就画出了必要的图形，甚至还"画在脑子里"。然而，大学考试的实践告诉我们，这种图形既没有画在纸上，也没有画在脑子里。正因如此，本书目的之一，就是让读者重新养成看书时随手作图的习惯。

另一个特点是大量"从文化修养的角度所作的"注释、按语，以及大量引用的历史文献，尤其是跟一些最新的研究工作有关的文献，这些工作往往是在更高的水平上研究了本书涉及的那些数学

对象．这样，读者可以体会到基础数学既是以往各个时代的数学，也是未来的数学的有机组成部分．书末为数众多的参考书目也印证了这一点．

行文中还有大量本书内部的附注和很多参照符号；实际上，我们考虑到大多数读者看本书时，并不会逐行逐字地从头读到底．某个读者想要找到某个结果、某个问题的说明，或者，如我们所希望的，他在浏览这本书时，被一张插画、一个图形或一个定理所"吸引"，然后就从这个基点出发，追溯前面的内容，以求更深入地钻研他感兴趣的问题．因此，应该对他这种先一目十行、后回头细看的读法给予帮助．有鉴于此，除了上面说的内部附注外，还写了两个附录；术语附录相当详尽，不仅给出该术语第一次出现时的页码，而且指明了它散见于各处的页码．

我不打算详细分析本书的内容；不过，我想介绍一下在目前的法文著作里很少见到（除非有时见于习题中）的某些结果：仿射几何基本定理，拼嵌群，任意维正多面体的分类，凸多面体刚性的 Cauchy 定理，多边形台球盘问题，圆锥曲线内接多边形的 Poncelet 定理，圆环的 Villarceau 圆与挠平行性，Clifford 平行，任意维等周不等式，Helly 定理和 Krasnoelskii 定理，正交群的化简，Witt 定理和 Cartan-Dieudonné 定理，以及关于球面几何、椭圆几何和双曲几何的全面的介绍．

本书适用于各种不同的目的；除了可以作为有关问题的教材（其中收有相当详尽的参考书目）外，还适用于好几种大学课程的安排，例如：第一阶段[1)]的欧氏几何课程可以第 8，9 两章为基础，第一阶段的选修课程可以 18，19 两章为基础并结合学习球面、双曲几何的内容．另外，在第 11，12 两章的全部或部分内容的基础上，可以为第二阶段[2)]开一门关于凸性理论（侧重于几何角度）的课程．第 18 章也可作为从不同角度研究球面的课程的核心内容．最后，本书对准备中学数学师资证书考试和数学教师学衔考试的学

1)，2) 法国大学一般分为三个阶段，第一、第二阶段分别相应于学士、硕士学位的课程．——译者注

生，都是很有用处的.

可以这么说，本书主要是写给正在学习前面提到的那些课程的大学第一、二阶段的学生的；同时，它也是写给中学结业班和重点高校预备班的教师的.

最后还要指出很重要的一点：大部分习题并不是袭循常例的；鉴于正文中本身已经含有大量的练习和应用，所以我们给出的习题大多是难的或很难的，读者往往得自己去找出所需证明的结论. 因而他应当具备相当的数学修养，并能大胆探索，去发展他的创造才能.

要是没有多年来整个数学集体——学生们和同事们——的帮助，这本书是不可能有今天这样的面目的，它肯定要差得多. 我特别在听取教师学衔考试答辩的过程中得益非浅；这样或那样的答辩，告诉了我哪一种观点是最好的. 我也叨惠于同事们提供的意见和参考材料. 正因为受惠太多，要一一举出名字来，势必有所疏漏，所以，我谨在此向他们全体表示诚挚的谢意.

我也衷心感谢 CEDIC 和 Fernand Nathan 出版社，他们在艰难的时期热忱地支持了本书的出版.

M. 贝尔热

“1897 年，我在高师念三年级时；我们的制图室主任教师 Joseph Caron——我很愿意在这里介绍他的名字——给我们一个很难的作图题.要画的是两个环面的相交部分.这两个环面的相互位置关系是这样的：要作出所求相交部分上的任意一点，必须用一些跟每个环面切于两点的球面去截这两个环面.”

“Joseph Caron 在巴黎的几所中学里教画法几何,也在巴黎大学和高师兼任制图实习课.他写过一本关于画法几何的专著、一本高标画法几何学手册(跟他严厉抨击的部定大纲大相迳庭的)；在《法国数学会通报》上还发表过一篇关于具有 27 条实直线的三阶曲面的结构的文章，这个曲面的模型现在是巴黎大学收藏的高等几何教具;更为重要的是,他致力于培养学生们对几何的爱好.当时，几何学上天赋卓著的大师们千方百计地不肯把曾给他们以启示的、使他们抽象的一般理论的漂亮结论得以存在的那些很简单的、原始的思想披露出来(那些理论往往也只适用于他们所讨论的特殊场合),而正是在这么一个时代里，他培养了许多学生对几何的热爱.几何学如果成了单纯对代数方程、微分方程或偏微分方程的讨论,它就失去了它应该作为一种艺术,而且可以说是一种造型艺术所具有的全部魅力.”

H. 勒贝格

([LB1]，第 209—210 页)

目　　录

第 0 章　记号和预备知识 ………… 1
0.1　集合 ………… 1
0.2　代数 ………… 1
0.3　度量空间 ………… 2
0.4　一般拓扑 ………… 3
0.5　双曲三角 ………… 3
0.6　Lebesgue 测度，积分理论 ………… 3
第 1 章　群在集合上的作用：概念，例子和应用 ………… 4
1.1　定义 ………… 4
1.2　例子 ………… 5
1.3　一意性 ………… 6
1.4　可迁性 ………… 6
1.5　稳定群，齐性空间 ………… 8
1.6　轨道，分类公式 ………… 9
1.7　拼嵌群 ………… 12
1.8　S^2的铺嵌，正多面体与 $O^+(3)$ 的有限子群 ………… 27
1.9　练习 ………… 33
第 2 章　仿射空间 ………… 37
2.1　定义 ………… 38
2.2　例子，仿射标架 ………… 40
2.3　仿射空间的态射 ………… 42
2.4　仿射子空间 ………… 47
2.5　几何：Thalès, Pappus, Desargues ………… 56
2.6　仿射几何基本定理 ………… 59
2.7　有限维实仿射空间 ………… 64
2.8　练习 ………… 74
第 3 章　泛空间及其应用 ………… 77

3.1 泛空间 …… 77
3.2 泛空间与仿射映射 …… 81
3.3 仿射空间上的多项式 …… 82
3.4 重心 …… 86
3.5 重心与仿射映射，重心与仿射子空间 …… 91
3.6 重心坐标 …… 92
3.7 练习 …… 94
第4章 射影空间 …… 97
4.0 引言 …… 97
4.1 定义和例子 …… 99
4.2 射影空间的性状：坐标图 …… 100
4.3 射影空间的性状：拓扑与代数拓扑 …… 103
4.4 射影标架 …… 109
4.5 射影映射 …… 111
4.6 子空间 …… 116
4.7 透视，航空摄影 …… 119
4.8 非交换的情形 …… 122
4.9 练习 …… 123
第5章 仿射空间和射影空间的联系．应用 …… 126
5.0 引言 …… 126
5.1 仿射空间的射影完备化 …… 128
5.2 例子 …… 129
5.3 仿射子空间和射影子空间的联系；平行性 …… 131
5.4 无穷远处的讨论；应用 …… 132
5.5 练习 …… 135
第6章 射影直线；交比，射影变换，对合 …… 137
6.1 交比的定义 …… 137
6.2 交比的具体计算 …… 139
6.3 置换的作用 …… 141
6.4 调和分割 …… 143
6.5 交比与对偶；应用 …… 147
6.6 射影直线的射影变换 …… 151
6.7 对合 …… 154

6.8 练习 …… 156
第7章 复化 …… 160
7.0 引言 …… 160
7.1 实向量空间的复化 …… 163
7.2 $\bullet^C$ 的函子性质或态射的复化 …… 164
7.3 多项式的复化 …… 164
7.4 子空间与复化 …… 165
7.5 射影空间的复化 …… 166
7.6 仿射空间的复化 …… 167
7.7 练习 …… 169
补充图形 …… 170
参考书目 …… 176

第 0 章　记号和预备知识

0.1 集　　合

若 A, B 是E的两个子集，则记

$$A\backslash B=\{x\in E:\ x\in A\ \text{且}\ x\notin B\}.$$

若 $f:E\to F$ 是映射，$A\subset E$，则把 f 在 A 上的限制记作

$$f|A\ \text{或}\ f|_A.$$

X到自身上的恒等映射记作 Id_X.

若 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是一集合，则把除去元素 x_i 后的集合记作

$$\{x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n\}.$$

$\#X$ 表示X的基数.

0.2 代　　数

$\mathbf{N}$ 表示正整数全体和零，$\mathbf{Z}$ 表示整数环，$\mathbf{R}$ 为实数域，$\mathbf{C}$ 为复数域，$\mathbf{H}$ 为四元数体(见 8.9)．$\mathbf{R}_+$(相应地 $\mathbf{R}_-$)表示正(相应地负)实数和零的集合，$\mathbf{R}_+^*$ (相应地 $\mathbf{R}_-^*$)为除去 0 后的集合．对一个域 K, K^* 表示这个域除去 0．关于代数结构，分别用 $\mathrm{Hom}(\cdot;\cdot)$, $\mathrm{Isom}(\cdot;\cdot)$ 来记从一个赋有该代数结构的集合到另一个赋有同一代数结构的集合的同态和同构的全体，但对两个向量空间，我们用 $L(E;F)$ 代替 $\mathrm{Hom}(E;F)$，来表示从E到F中的线性映射全体．我们约定，提到两个向量空间时，往往总是指在同一个域上的．向量空间E的线性群是 $\mathrm{Isom}(E;E)=\mathrm{GL}(E)$．对向量空间$E$而言，$E=A\oplus B$ 表示E是它的两个向量子空间A和B的直和．对向量空间 E, E^* 表示它的代数对偶空间.

I 表示单位阵，${}^tA$ 表示A的转置.

对集合 X，$\mathfrak{S}_X$ 表示它的置换群，即双射 $X\to X$ 全体关于映射合成所成的群。对 $X=\{1,2,\cdots,n\}$，把群 $\mathfrak{S}_X$ 写作 $\mathfrak{S}_n$(称为对称群)，$\mathscr{A}_n$ 表示由偶置换全体构成的 $\mathfrak{S}_n$ 的闭子群(称为交错群)。Klein 群 $\mathscr{V}_4$ 就是二元素群自乘的积 $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$。 二面体群 $\mathscr{D}_{2n}$ (其中 n 是任一整数)是在 $ab=ba^{-1}$ 这一关系下循环群 $\mathbf{Z}_n$ 经由 $\mathbf{Z}_2$ 的扩张，这里 a(相应地 b)是 $\mathbf{Z}_n$(相应地 $\mathbf{Z}_2$)的生成元。

$\binom{n}{p}$表示二项式系数(也记作 C_n^p)，参见 1.5.2。

$\boxed{\text{除非另有申明，所有我们讨论的域都是交换域。}}$

0.3 度量空间

在距离记为 d 的度量空间里，对子集 $A\subset X$ 引进它的直径 $\operatorname{diam}(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$(在 $\mathbf{R}_+\cup\infty$ 中加以考虑)。对两个子集 A，$B\subset X$，A 到 B 的距离就是数量

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\},$$

特别有

$$d(X,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$$

(不要把 $d(A,B)$ 跟 9.11 中引进的 $\delta(A,B)$ 混淆起来)。

对球，我们采用 [FR] 中的记号：

$$U(a,r)=\{x\in X:d(a,x)<r\},$$
$$B(a,r)=\{x\in X:d(a,x)\leqslant r\},$$

更一般地

$$U(A,r)=\{x\in X:d(x,A)<r\},$$
$$B(A,r)=\{x\in X:d(x,A)\leqslant r\}.$$

有些情况下要强调指明 X，就写成 $B_X(\cdot,\cdot)$。

若 X，Y 是两个度量空间，$\operatorname{Is}(X;Y)$ 就表示从 X 到 Y 中的等距对应的全体，亦即满足

$$d(f(x),f(y))=d(x,y)\quad\forall x,y\in X$$

的 $f:X\to Y$ 全体。

特别记 $\mathrm{Is}(X;X)=\mathrm{Is}(X)$.

0.4 一般拓扑

我们多次用到：一族递减的紧集有非空交集（在 11.7.3.2 里我们将重温这一事实的证明）.

0.5 双曲三角

定义双曲余弦、正弦和正切如下：

$$\mathrm{ch}t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\qquad \mathrm{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2},$$

$$\mathrm{th}t=\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}\ (t\in\mathbf{R});$$

并引进"主值反双曲余弦"函数

$$\mathrm{Arc\ ch}=(\mathrm{ch}|\mathbf{R}_+)^{-1},$$

它是一个映射 $[1,\infty[\ \to\mathbf{R}$.

0.6 Lebesgue 测度，积分理论

在有些部分，我们相当自由地使用这些内容. 特别是一些基本定理：收敛定理，积分与极限交换定理，Fubini 定理，关于 $\mathbf{R}^n$ 的开集上 C^1 阶映射的变量替换定理. 我们还会碰到一个子集 K 的特征函数 χ_K；以及测度空间的象空间的概念. 关于这些内容的一本参考书是 [GT] (Guichardet 著，积分学，Armand Colin 出版社).

第 1 章　群在集合上的作用：概念，例子和应用

将一个空间的几何学，看作是研究变换群作用下的不变性质，这种观念是 Félix Klein 在著名的"Erlangen 纲领"中提出的（参见 [GBG]，特别是第 253 页）。

本章中，我们定义群在集合上的作用，可迁性，稳定群，齐性空间，一意性等概念，并用大量代数的、尤其是几何的例子来说明它们。这些例子读者在以后各章还会遇见。

本章最末两节 1.7 和 1.8，分别讲拼嵌群和绕空间一个定点的旋转群的有限子群。这两节充分应用了前面各节引进的概念；我们之所以选用这两部分内容，是因为它们既有造型上的方便，又有某些处理上的困难——这跟问题本身显然的初等性形成对照。1.8 节跟三维空间的正多面体关系很密切，在 12.5 节我们还会遇到这些多面体。

1.1　定　　义

对任一集合 X，我们用 $\mathfrak{S}_X$ 来记双射 $f:X\to X$ 全体所成的群（对于记作"$\circ$"的映射合成或乘法而言）。

1.1.1　定义． 设 G 是群，X 是集合．G 在 X 上的作用，就是一个同态 $\varphi:G\to\mathfrak{S}_X$；我们也说 G（通过 φ）作用在 X 上．

1.1.2　记号． 对 $g\in G$，$x\in X$，记 $\varphi(g)(x)=g(x)$；作用则记为 (G,X,φ) 或 (G,X)．特别有

$$\forall g\in G: x\longmapsto g(x)\ \text{是双射};$$

$$\forall g,h\in G,\ \forall x\in X: g(h(x))=(gh)(x).$$

例如对所有的 x 和 G 的单元 e，都有 $e(x)=x$；且 $\varphi(g^{-1})=$

$(\varphi(g))^{-1}$.

1.2 例 子

1.2.1 $G\subset\mathfrak{S}_X$ 是一个子群，这是最常见的情形。例如，G定义为$\mathfrak{S}_X$ 的满足某些条件的子群。

1.2.2 置 $A=\{1,\cdots,n\}$，则 $\mathfrak{S}_A=\mathfrak{S}_n$ (对称群)。设 $G=\mathfrak{S}_n$。于是G作用在A上；但它也很自然地作用于 $X=\mathscr{P}_{n,p}=\{P\subset A:\#P=p\}$，即$A$中$p$个元素所成子集的全体 $(0\leqslant p\leqslant n)$。

1.2.3 对给定的 $g\in\mathfrak{S}_n$，设 $G=\{g^k:k\in\mathbf{Z}\}\subset\mathfrak{S}_n$，则$G$作用在$A=X$上。

1.2.4 若X是向量空间，则它的线性群

$$G=\mathrm{GL}(X)=\{f:X\to X:\ f\text{ 为线性双射}\}$$

作用于X上。

1.2.5 设E是欧氏向量空间(见第 8 章)，且

$$O(E)=\{f\in\mathrm{GL}(E):\ f\text{ 等距}\},$$

则 $G=O(E)$ 自然地作用在$X=E$上。而且从 $O(E)$ 还可导出两个作用，它们分别作用于 Grassmann 流形

$$X=G_{E,p}=\{V\subset E:V\text{为}E\text{的 }p\text{ 维子空间}\}$$

和

$$X=\{E\text{ 的标准正交基}\}.$$

1.2.6 设$X=G$是群，则$G=G$通过好几种方式作用于自身，它们都很重要：

$$\varphi(g)(h)=gh\ (\text{左平移});$$

$$\varphi(g)(h)=hg\ (\text{右平移});$$

$$\varphi(g)(h)=ghg^{-1}\ (\text{内自同构})$$

1.2.7 设X是仿射平面 (见第 2 章)，$GA(X)=G$ 是X的仿射双射全体所成的群(X 的“仿射群”)，$\Gamma(X)$ 是X中二次曲线——定义为X的子集或者表示为方程形式——全体，则 $\mathrm{GA}(X)$ 作用在 $\Gamma(X)$ 上。

1.2.8 设 X 是任一度量空间，距离记为 d，则有它的**等距群**

$$\mathrm{Is}(X) = I(X)$$

作用其上：

$$G = \mathrm{Is}(X) = \{f \in \mathfrak{S}_X : \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) = d(x, y)\}.$$

1.2.9 若 $G = \mathbf{R}$, $X = S^3 = \{x \in \mathbf{R}^4 : \|x\| = 1\} \subset \mathbf{R}^4$，将 $\mathbf{R}^4$ 看作 $\mathbf{C}^2$，于是可定义作用 $(\mathbf{R}, S^3, \varphi)$ 如下：

$$\varphi(t)(z, z') = (e^{it}z, e^{it}z').$$

这个例子在几何上是非常重要的：参见 4.3.6.2 和 18.8.1 两节。

1.2.10 其它例子．见 4.5.9，8.8，9.5，18.10．

1.3 一 意 性

1.3.1 定义． 作用 (G, X, Π) 称为**一意的**，如果 Π 是单射（也就是说，只有 $e \in G$ 一个元素对应于 X 上的恒等变换）．

若 $G \subset \mathfrak{S}_X$（参见 1.2.1），则作用总是一意的．若 G 并非一意的，则可作 $(G/\ker\varphi, X, \varphi)$，它总是一意的．

在 1.2 的例子中间，仅 1.2.6 和 1.2.9 的作用并非现成就是一意的．在 1.2.6 中，左平移和右平移都是一意的，而内自同构当且仅当 G 的中心 Z_G 等于 $\{e\}$ 时才是一意的．1.2.9 中则有

$$\ker\varphi = 2\pi\mathbf{Z}.$$

1.4 可 迁 性

1.4.1 定义． 作用 (G, X, φ) 称为**可迁的**，如果 $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G \mid g(x) = y$．

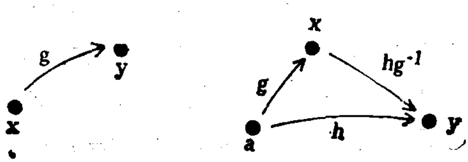

图 1.4.1.