几何计算

作者的話

有些中学同学在学习平面几何学的时候，由于对基本概念了解得不够清楚，对定理和法則即使都明白也还不会灵活运用，因而难于获得良好的学习成果．作者因为有这样的感覚，才編写了这一套小書．这套書分“几何定理和証題”、“几何作图”、“軌迹”和“几何計算”四冊．內容主要是：（1）帮助同学們透徹了解教科書里的材料；（2）把这些材料分类和总結，指导同学們怎样去运用，从而掌握解題的正确方法；（3）举示多量例題，对同学們作出較多的引导和启示，借此收到观摩的效果；（4）提供一些补充材料，使同学們扩大眼界，充实知識，提高理論基础，为进一步学习創造有利条件．

本書在第一章里面，詳細介紹了許多基本的知識，使同学們对几何量有一个徹底的認識．再詳示解計算題的步驟和应行注意的事項，使同学們在实际解題时可以一絲不乱，免除錯誤．

关于几何量的可通約和不可通約的两种情况，以及几何比例基本定理对这两种情况的普遍适用，是同学們很难理解的，本書特地作了浅显的講解，并用实例說明了极限的定理，借此把几何計算的理論基础打好，以便和实际联系起来．

从第二章起，分类把各种几何計算作系統的講述，尽量把重要定理譯成簡明的公式，并多举范例，启示思考的过程，培

养运用定理的能力．关于几何計算在日常生活和測量上的应用，特地另举了一些范例和研究題，并且还介紹了几个中国古代的几何計算題，可以增加学习兴趣．

本書在編写时虽經仔細斟酌，但错誤之处还恐难免，希望讀者多多批評和指正。

許莼舫

目　次

一 基本知識

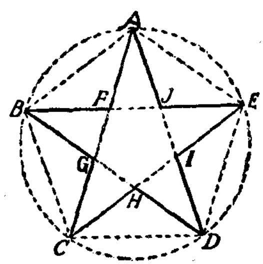
什么是几何計算題

有这样一个問題：

"正五角星形的五个頂角各是多少度？"

所謂正五角星形，就是我們中华人民共和国的国旗上的标帜，同学們对它都是非常热爱的。

关于正五角星形的性質，在"几何作图"一書里已經講到了一些，如果你讀过那本書，对正五角星形的性質一定都很熟悉；上举的問題也就不难解答了。



要解决上举的問題，必須先知道正五角星形是从一个正五角形的五条对角綫所围成的，其实是一个"凹十角形"。它有十条相等的边——AF, FB, BG, GC, CH 等；五个相等的"頂角"——$\angle JAF$，$\angle FBG$等；五个相等的"叉角"——$\angle AFB$，$\angle BGC$等．它同正五角形一样，也有一个外接圓，各頂点分这外接圓成五等分。从这些性質，以及我們以前学过的許多几何定理，就可以用下举的两种解法，来求正五角星形的頂角的度数。

解法一 因$\overset{\frown}{CD}$是全圓周的$\frac{1}{5}$，所以

$$\overset{\frown}{CD}=\frac{1}{5}\times 360^\circ=72^\circ.$$

又因 $\angle JAF$ 是 $\overset{\frown}{CD}$ 所对的圓周角，从圓周角的定理，知道这一个角可以拿 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ 来度它，所以

$$\angle JAF=\frac{1}{2}\times 72^\circ=36^\circ.$$

同理，其他的各頂角也都是 36°.

解法二 从三角形的外角定理，知道

$\angle AJF=\angle B+\angle D$（为便利計，$\angle FBG$ 簡称 $\angle B$，以下同），

$\angle AFJ=\angle C+\angle E.$

但又从三角形的內角定理，得

$$\angle A+\angle AJF+\angle AFJ=180^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180^\circ.$$

又因正五角星形的五个頂角都相等，所以

$$5\angle A=180^\circ,\quad \angle A=36^\circ.$$

其余同理.

註 从上举的解法，我們知道要求圖中其他各角的度数，都很容易．像 $\angle BAF$，$\angle ABF$ 等都是 36°，$\angle AFJ$，$\angle AJF$ 等都是 72°，$\angle AFB$，$\angle BGC$ 等都是 108°．圖中所有的一切角，除掉大於 180° 的优角外，不出这三种度数．这三种度数——36°，72°，108°——恰巧順次成功一串“等差級数”.

講过了这一个問題的解法，我們为了要对这可爱的正五角星形作更进一步的認識，这里再提出如下的一个新問題：

“已知正五角星形中相鄰兩頂点的距离是 2 寸，求 (1) 边長；(2) 相鄰兩叉点的距离——JF，FG 等；(3) 相对兩頂点的距离——BE，AC 等”.

要解决这一个問題，必須进一步認識前圖中所有的一切三角形都是等腰三角形．在这些等腰三角形中，頂角是 36°，底角是 72° 的有二十个，它們都相似，其中的 $\triangle AFJ$ 等的五个全等，$\triangle ACD$ 等的五个全等，$\triangle ABG$ 等十个全等；頂角是 108°，底角是 36° 的有十五个，也都相似，其中的 $\triangle ABF$ 等五

个全等，$\triangle ABE$，$\triangle HBE$ 等十个全等.

从"相似三角形的对应边成比例"的定理，注目 $\triangle BAJ$ 和 $\triangle AJF$，得

$$BA:AJ=AJ:JF.$$

因　$BA=BJ$，$AJ=BF$，代入上式，得

$$BJ:BF=BF:JF \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}.$$

又注目 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FAB$，得

$$BE:AB=AB:FA.$$

因　$AB=BJ$，$FA=JE$，代入上式，得

$$BE:BJ=BJ:JE \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}.$$

上举公式(i)所表示的是綫段 BJ 被 F 点所分，其中的長綫分 BF 是短綫分 JF 和全綫 BJ 的比例中項，我們称做綫段 BJ 被 F 分成"外中比"。同理，公式(ii)所表示的是綫段 BE 被 J 分成外中比.

註　前圖中所有的一切綫段，不出四种長度，最長的像 BE，AC 等五条，可簡称做"对頂距"，用 a 表示；較短的像 AB，BC 等，可簡称做"鄰頂距"，連同相等的 BJ，AG 等共計十五条，都用 b 表示；更短的像 BF，JE 等十条是边，用 c 表示；最短的像 JF，FG 等五条，可簡称做"鄰叉距"，用 d 表示. 因为从(i)和(ii)知道

$$a:b=b:c=c:d,$$

所以这四种長度順次恰成一串"等比級数".

根据这些性質，可用下法解前举的新問題：

解　設边長 $BF=x$ 寸，因已知 $BJ=AB=2$ 寸，所以 $JF=(2-x)$ 寸. 根据公式( )，得比例式　$2:x=x:2-x$.

化为等积式，移項，得二次方程式　$x^2+2x-4=0$.

解得　$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}.$$

因負值不适用，故得边長是 $-1+\sqrt{5}\approx^{*}-1+2.236=1.236$ 寸。 鄰叉距是 $2-1.236=0.764$ 寸。

叉設对項距 $BE=y$ 寸，因已知 $BJ=AB=2$ 寸，故 $JE=(y-2)$ 寸。根据公式(ii)，得比例式 $y:2=2:y-2$.

化为等积式，再移項，得 $y^2-2y-4=0$.

解得 $$y=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{2}=1\pm\sqrt{5}.$$

同前，得对項距是 $1+\sqrt{5}\approx1+2.236=3.236$ 寸。

在上面所述的兩个問題中，所有的角、弧和綫段，都是有大小可以度量的，叫做**几何量**。我們要度量一个几何量，必須先取一适当的同类量做單位——像"度""寸"等，用这單位来量欲測的几何量，看它含这單位量的多少倍。这倍数就是欲測的量对於單位量的比值，叫做"該量的測度"。例如綫段的單位用寸，假使一綫段的大小是 1 寸的 2 倍，就是这綫段对於 1 寸的綫段的比值是 2，那末这綫段的測度就是 2。

有些几何圖形，可以根据已知的性質或几何定理，求出其中的某些几何量的測度，像前举的第一問題就是。又有些几何圖形，必須有一部分几何量的測度为已知，才能根据已知的性質或几何定理，求出另一部分的測度，像前举的第二問題就是。这样的兩种問題，都是几何学中的**計算題**。

同学們都知道，几何定理就是关於各种几何圖形的性質的敍述。古代的劳动人民，为了在生产实踐中必須計算各种几何量，像定方向，測高深，求地积等，於是發現了許多几何定理。可見几何学是在生产条件下發生和發展的，它最初是从

* ≈是"近似"的記号。

积累起来的丰富的实际經驗中总結出几何定理，接着再用理論方式加以証明，最后又拿来供給实际的应用，是理論和实际密切結合的。我們学習几何計算題，可以把已經学習的几何定理联系到实际上去，使学用一致的教育目标更具体，更明确起来。

解計算題要用哪些定理

在上节解兩个几何計算題时，要根据下列的許多几何定理：

(1) 圓周角拿所对的弧的一半来度它。

(2) 三角形三內角的和是二直角。

(3) 兩个三角形的兩組角彼此分别相等，那末兩三角形相似。

(4) 相似三角形的对应边成比例。

…………………………………………………………

这許多定理都是关於几何量的比較，就是量的相等和不等。初等几何所研究的圖形性質，多数是关於量的比較，以及从此推得的其他情形，像直綫的平行和垂直之类。这些性質，都和度量有关，叫做“**圖形的度量性**”。

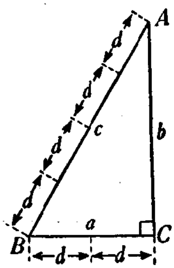
另外还有許多几何定理，是研究諸綫或諸圓共点，諸点共綫或共圓等性質的，这些只是表示点、綫、圓等相互間的位置关系，和度量無关，叫做“**圖形的非度量性**”。

凡是关於圖形的度量性的定理，在解几何計算題时一定要用到，所以我們要想掌握各种計算題的解法，首先必須熟習

这些定理。至於圖形的非度量性定理，虽然在計算上一般都沒有用途，但有些問題必須先行确定圖形的某些特性，然后才能着手計算，那时就要用到它了(像范例 18 等就是)。照这样看来，我們必須熟習了全部的几何学，对解决計算題方才可以得心应手。

怎样用数表几何量

我們已經談过：要用数来表几何量的大小，必先定一單位，看这几何量是單位量的多少倍，这倍数就是这几何量的測度。例如在右圖中，假定$\triangle ABC$的$\angle C$是直角，$\angle B$是$\angle A$的兩倍，那末根据定理：“直角三角形的一銳角是另一銳角的二倍时，斜边一定是短的直角边的二倍”，知道定a边的長为單位时——就是a边的測度为 1，c边的測度一定是 2。



但是，如果我們改定c边的長为單位，那末a边的測度就是$\frac{1}{2}$。可見量的大小虽一定，但它的測度却跟着單位而有不同；所以測度的数並不是絕对的。

在上举的实例中，c恰是a的整数倍——2 倍，我們称c是a的**倍量**；掉过来說，a是c的**約量**。又設d是a的半分，那末a是d的倍量——2 倍，c也是d的倍量——4 倍，这d叫做是a和c的**公約量**(或公度)。

a和c既有公約量d，我們用d的長来量a，經兩次而量尽；用d来量c，經四次而量尽。像这样，兩个量能同时被它

們的公約量所"量尽",实际和算术里的兩个数能同时被它們的公約数所"除尽"一样。 这种有公約量的兩个量,叫做**可通約量**(或可公度)。

兩个量要有什么条件,才是可通約量呢? 这一个問題很簡單,可用下举的兩例来說明:

〔例一〕 有一長一短的兩条綫段,長的是1尺6寸,短的是2分,当用尺做單位,或寸做單位时,虽不能同时量尽,但用分做單位时,量長綫段得160次,量短綫段得2次,都可以量尽,这1分的長就是兩綫段的公約量.

〔例二〕 同上,長綫段是1寸,短綫段是$\frac{2}{3}$寸,因为$\frac{2}{3}$可化成小数 0.666…,是永無穷尽的循环小数,所以無論用寸做單位,分做單位,厘或毫……做單位,都不能同时量尽. 那末这兩条綫段是不是沒有公約量呢? 不,我們若用$\frac{1}{3}$寸做單位,量長綫段得3次,量短綫段得2次,全都量尽,可見它們有公約量$\frac{1}{3}$寸.

考察这兩个例子中的每兩个数,知道$\frac{160}{2}=80$,是一个整数;$\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$,是一个分数,这整数和分数总称做有理数,可見兩个几何量的比是有理数的,它們一定是可通約量。

那末是不是任何兩个几何量都是可通約量呢?要解决这一个問題,可参閱下面的例子:

設前圖中的a边是單位長,測度是1,那末c边的測度是2,根据商高定理,得

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

这$\sqrt{3}$是一个記号,表示把整数3开平方,我們用算术的开平方法,計算得1.7321……,它的小数位数多到無穷,也不会循环. 这样的数既不是整数,又不是分数,我們称它做無理数. 这时的長綫段b是1.7321……寸,短綫段a是1寸,我們無論用寸,用分,用厘,以至用極小極小的單位去量,都不能同时量尽;再用几分之几寸,几分之几分,……去量,也是一样. 因而这兩个几何量就沒有公約量.

可見兩个几何量的比是無理数——像上例中的$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$,一定沒有公約量,可称做**不可通約量**(或不可公度)。

再假定拿前圖中的 b 边作为單位長，从商高定理，得

$$(2a)^2=a^2+1,\ 就是\ 3a^2=1.$$

解得 $$a=\tfrac{1}{3}\sqrt{3},\quad c=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

可見表某一几何量的数是不是有理数，也不是絕对的。同一几何量，因所用單位的不同，可能是有理数，也可能是無理数。虽然如此，但任何兩个几何量的比，不論所用的單位怎样，总是一定的。看下面的一个表就可以明白。

不同的單位	a 的測度	c 的測度	b 的測度	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{c}$
用 a 長做單位	1	2	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
用 c 長做單位	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
用 b 長做單位	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

把上述的各点总結一下，我們知道：

(1) 表几何量的数——就是測度——是跟着單位而不同的。

(2) 表几何量的数，有时是有理数，有时是無理数。

(3) 兩个几何量的比是有理数的，必有公約量，它們是可通約量。

(4) 兩个几何量的比是無理数的，沒有公約量，它們是不可通約量。

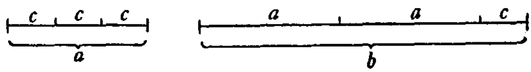
不可通約量的几何解釋

为了要把不可通約量認識得更清楚，我們再作进一步的研究。

先研究兩个几何量在圖形方面有怎样的关系，才是可通約量．請看下面的几个例子：

像上节所举的例子，在一銳角是另一銳角的二倍的直角三角形中，用短直角边 a 可以量尽斜边 c——量二次，所以 a 是它們的公約量，a 和 c 是可通約量．

再像下圖，用左边的 a 綫段去量右边的 b 綫段，經 m 次（圖中的 $m=2$）后，



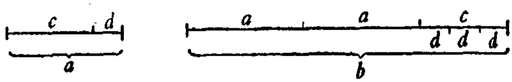
虽沒有量尽，但用余量 c 掉轉来量左边的 a 綫段，經 n 次（圖中的 $n=3$）恰尽．在这时，

$a=nc$ 〔圖中是 $3c$〕，

$b=ma+c=mnc+c=(mn+1)c$ 〔圖中是 $7c$〕．

可見 a 和 b 都是 c 的倍量，它們有公約量 c，是可通約量．

又像下圖，用左边的 a 綫段去量右边的 b 綫段，經 m 次（圖中的 $m=2$）得



余量 c，再用 c 轉量左边的 a，經 n 次（圖中的 $n=1$）又得余量 d，又用 d 轉量右边的余量 c，經 p 次（圖中的 $p=3$）恰尽，於是得

$a=nc+d=npd+d=(np+1)d$ 〔圖中是 $4d$〕，

$b=ma+c=m(np+1)d+pd=[m(np+1)+p]d$ 〔圖中是 $11d$〕．

可見 a 和 b 都是 d 的倍量，即有公约量 d，也是可通約量．

把这三个例子繼續推广起来，知道用左边的（較小的）几何量来量右边的（較大的）几何量，再用所得的余量轉量左边的量，又把余量轉量右边的余量，这样輾轉相量，直到量尽为止．这最后的一个余量（能量尽前一个余量的）就是兩个几何量的公約量．

这种利用輾轉相量以求公約量的方法，实际和算术里用輾轉相除以求最大公約数的方法完全类似．

把上述的归納一下，得如下的定理：

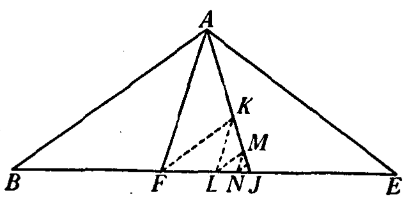
“若把兩个几何量輾轉相量，結果能量尽的，那末这兩个几何量是可通約量。”

从这定理，又可推得如下的逆否定理：

“若兩个几何量是不可通約量，那末把它們輾轉相量，結果是永远量不尽的。”

諸位学过了几何定理的四种变形，一定知道逆否定理是跟着原定理一同眞确的，我們在这里再用事实来說明一下：

在本書开首的一节里，講到正五角星形的鄰頂距 AB 如果等於 2，那末对頂距 BE 就等於 $1+\sqrt{5}$。因为这兩个数的比是無理数，所以这兩条綫段是不可通約量。我們用輾轉相量的方法来試驗一下，知道



(1) 用 $AB(=BJ)$ 来量 BE，　量一次后得余量 JE；

(2) 用 $JE(=BF)$ 来量 $AB(=BJ)$，　量一次后得余量 FJ；

(3) 用 $FJ(=AK)$ 来量 $JE(=AJ)$，　量一次后得余量 KJ；

(4) 用 $KJ(=FL)$ 来量 FJ，　量一次后得余量 LJ；

……………………………………………………………

就这輾轉相量的各步手續来考察一下，知道(2)是用 AJ 量 BJ，就是用頂角 $36°$ 的等腰三角形的“底”来量“腰”的手續，(3)是用 FJ 量 AJ，也是同样的手續，以下都是一样。照这样一步一步地量下去，永远是同样的手續，永远会有一綫段剩下，就是永远量不尽。

这就証实了正五角星形的鄰頂距和对頂距是不可通約