有限元法

在岩石力学中的应用

冶金工业出版社

有限元法
在岩石力学中的应用

［法］ J. FINE 著

辛 洪 波 译

冶 金 工 业 出 版 社

内 容 简 介

本书是法国巴黎高等矿业学校的岩石力学讲义，作者是 Jacque Fine。该讲义从有限元法原理出发，结合矿山实际，较全面地叙述了有限元法在岩石力学中的应用，具体地论述了平面应变问题和轴对称问题，特别是考虑了正交各向异性单元和节理单元的刚度矩阵，使有限元法能较好地适用于解决岩石力学中的问题。在附录中还介绍了线性方程组的三种不同解法。

本书由东北工学院采矿系辛洪波同志翻译，王泳嘉同志审校，郑永学同志审阅。

本书可供大专院校采矿专业师生阅读，也可供采矿工程技术人员及有关人员参考。

有限元法在岩石力学中的应用

［法］J. FINE 著

辛 洪 波 译

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 5 1/4 字数 120 千字

1979 年 11 月第一版 1979 年 11 月第一次印刷

印数 00,001～4,500 册

统一书号：15062·3469 定价 0.64 元

引　言

电子计算机在各个领域，特别是在科学计算方面得到了迅速地发展。它不仅是古典计算方法的新工具，而且还是求解从前认为无法求解的那些问题的新方法，其中之一是使有限元法能有效地用于解决岩石力学的两个方面的问题：不仅能确定岩体中的应力，而且能计算地下水的流动。

对于地下工程，应力状态决定了采掘工程的稳定性。然而至今采矿工程师和土建工程师仅局限于某些由试验得出的规则。目前应该在岩体中工程设计中开辟新的途径。

这本讲义是巴黎高等矿业学校岩石力学教材之一。在这本讲义中，假定岩石处于弹性状态的前提下介绍有限元法。

当然，岩石并不完全服从弹性体的法则，因而，这只能是近似的计算。但是，我们认为通过简单的方式认识弹性模型中的应力分布，有助于很好地了解岩石力学中的一些现象。

有限元法在实际应用中获得了一定的成果。毫无疑问，有限元法在非线性弹性力学或塑性力学方面将取得重大发展。

至于对在孔隙岩层或渗透岩层中的水流动问题，有限元法也能用于稳定状态和变化状态的计算。此外，该法还可以用于土壤中排水，坝的渗流和含水矿床开采等问题中。

本讲义目的主要是使大学生或工程师在最短的时间内熟悉有限元法，以便能够在实际工作中运用它，并且能够自己编制电子计算机程序，或者通过了解现有程序的内容之后，很快地利用这些程序。

第一章汇集所有为阐明有限元法必需的连续介质力学公式；

第二章阐述有限元法的一般性公式；

第三章关于平面问题的论述。本章目的是使读者掌握矩阵，而矩阵在计算中是常用的。本章还可以使读者明确有限元法具体概念；

第四章说明如何利用第二章得出的一般性公式，将有限元法用在实际工作中极重要的轴对称问题；

第五章指出如何考虑岩体的主要特性：岩层裂隙、断层或节理；

第六章汇集了在岩石力学中获得的某些有价值的试验数据；

第七章指出了怎样把有限元法推广到动力学问题中去。即用于岩体中波的传播问题。这些计算可以直接用于微震技术；

第八章和第九章是讨论水的流动问题。这两章是独立的章节，如果读者仅对岩体中流体运动问题感兴趣，可以提前讲述和直接参考这两章。最后这两章对于水文地质和土力学也有用。

目　录

第一章 连续介质力学的基本原理

第一节 问 题 的 提 法

当物体受到外力或外部压力作用时,物体的每一点即产生位移,从而就有应力产生。如果知道每点的位移,也就是说,如果能找到三个同时满足连续介质力学定律和边界条件的函数 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$和 $w(x,y,z)$, 那么, 应力分布是很容易计算的。例如, 对于一个均质、弹性和各向同性的物体,就是解一组三个偏微分方程(拉麦和克拉贝隆方程)。

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\Delta u+F_x=0$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\Delta v+F_y=0$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\Delta w+F_z=0$$

式中 λ,μ——物体的拉麦系数;

Δ——函数 u,v 和 w 的拉普拉斯算子;

F_x,F_y,F_z——作用在物体上的体积力分量。

通过分析,现在尚无适合于边界条件的可以对这些微分方程积分的一般方法。只是对于较简单的问题,才能将部分满足边界条件的各个解叠加而得到解答。

边界条件分为两类:

第一、沿着物体的表面的位移为已知。这是当所讨论的问题其模型有对称面的情况。

第二、沿着物体表面的应力或外力为已知。这是当研究巷道应力分布时在其远处的情况。图 1-1 所示为这种不同的边界条件。

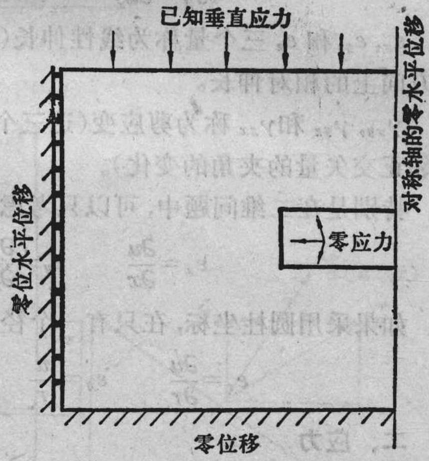


图 1-1 矩形巷道的模型

由于在某些极特殊的情况下, 用分析法才能解决这个问题,下面将介绍一种数值计算法,即有限元法。这种方法可以极为精确地解决任何形状物体的问题。但是, 由于目前电子计算机的容量所限,有限元法用以解三维问题是相当复杂的。相反, 有限元法却特别适用于解平面问题和轴对称问题。下面,将阐明用有限元法解决这两种问题的详细情况。下述论证中除了矩阵运算外,不需要特殊的知识。

第二节 连续介质力学的基本知识

本节的目的是将第三和四章介绍有限元法时用到的有关定义和公式加以汇集。

一、应变

假定一个物体 S 受一组外力的作用。在这些外力作用下,物体中所有点都将发生位移,

如某点 M 移到 M'。在三维直角坐标系 O_x, O_y, O_z 中，可以作出如下定义（图 1-2）：

把 $\overrightarrow{MM}$ 矢量沿着 O_x, O_y, 和 O_z 轴方向的分量 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 和 $w(x,y,z)$ 称为 M 点的位移。

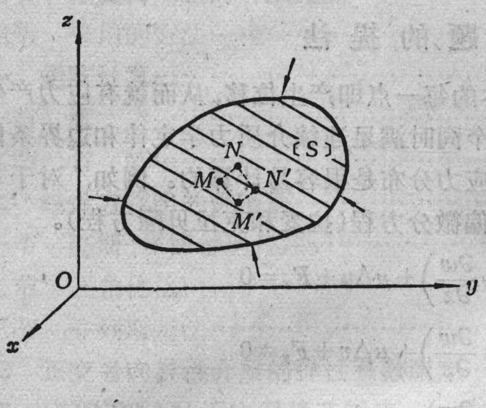


图 1-2

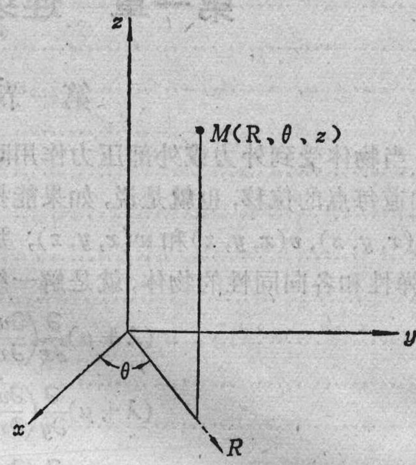


图 1-3

如果考虑到相邻两点 M 与 N 分别移到 M' 和 N' 点，则下面三个量即称为物体在 M 点的应变（图 1-3）。

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \gamma_{yz}=\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad \gamma_{zx}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1-1}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$, 和 ε_z 三个量称为线性伸长（这三个量分别表示矢量 $\overrightarrow{MN}$ 在平行于 O_x、O_y 和 O_z 轴方向上的相对伸长。

γ_{xy}, γ_{yz} 和 γ_{zx} 称为剪应变（这三个量分别表示与坐标轴 O_x, O_y, O_yO_z, O_xO_z 平行的两个相邻正交矢量的夹角的变化）。

特别是在二维问题中，可以只考虑下面三个量：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\gamma_{xy} \tag{1-2}$$

如果采用圆柱坐标，在只有一个径向位移情况下，应变将定义为：

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r} \qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{1-3}$$

二、应力

现在，如果把 M 点周围的微元 dV 孤立起来，在这个微元的每个面上作用着由邻接微元所施加的接触力（图 1-4）。

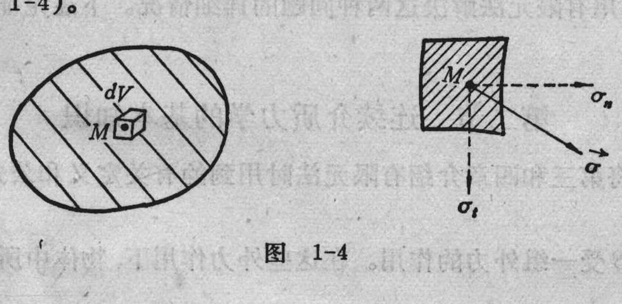


图 1-4

在该微元的一个 dS 面上，这些力的合力为 $\vec{\sigma} dS$。$\vec{\sigma}$ 称为 dS 面上的应力，$\vec{\sigma}$ 矢量可以分解成两个分量：垂直于 dS 面的应力分量 σ_n；平行于 dS 面的应力分量 σ_t。

理论力学可以证明下面所表述的结果：

第一、如果所考虑的是两两正交的三组面的微元，作用在每个面上的应力沿 O_x, O_y, O_z 轴三个方向分解，就可以得出下列等式(图 1-5)：

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx} \qquad \sigma_{xz}=\sigma_{zx} \qquad \sigma_{yz}=\sigma_{zy}$$

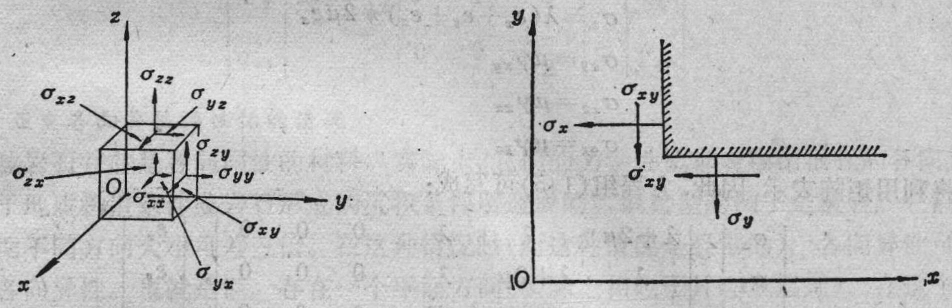


图 1-5

对二维问题则有：

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$$

第二、在 $\vec{M}$ 点上，dS 面上的应力 $\vec{\sigma}$ 取决于该面的方向。考虑四面体 $OABC$ (图 1-6)，ABC 面以方向余弦为 α, β, γ 的法线 $\vec{n}$ 来表征，则作用在该面上的应力 $\vec{\sigma}$ 与作用在 OAB，OBC 和 OCA 面上的应力之间存在下列关系：

$$\sigma_x=\alpha\sigma_{xx}+\beta\sigma_{xy}+\gamma\sigma_{xz}$$
$$\sigma_y=\alpha\sigma_{xy}+\beta\sigma_{yy}+\gamma\sigma_{yz}$$
$$\sigma_z=\alpha\sigma_{xz}+\beta\sigma_{yz}+\gamma\sigma_{zz}$$

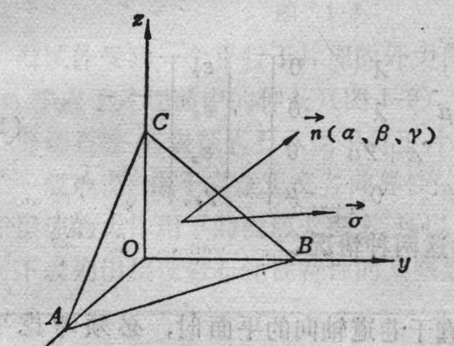


图 1-6

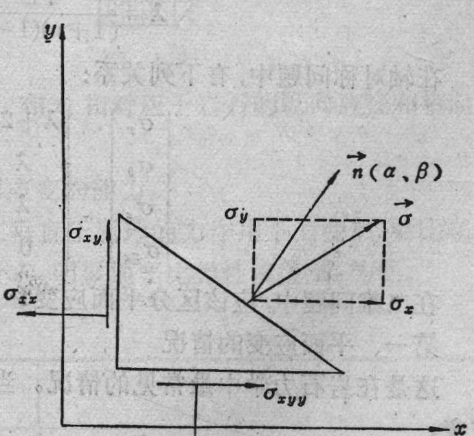


图 1-7

对二维问题(图 1-7)则有：

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\alpha\sigma_{xx}+\beta\sigma_{xy}\\ \sigma_y&=\alpha\sigma_{xy}+\beta\sigma_{yy}\end{aligned} \tag{1-4}$$

因此，已知 σ_{xx}, σ_{xy} 和 σ_{yy}，就可以算出作用在任何方向的平面上的应力分量。

三、应力应变关系

1. 各向同性弹性体的情况

虎克定律表明在 dV 微元上的应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}$ 和 σ_{zx} 与应变之间有线性关系，可以写为:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2\mu\varepsilon_x \\
\sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2\mu\varepsilon_y \\
\sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2\mu\varepsilon_z \\
\sigma_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\
\sigma_{xz} &= \mu\gamma_{xz} \\
\sigma_{yz} &= \mu\gamma_{yz}
\end{aligned}
\tag{1-5}
$$

以后将利用矩阵表示，因此，方程组(1-5)可写成:

$$
\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{vmatrix}
$$

式中　λ, μ——表示材料特性的两个系数，称作拉麦系数。

还经常用另外两个系数，即材料的弹性模数 E 和泊松比 ν。E, ν 和 λ, μ 有下列关系:

$$
\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}
$$

反之亦有:

$$
\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1-6}
$$

在轴对称问题中，有下列关系:

$$
\begin{vmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\
\lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\
\lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{vmatrix}
\tag{1-7}
$$

在二维问题中，应该区分平面应变和平面应力这两种情况。

第一、平面应变的情况

这是在岩石力学中最常见的情况。当研究垂直于巷道轴向的平面时，必须考虑平面应变。

令关系式(1-5)中　　$\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=\varepsilon_z=0$

应力应变关系为:

$$
\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\lambda+2\mu & \lambda & 0 \\
\lambda & \lambda+2\mu & 0 \\
0 & 0 & \mu
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}
\tag{1-8}
$$

第二、平面应力的情况

在实验室中对试件进行应力分布计算时，经常遇见这种情况，例如，计算柱状试件、光弹模型的应力分布等。其结果对于指导实验是很宝贵的。

令关系式(1-5)中
$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_z=0$$
可得

$$\begin{vmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{vmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{vmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{vmatrix} \tag{1-9}$$

2. 正交各向异性弹性体的情况

多数岩石并非是各向同性的材料。实际上，它们的力学性质都表现出很强的各向异性。这是由于地质构造条件或岩石形成的沉积条件所造成的。最典型的例子是板岩，它们弹性模数根据不同方向大小可差三倍。在这种情况时(而这种情况是经常的)，各向异性可归结为正交各向异性。也就是说，存在一个平面方向(实际上相应于片理或层理)，在这个方向上，岩石为各向同性的弹性体。

这时材料的弹性特征是由5个独立参数所决定的：两个弹性模数 E_1 和 E_2、两个泊松比 ν_1 和 ν_2 和一个剪切模数 μ_2。

当试件受到一个垂直于片理的压力作用时，E_2 和 ν_2 系数相对应于岩石的纵向应变及横向应变(图 1-8)。

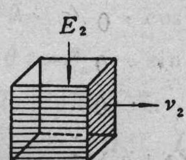


图 1-8

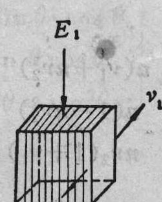


图 1-9

当试件受到一个平行于片理的外力作用时，E_1 和 ν_1 相对应于岩石的纵向应变和横向应变(ν_1 相应于片理面中的伸长)(图 1-9)。

剪切系数 μ_2 表征岩石承受平行于片理面的剪应变的能力。

一般地说，由于完全正交各向异性的岩石，在垂直于层理的力作用下的变形，要比在平行于层理的力作用下的变形大得多，所以弹性模数 E_2 明显地要比弹性模数 E_1 为低。

下表列出层理岩石弹性特性的某些数值。

岩　　石	E_1	E_2	ν_1	ν_2	μ_2
Angers 板岩	790 000	150 000	0.19	0.18	47 000
Provence 石灰岩	330 000	300 000	0.24	0.24	96 000
Eoine 石灰岩	510 000	510 000	0.34	0.26	–
Saint-Maximin 石灰岩	86 000	84 000	0.24	0.20	34 000

由上表可见，只有板岩具有强烈的正交各向异性。

采用直角坐标来表示，如 XOZ 为层理面，则根据各向异性弹性介质理论有下列关系式：

$$
\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} 1-n\nu_2^2 & \nu_2(1+\nu_1) & \nu_1+n\nu_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2(1+\nu_1) & \frac{1-\nu_1^2}{n} & \nu_2(1+\nu_1) & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1+n\nu_2^2 & \nu_2(1+\nu_1) & 1-n\nu_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_2}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_2}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu_1-2n\nu_2^2}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{vmatrix} \tag{1-10}
$$

式中为了简化，设

$$
A = \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}
$$

和
$$
n = \frac{E_1}{E_2}
$$

在轴对称问题中，应力应变关系有：

$$
\begin{vmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{vmatrix} = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}
$$

$$
\times \begin{vmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n(\nu_1+n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n(\nu_1+n\nu_2^2) & n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & n\nu_2(1+\nu_1) & 1-\nu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_2}{E_2}(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{vmatrix} \tag{1-11}
$$

在平面问题中，有下列两种情况。

第一、如果所计算的截面是通过材料的正交各向导性轴，对于平面应变($\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{yz}=0$)有：

$$
\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{vmatrix} 1-n\nu_2^2 & \nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ \nu_2(1+\nu_1) & \frac{1-\nu_1^2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)\mu_2}{E_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \tag{1-12}
$$

对于平面应力($\sigma_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$)有：

$$
\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E_2}{1-n\nu_2^2} \begin{vmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-n\nu_2^2}{E_2}\mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \tag{1-13}
$$

第二、如果所计算的截面是材料的某一层理面，对于平面应变有：

$$\begin{vmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{vmatrix}=\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}\begin{vmatrix}1-n\nu_2^2 & \nu_1+n\nu_2^2 & 0\\ \nu_1+n\nu_2^2 & 1-\nu_2^2 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu_1-2n\nu_2^2}{2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{vmatrix}$$

可以指出：在这种情况下，材料的性能与各向同性的材料性能是一样的。而各向同性材料有如下特性：

$$E=E_1\frac{1+2\nu_1+n\nu_2^2}{(1+\nu_1)^2}\qquad \nu=\frac{\nu_1+n\nu_2^2}{1+\nu_1}$$

在斜轴情况下，上述关系式仅在OX坐标轴与岩石层理面方向一致时才适用。但是，经常的情况是所要计算的问题中的岩层具有一定的倾斜，这样，就要对上述关系式进行坐标轴变换(图 1-10)。

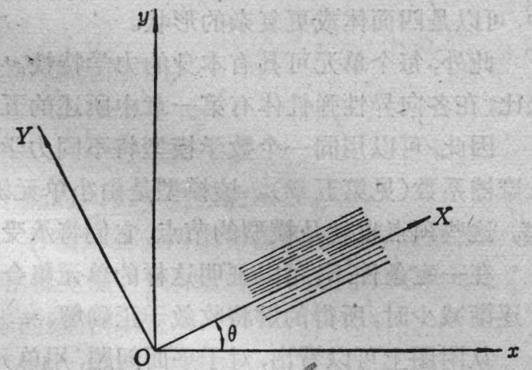


图 1-10

如果用$|T_0|$表示矩阵(1-11)、(1-12)或(1-13)，则为了变换到某一坐标系Ox, Oy，可以证明只要用下述矩阵代替$|T_0|$即可：

$$|T|=|R|\,|T_0|\,|R|^t$$

式中 $|R|$——表示下列矩阵。

$$|R|=\begin{vmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cdot\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{vmatrix}\tag{1-14}$$

在平面问题中，矩阵$|T_0|$写成下式：

$$|T_0|=\begin{vmatrix}H & L & 0\\ L & H1 & 0\\ 0 & 0 & M\end{vmatrix}\tag{1-15}$$

矩阵$|T|$中的系数为：

$$\begin{aligned}
&T(1,1)=H.C4+H1S4+2.SC2.(L-2M)\\
&T(1,2)=SC2(H+H1-4M)+L(S4+C4)\\
&T(1,3)=SC[C2.(H-L-2M)+S2.(L-H1+2M)]\\
&T(2,2)=SC2.(2L+4M)+H.S4+H1.C4\\
&T(2,3)=SC.[S2(H-L-2M)+C2(L-H1+2M)]\\
&T(3,3)=SC2(H-2L+H1-2M)+M.(S4+C4)\\
&T(2,1)=T(1,2)\\
&T(3,1)=T(1,3)\\
&T(3,2)=T(2,3)
\end{aligned}$$

式中令：

$$S2=\sin^2\theta\qquad C2=\cos^2\theta\qquad SC=\sin\theta\cos\theta$$
$$SC2=\sin^2\theta\cos^2\theta\qquad S4=\sin^4\theta\qquad C4=\cos^4\theta$$

第二章　有限元法的一般公式

第一节　问 题 的 提 法

将所欲计算位移和应力的连续介质分成许多小单元，这些小单元组成一个集合体。

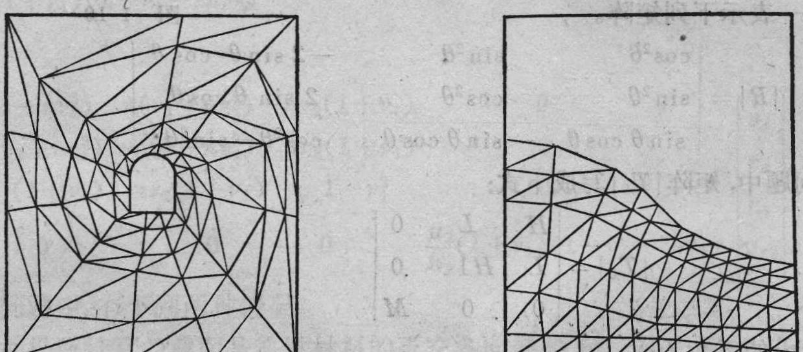
这些单元可以有不同的形状和大小。在平面问题中，可以是三角形或距形；在三维问题中，可以是四面体或更复杂的形状。

此外，每个单元可具有本身的力学特性。除了密度外，各向同性弹性体有弹性模数和泊松比；在各向异性弹性体有第一章中所述的五个系数。

因此，可以用同一个数学模型将不同力学性质的岩层叠加起来，并且岩层之间还可以引入摩擦系数(见第五章)。该模型是由小单元组合起来的集合体，单元之间的顶点连结在一起。这些顶点也就是模型的节点，它们将承受施加在结构上的外力。

在一定条件下，可以证明这样的单元集合体能够正确地模拟连续介质，并且当单元的尺寸逐渐减少时，所得的解将收敛于正确解。

从附图上可以看出，对于平面问题，用单元分割是一个很好的设想。



a　　　　图 2-1　　　　*b*

第二节　系统刚度矩阵的一般公式

这里我们将给出系统刚度矩阵的一般公式。通过计算得出的表达式；可以用来解决后面所讨论的平面问题和轴对称问题。然而为了对有限元法的近似程度有一个比较具体的概念，我们对平面问题进行了专门的论证。对此问题感兴趣的读者可以直接参考这部分。另外对于有限元法在轴对称问题方面的应用，亦可利用本节建立起来的公式。

一、刚度矩阵的概念

假设一个弹簧受到一个拉力 $\vec{F}$ 作用，在该力的作用下，M 点移到 M' 点，则弹簧位移为 u。弹簧是弹性的，于是有：

$$F=ku$$

式中　k——弹簧系数，称为刚度系数。

对于有限元模型的每个单元也有同样的结果，由弹性理论得到：

$$|F| = |K|\ |U|$$

式中 $|F|$——所表示的并非力的绝对值，而是包括施加于模型节点上的所有力的一个矩阵；

$|U|$——节点位移矩阵；

$|K|$——相似于弹簧情况的系统的刚度矩阵。

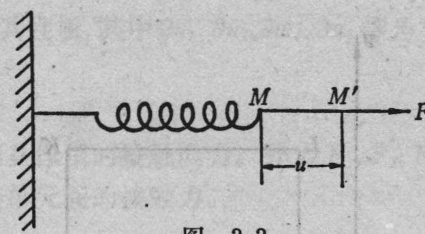


图 2-2

这个刚度矩阵分两步进行计算：

首先确定一个单元的单元刚度矩阵，然后再将所有单元的刚度矩阵相加，便构成系统的总体刚度矩阵。

二、单元刚度矩阵

假设模型的某个单元 V，用 I, J, K 等表示这个单元的节点。

单元刚度矩阵的计算有以下几个步骤：

1. 选择单元中的位移函数。

在单元内，可以将 M 点 (x, y, z) 位移写成这个点的 x, y, z 坐标的函数。这个函数应该是实际情况的合理的近似。为此，必须保证在两个邻接的单元中间位移的连续性，使得这两个单元既不重叠，也不在其中间出现空隙。例如在平面问题中，其单元是 I，J, K 三角形，而位移分量 u, v 可以写成 x, y 坐标的线性函数：

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A_0 + A_1 x + A_2 y \\ v(x, y) &= B_0 + B_1 x + B_2 y \end{aligned} \tag{2-1}$$

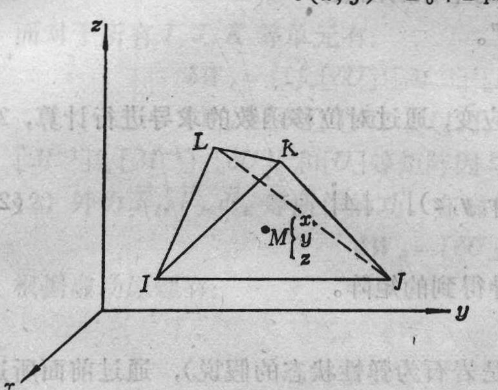


图 2-3

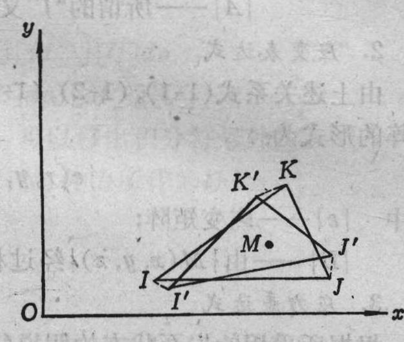


图 2-4

如果已知每个顶点的位移 u, v，则 A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 和 B_2 可以表示为顶点位移的函数。可见位移函数必须包含与确定三角形单元顶点位移同样数量的待定系数。

显然，上述关系可以保证介质的连续性。实际上，两个单元所共有的介面 IJ 上的点，在变形之后，将成为新的直线 $I'J'$ 上的点(图 2-4)。

在单元为四面体的三维问题中，所选用的位移函数同样也是线性的，即：

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z \\ v(x, y, z) &= B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z \\ w(x, y, z) &= C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 z \end{aligned}$$

在单元为矩形的平面问题中，当矩形单元的边平行于坐标轴时，选用的位移函数为：

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 xy \\ v(x, y) &= B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 xy \end{aligned}$$

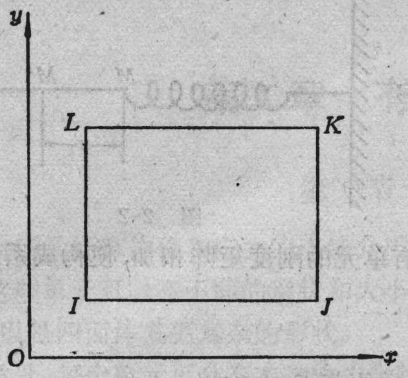


图 2-5

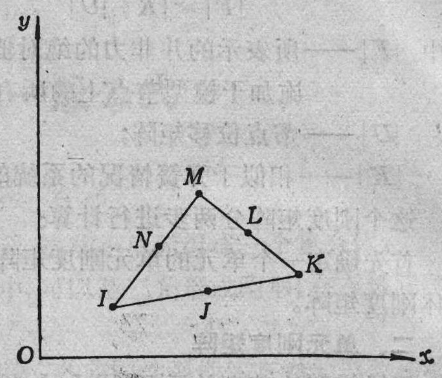


图 2-6

在平面问题中，如单元是由六个点确定的三角形，则位移函数为：

$$u(x,y)=A_0+A_1x+A_2y+A_3x^2+A_4xy+A_5y^2$$

可以验证所有这些函数都能确保介质连续性。也可以说，它们就是“保形的”位移函数。所有的这些线性或非线性的关系式都可以写成一般的矩阵形式：

$$|u(x,y,z)|=|m(x,y,z)|\cdot|A| \tag{2-2}$$

式中 $|u(x,y,z)|$——位移矩阵；

$|m(x,y,z)|$——一个“转移矩阵”，为点的坐标的函数；

$|A|$——所谓的“广义坐标矩阵”。

2. 应变表达式

由上述关系式(1-1)，(1-2)，(1-3)确定的应变，通过对位移函数的求导进行计算，写成矩阵的形式为：

$$|\varepsilon(r,y,z)|=|B(x,y,z)|\quad|A| \tag{2-3}$$

式中 $|\varepsilon|$——应变矩阵；

$|B|$——由$|M(x,y,z)|$经过相应的求导得到的矩阵。

3. 应力表达式

根据所采用的岩石状态的假说(最常用的是岩石为弹性状态的假说)，通过前面所述的应力应变关系式，应力可为：

$$|\sigma(x,y,z)|=|T|\quad|\varepsilon(x,y,z)| \tag{2-4}$$

4. 节点力的规定

规定单元在节点力的作用下处于平衡状态。这样利用下述虚功原理：“在任一虚位移下，系统的外力和内力(对于系统的各单元而言都是外力)所作功之和等于系统中各单元的应变功之和”，就可以由$|\varepsilon|$和$|\sigma|$确定的某一应变状态出发，在单元的节点上加一虚位移。

如果规定关系式(2-2)对单元的每个节点得到满足，就可以得出一组线性方程组，该方程组用A_0, A_1, A_2等系数把单元节点的位移和节点坐标连系起来。

这个线性方程组写成矩阵的形式有：

$$|U|=|M|\quad|A|$$

式中 $|U|$——列矩阵，它表示单元节点的位移；

$|M|$——单元节点的坐标函数矩阵，这个矩阵是方阵。

在单元节点处施加的虚位移可以由矩阵$|\partial U|$确定其性质，其中∂u_i、∂v_i、∂w_i、∂u_j等为节点的虚位移。

在I, J, K单元内，设想有一个微元dv(图 2-7)

在这个系统中作用力如下：每个微元dv之间的相互作用的接触内力。外力F_I, F_J, F_K等这些外力可以用来代替作用于I, J, K等单元与邻接单元间的接触力。

根据虚位移$[\delta U]$，可以计算这些力所作的功。

(1) 应变功。在微元dv中，对应于虚位移$[\delta U]$的应变功为：

$$\delta(dW_I)=|\delta\varepsilon|^t|\sigma|dv$$

计算出$|\delta\varepsilon|^t$和$|\sigma|$矩阵。

$[M]$是正则矩阵，所以(2-2a)关系式可以写成：

$$[A]=|M^{-1}||U|$$

将之代入(2-3)式中得到：

$$|\varepsilon|=[B][M^{-1}][U]$$

并有 $$|\delta\varepsilon|=|B||M^{-1}||\delta U|$$

同理，利用(2-4)式，可以得到：

$$|\sigma|=|T|\varepsilon|=|T||B||M^{-1}||U|$$

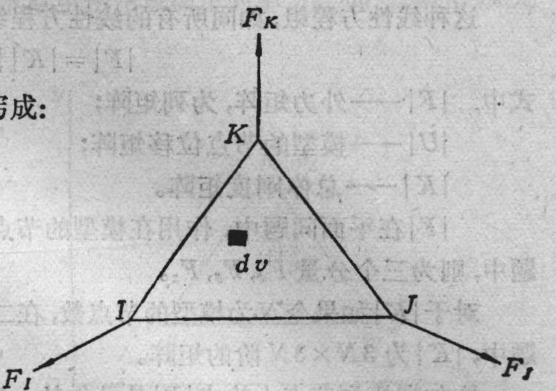


图 2-7

因此，功$\delta(dW_I)$写成下式：

$$\delta(dW_I)=[\delta U]^t[M^{-1}]^t[B]^t[T][B][M^{-1}][u]dv$$

而对于所有I, J, K等单元有：

$$\delta W_I=\iiint_v[\delta U]^t[M^{-1}]^t[B]^t[T][B][M^{-1}][U]dv$$

或 $$\delta W_I=[\delta U]^t[M^{-1}]^t\left(\iiint_v[B]^t[T][B]dv\right)[M^{-1}][U]$$

$[M^{-1}]^t$、$[M^{-1}]$、$[\delta U]^t$和$[U]$等矩阵因与坐标无关，可以移出积分符号外边。

(2) 外力$\vec{F}_I, \vec{F}_J, \vec{F}_K$等所作的功。在虚位移为$|\delta U|$时，外力所作的功为：

$$\delta W_E=[\delta U]^t[F]$$

根据虚功原理有：

$$\delta W_E=\delta W_I$$

即有 $$[\delta U]^t[F]=[\delta U]^t[M^{-1}]^t\left(\iiint[B]^t|T||B|dv\right)|M^{-1}||U|$$

无论虚位移$[\delta U]$为多少，这个等式都成立。

因此，可以得出下式：

$$|F|=|M^{-1}|^t\left(\int_{vol}|B|^t|T||B|dv\right)|M^{-1}||U|$$

5. 刚度矩阵

按照刚度矩阵的定义有：

$$|K|=|M^{-1}|^t\left(\int_{vol}|B|^t|T||B|dv\right)|M^{-1}| \qquad (2\text{-}5)$$

在平面问题中，假设单元为单位厚度的薄板，且$|B|$和$|T|$在单元中为常量，则上式可以简化为：

$$|K|=s|M^{-1}|^t|B|^t|T||B|\quad|M^{-1}|$$

式中 s——单元面积。

但是对于轴对称问题却不能这样加以简化。实际上这时$|B|$与坐标有关，且不能再考虑为等厚的薄板，而必须对环形面积进行积分。