

# 建筑工程 基础数学

(第二版)

孙福兴 编著



中国建筑工业出版社

# 建筑工程基础数学

(第二版)

孙福兴 编著

中国建筑工业出版社

(京)新登字035号

本书结合建筑工程的实际,系统且有重点地叙述了初等数学、高等数学、工程数学方面的基础知识。全书的主要章次有:基本的代数运算,三角形及其计算,一次、二次函数与幂函数,圆和圆的方程,三角、反三角、指数、对数函数与初等函数,导数与微分,不定积分与定积分,矩阵代数与线性方程组,概率论。全书以常用的数学方法及其应用为重点,介绍了基本的数学方法:代数(包括矩阵代数)方法,几何方法,微积分(包括微分方程)方法和概率论方法;分析了大量的建筑工程问题:建筑材料的代换,建筑构件的形体与重心计算,常用曲线的放样,钢筋料表的编制,简单结构的静力计算与矩阵分析,建筑量的优化计算,建筑构件的振动分析,梁的内力、变形、可靠度计算,建筑产品或用品的概率分析,建设方案或生产计划的决策,施工网络的概率分析, $\bar{x}-R$ 质量控制图等。本书起点低,选材精,叙述详细,实例很多。

本书可供从事土建工程的各个层次的读者自学,也可作土建工程大专班教学参考书。

责任编辑:林婉华

## 建筑工程基础数学

(第二版)

孙福兴 编著

中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)

新华书店经销

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 52 字数: 1264千字

1992年1月第二版 1992年1月第二次印刷

印数: 34,101—36,200册 定价: 31.50元

ISBN7-112-01321-6/TU·965

(6363)

# 第一版前言

在建筑工程的施工现场，可以看到各种各样的建筑构件（或结构）。例如，基础、柱、墙、梁、板、屋架、门窗、楼梯、烟囱、水塔等等。观察和比较这些建筑构件（或结构）就容易发现：柱或梁的截面、门窗的形状大都是长方形的；很多屋架是三角形的；楼梯和许多基础的截面是阶梯形的；烟囱和水塔的截面是圆形的。舍去这些构件（或结构）的实际意义，仅从形状方面加以抽象，就可概括出反映这些构件（或结构）的一些平面图形——长方形、三角形、圆等“形”的概念。

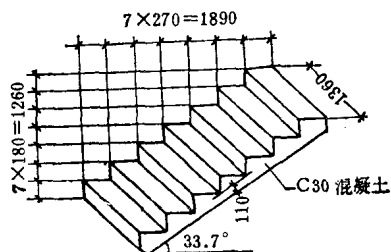


图 0-1 预制的钢筋混凝土板式楼梯段

对于这些建筑构件（或结构），如用某种标准（计量单位）去度量一下，就可得到反映这些构件（或结构）的一些量的大小。例如，对于一个预制的钢筋混凝土板式楼梯段（如图0-1所示），用有关工具就可测得以下数据：

楼梯宽	1360mm <sup>①</sup>
楼梯段板厚	110mm
踏步宽	270mm
踏步高	180mm
踏步数	7个
楼梯段体积	0.571m <sup>3</sup>
楼梯段重量	1430kg
楼梯段倾斜角	33.7度
楼梯段混凝土抗压强度	20N/mm <sup>2</sup>

这些数量反映了预制钢筋混凝土板式楼梯段的一些特征。而这里的1360、110、270、180、7、0.571、1430、33.7、20等“数”，反映了楼梯段的长度、体积、重量、角度、强度等“量”的大小。

上面的例子说明了一个重要的事实：“形”和“数”的概念“是从现实物质世界中得来的”“而不是在头脑里由纯粹的思维产生出来的”。人们正是在长期的实践中，才逐渐形成“形”和“数”的概念，才逐渐认识“形”和“数”的丰富内容。数学正是研究现实世界的“形”和“数”的一门科学，正如恩格斯所指出的那样：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”<sup>②</sup>

① 本书图上的尺寸，凡是未注明单位的，一律指毫米。  
② 引自恩格斯《反杜林论》，人民出版社1970年版。

在建筑工程的实践中，存在着大量的“数”和“形”的问题。例如，在房屋设计中，要进行各种技术经济指标以及荷载、内力、构件截面等数量的分析与计算，要进行建筑、结构、水暖电卫等图形的分析与绘制；在组织施工中，要进行建筑资源（如材料量、劳动力…）等数量的分析与计算，要进行建筑资源使用的时间安排和空间布置等图形的分析与绘制。尤其是在我国实现建筑工业现代化的过程中，会遇到更多的“数”和“形”的问题。因此，学习数学，熟悉“数”和“形”的知识，掌握数学这个工具，是实践的需要，是实现四个现代化的需要。

学习数学，需要有书本。目前社会上的数学读物不少，但大都是分科立册，不仅本本较多，篇幅较大，而且未能联系建筑工程的实际，一般不太适合从事建筑工程的同志的自学需要。为了适应这些同志学习（特别是自学）数学的需要，编写了这本《建筑工程基础数学》。本书在内容选择上，根据建筑工程（特别是建筑施工）的需要，系统而有重点地介绍了代数、几何和微积分的基本知识，努力把学习数学和运用数学分析实际问题结合起来。在编写安排上，以实践中最常见的函数关系为主要线索，把代数、平面几何、平面三角、平面解析几何和一元函数微积分等内容统一进行了组织，由浅入深地、形数结合地讨论了常见函数及其有关的问题；以数学的基本概念和基本运算为重点，通过例题，分析了许多建筑施工中常见的问题，如建筑构件的形体计算，钢筋料表的编算，常见曲线的放样，简单的静力分析等等。为了便于自学，概念的叙述比较详细，不仅从实际出发引入概念，而且注意与前、后、左、右的联系和不同概念间的比较；式子的推演、问题的求解，力求思路简明，层次清楚，并注意归纳小结；例子也多，除基本题外，还有不少综合题（其中基本题和综合题都选了很多的高考题）和大量的联系实际的应用题。本书是一本联系建筑工程实际的基础数学读物，向读者介绍了一些常见的基本的数学概念和数学方法，既是解决简单的实际问题的基础，又是进一步学习科学技术的基础。

本书在编写过程中，曾得到西安冶金建筑学院不少同志的支持和帮助，特别是数学教研室主任刘则刚副教授、数学教研室潘鼎坤副教授、梅己诚先生三位老师，他们分别看了本书各章的初稿，并提出了许多宝贵意见，特此表示感谢。

本书是在业余时间编写的。由于编者水平很低，加上调查研究不够、时间零碎而短少，所以书中的缺点、错误一定不少，欢迎读者批评指正。

编者

1980年于西安冶金建筑学院

## 第二版前言

在改革的年代里，事物在变化，形势在发展。为了适应这种变化、发展，现对本书第一版进行了修改和补充，以满足广大读者的需要。

这次修订，主要考虑了如下几点：（1）压缩了初等数学部分的内容，把原来的八章改写为五章。在简要地叙述了一些基本的代数方法和几何方法之后，着重举例说明了这些方法在建筑工程方面的应用。（2）把作为微积分方法的重要应用的“微分方程”一节，单独立为一章。比较系统地介绍了几类常见微分方程的解法以及它们在建筑工程方面的应用。（3）鉴于电子计算机日益普及，增写了“矩阵代数与线性方程组”一章，它是计算机数学的主要基础之一。（4）鉴于统计分析在生产、管理等方面有越来越大的影响，增写“概率论”一章，它是进行统计分析的理论基础。此外，在安排处理上，突出基本概念、基本运算与实际应用；在叙述表达上，强调简明、通俗，便于自学；在例题、习题配置上，力求基本、典型、结合建筑工程实际，其中选了不少大学或硕士研究生入学试题（题前冠以“\*”或“△”号）；在联系实际上，分析了大量的建筑工程问题：建筑材料的代换，建筑构件的形体与重心计算，常用曲线的放样，钢筋料表的编制，简单结构的静力计算与矩阵分析，建筑量的优化计算，建筑构件的振动分析，梁的内力、变形、可靠度计算，建筑产品或用品的概率分析，建设方案或生产计划的决策，施工网络的概率分析， $\bar{x}-R$ 质量控制图等。希望本书成为从事建筑工程的不同层次的读者学习现代科学技术和解决一些实际问题的基础数学读物。

限于水平，不妥以至错误之处，可能很多，敬请读者批评指正。

# 目 录

<b>第一章 基本的代数运算</b> .....	1
第一节 代数式 .....	1
一、实数(1)；二、代数式概念(2)；三、整式及其运算(5)；四、分式及其运算(13)；五、根式及其运算(17)	
第二节 一次代数方程 .....	22
一、代数方程概念(23)；二、一元一次方程及其应用举例：施工进度计算、酸洗钢材的溶液计算、混凝土(或砂浆)配料计算、利用静力平衡条件求梁的支座反力(24)；三、二元一次方程组的消元解法及其应用举例：劳力安排问题、配料问题、支座反力问题(31)；四、三元一次方程组的消元解法及应用举例：劳力安排问题(34)；五、二元与三元一次方程组的行列式解法(36)	
第三节 二次代数方程 .....	42
一、一元二次方程及其有关问题：根的判别式、根与系数的关系、二次三项式的因式分解(43)；二、一元二次方程的应用举例：生产增长率的计算、挤密土桩平面布置的尺寸计算、钢筋混凝土筒支梁受压区高度计算、“优选”常数0.618的由来(48)；三、可化为一元二次方程的分式方程与根式方程(52)；四、二元二次方程组(54)	
第四节 代数不等式 .....	59
一、不等式及其变形规则(59)二、一元一次不等式及其应用举例：劳动生产率的计算、钢筋锚固长度的确定、配料允许范围的计算、建筑材料的代换(60)；三、一元二次不等式及其应用举例：生产增长幅度的计算、灰土井平面尺寸的确定、风力作用下的大模板的稳定计算(66)	
<b>第二章 三角形及其计算</b> .....	73
第一节 三角形 .....	73
一、形的概念(73)；二、三角形的一些基本性质(79)；三、全等三角形与等腰三角形，直角放样(81)；四、平行四边形，力的平行四边形法则(85)	
第二节 相似三角形 .....	91
一、相似三角形的概念(91)；二、相似三角形的判定(92)；三、相似三角形的应用举例：土方施工中“零点”位置的确定、变截面梁钢箍高度的计算、小平板测量的原理、支架轴向力的计算(94)	
第三节 直角三角形 .....	98
一、勾股弦定理及其应用举例：预制楼梯踏步的安装计算、芬克式屋架杆件长度的计算(98)；二、锐角三角比(101)；三、直角三角形的边、角计算及其应用举例：桅杆式起重机最大起吊高度和最远起吊距离的计算、旋转梯的边长计算、三棱柱土块的重量计算、吊装绳索的内力计算(106)	
第四节 斜三角形的边、角计算 .....	111
一、正弦定理与余弦定理(111)；二、斜三角形的边、角计算及其应用举例：吊装钢索内力的计算、屋架有关长度与角度的计算、三角形地块面积的计算(112)	

第五节 面积、体积的计算	117
一、面积、体积的计算公式(117); 二、建筑构件的形体及自重的计算举例:花篮梁、棱台形柱基、砖烟囱体积计算,混凝土多孔板、预制柱自重计算(121)	
<b>第三章 一次、二次函数与幂函数</b>	126
第一节 变量与函数	126
一、平面直角坐标系(126); 二、常量与变量(130); 三、函数的概念(131); 四、函数的图形,均布荷载作用下简支梁上任一截面上的弯矩与截面位置的关系曲线(135); 五、建立函数关系的举例:梁的支座反力与梁上荷载作用位置的函数关系、吊车吊臂长度与吊臂张角的函数关系(137)	
第二节 一次函数与直线	139
一、一次函数及其图形——直线(139); 二、直线的方程,集中力作用下简支梁的弯矩方程(144); 三、直线和直线的位置关系,必要充分条件(149); 四、一次函数与直线的应用举例:直线型插值法、直线型经验公式(156)	
第三节 二次函数与抛物线	161
一、二次函数及其图形——抛物线(162); 二、抛物线及其方程(170); 三、二次函数与抛物线的应用举例:抛物线拱、梁的弯矩图的绘制(174); 四、抛物线拱的放样(178)	
第四节 幂函数及其图形	182
一、幂函数的概念(182); 二、幂函数的图形、函数的一些特性(182)	
<b>第四章 圆和圆的方程</b>	188
第一节 圆	188
一、圆的性质,圆拱半径的计算公式(188); 二、圆弧长的计算、钢筋料表的计算(196); 三、等分圆周,圆弧的(几何)放样(200)	
第二节 圆的方程	206
一、圆的方程,圆弧形吊顶吊筋的尺寸计算(206); 二、圆弧曲线的坐标放样(210)	
第三节 椭圆、双曲线及其方程	213
一、椭圆及其方程、椭圆的放样(213); 二、双曲线及其方程、双曲线的放样(218)	
第四节 坐标变换	225
一、坐标轴的平移变换(226); 二、坐标轴的旋转变换(228)	
<b>第五章 三角、反三角、指数、对数函数与初等函数</b>	231
第一节 任意角三角函数及其图形	231
一、任意角三角函数的概念(231); 二、任意角三角函数的计算(235); 三、任意角三角函数的图形(240); 四、圆形直角弯管的放样(244)	
第二节 三角恒等式	246
一、两角和、差的三角函数(246); 二、倍角、半角的三角函数(248); 三、三角函数的和、差与三角函数的积的互化(250)	
第三节 反三角函数及其图形、简单的三角方程	252
一、反函数及其图形(252); 二、反三角函数及其图形(253); 三、简单的三角方程(258)	
第四节 极坐标	261
一、平面极坐标系(262); 二、曲线的极坐标方程(263); 三、极坐标与直角坐标的关系、极坐标的定位放线(265)	
第五节 指数函数、对数函数及其图形	266
一、指数概念的复习和推广(267); 二、指数函数及其图形(267); 三、对数概念(269);	



四、对数的运算规则(271); 五、对数函数及其图形(272)	
第六节 常用对数与自然对数、指数方程与对数方程	274
一、常用对数的性质(274); 二、常用对数计算的两类问题(275); 三、常用对数的应用举例: 任意次幂的计算、简化数值计算、养护期间混凝土抗压强度的推算(276); 四、自然对数与对数换底公式(278); 五、指数方程与对数方程、有关生产增长的计算(280)	
第七节 初等函数及其图形	283
一、基本初等函数、初等函数的概念(283); 二、初等函数的图形(286)	
<b>第六章 导数与微分</b>	<b>291</b>
第一节 函数的极限	291
一、函数的极限概念、无穷小量(291); 二、极限的运算(298); 三、函数的连续性(303)	
第二节 导数的概念	309
一、导数的物理与几何模型(309); 二、导数的定义(313); 三、导数概念的应用举例: 混凝土抗压强度增长速度的计算(315); 四、导数的几何意义, 曲线的切线与法线方程(316); 五、函数的可导性与连续性之间的关系(317)	
第三节 导数的计算	319
一、基本初等函数的导数(一)(319); 二、函数的和、差、积、商的导数, 抛物线拱形屋盖有关量的计算(321); 三、复合函数的导数与隐函数的导数, 双曲线冷却塔滑模施工中的一个计算问题(325); 四、基本初等函数的导数(二)、求导方法小结(331); 五、高阶导数(334)	
第四节 导数的应用	336
一、微分中值定理, 函数单调增减性的判定法(336); 二、函数图形的凹凸判定法与函数图形的描绘, 荷载作用下梁的挠曲线的形状分析(339); 三、函数的最大值、最小值(344); 四、最大值、最小值问题的应用举例: 制作容器的最省材料问题、圆木加工的最大承载能力问题、结构吊装的最大高度与最小臂长问题(351); 五、用切线法求方程 $f(x)=0$ 的近似根(357)	
<b>第七章 导数与微分(续)</b>	<b>363</b>
第一节 微分及其计算	363
一、微分的物理与几何模型(363); 二、微分的概念(365); 三、微分的计算(367)	
第二节 微分的应用	369
一、函数的近似值与函数改变量的近似值计算, 工业厂房主轴线测设中的改正值分析(369); 二、弧长的微分与曲率, 荷载作用下梁的弯曲程度的计算(372); 三、由参变量方程所确定的函数的导数、未定式定值法(罗必达法则)(380)	
第三节 函数的幂级数展开	390
一、等差级数与等比级数(390); 二、无穷级数及其收敛与发散的概念(395); 三、函数的幂级数展开(398); 四、函数的幂级数展开式的应用举例: 一些值的近似计算、 $\langle$ 三角函数表 $\rangle$ 等的编造(405)	
第四节 二元函数偏导数简介	409
一、二元函数及其几何表示(409); 二、二元函数的偏导数(411); 三、二元函数偏导数的应用举例: 二元函数的极值、最小二乘法(414)	
<b>第八章 定积分与不定积分</b>	<b>419</b>
第一节 定积分及其计算(一)	419
一、定积分的几何与物理模型(419); 二、定积分的概念(423); 三、定积分的基本性质,	

梁的横截面上的弯矩、剪力与作用梁上的外荷载的关系 (426)；四、微积分基本公式、鱼腹式吊车梁的工程量计算 (429)	
第二节 不定积分及其求法 (一) .....	435
一、不定积分的概念 (435)；二、简单积分法，砖砌窑洞的窑背填土的计算 (438)；三、变量代换积分法，椭圆形孔的预制空心楼板的工程量计算 (443)；四、分部积分法 (452)	
第三节 不定积分的求法 (二) .....	457
一、有理函数的积分 (457)；二、三角函数有理式与某种根式的有理式的积分 (462)；三、积分表的使用 (464)	
第四节 定积分的计算 (二)、广义积分 .....	467
一、定积分的变量代换法与分部积分法 (467)；二、定积分的近似算法 (474)；三、广义积分 (478)	
<b>第九章 定积分与不定积分 (续)</b> .....	483
第一节 定积分在几何上的应用 .....	483
一、微元分析法的基本思想 (483)；二、平面图形面积与一些立体体积的计算举例：圆台体体积计算、拟柱体体积计算、抛物线半腿形混凝土块的体积计算 (485)；三、平面曲线的弧长与旋转曲面侧面积的计算举例：抛物线拱屋盖的长度计算、椭圆薄壳基础中椭圆形钢筋的长度计算、双曲线冷却塔通风筒的侧面积计算 (495)	
第二节 定积分在物理力学上的应用举例 .....	502
一、挡土墙倾覆力矩的计算 (502)；二、变力作功的计算举例：击钉入木的做功计算、梁上荷载对梁的变形做功计算 (503)；三、液体压力的计算 (507)	
第三节 二重积分简介 .....	508
一、二重积分的概念与计算 (509)；二、二重积分的应用举例：一般立体体积的计算、平面薄片重心的计算、平面图形惯性矩的计算、均布荷载作用下地基中附加应力的计算 (516)	
<b>第十章 常微分方程</b> .....	531
第一节 微分方程的一些概念 .....	531
一、微分方程问题的提出 (531)；二、微分方程的基本概念 (533)	
第二节 一阶微分方程 .....	535
一、一阶可分离变量微分方程 (536)；二、一阶线性微分方程 (539)；三、一阶微分方程的应用举例：深仓中贮藏物对仓壁的侧向压力强度问题、人工降低地下水位问题、地下厂房中的空气调节问题、预应力钢筋混凝土在张拉钢筋时的摩擦损失问题 (543)	
第三节 二阶可降阶微分方程 .....	551
一、形如 $y'' = f(x)$ 的二阶可降阶微分方程 (552)；二、形如 $y'' = f(x, y')$ 的二阶可降阶微分方程 (552)；三、形如 $y'' = f(y, y')$ 的二阶可降阶微分方程 (554)；四、二阶可降阶微分方程的应用举例：沿水平方向均匀分布的竖向荷载作用下的合理拱轴线问题、悬索结构问题、梁的挠曲线方程问题 (556)	
第四节 二阶常系数线性微分方程 .....	562
一、二阶常系数齐次线性微分方程 (562)；二、二阶常系数非齐次线性微分方程 (571)；三、二阶常系数线性微分方程的应用举例：压杆稳定问题、建筑结构的振动问题、弹性地基梁问题 (578)	
<b>第十一章 矩阵代数与线性方程组</b> .....	585
第一节 $n$ 阶行列式 .....	585
一、 $n$ 阶行列式的概念 (585)；二、 $n$ 阶行列式的计算 (588)；三、克莱姆法则，两个自由度体系的自由振动问题 (593)	

第二节 矩阵代数	599
一、矩阵概念 (599); 二、矩阵的运算, 结构分析中的柔度矩阵与刚度矩阵 (602); 三、逆矩阵、静定结构支座反力的矩阵表达式 (610); 四、矩阵的分块 (618)	
第三节 线性方程组	622
一、高斯消元法与矩阵的初等变换、三铰刚架的矩阵分析 (622); 二、矩阵的秩与一般线性方程组的有解条件, 建筑材料的分配方案问题(630); 三、主元素消元法与迭代法 (646)	
<b>第十二章 概率论</b>	656
第一节 排列、组合与二项式定理	656
一、排列与组合, 劳力的分派方案 (656); 二、二项式定理 (660)	
第二节 随机事件及其概率	662
一、随机事件 (662); 二、随机事件的概率、古典概型, 放回抽样与不放回抽样 (665); 三、条件概率及其有关的三个概率公式, 混凝土制品公司的次品率、混凝土低强度各因素的概率分析 (671); 四、随机事件的独立性与贝努里概型, 工程得标与土层打桩的概率分析(678)	
第三节 随机变量及其概率分布	685
一、随机变量的概念 (685); 二、离散型随机变量的概率分布、土堤夯实的验收与建筑五金购置数量的概率分析 (686); 三、连续型随机变量的概率分布 (一); 均匀与负指数分布, 焊机检修的概率分析 (694); 四、连续型随机变量的概率分布 (二); 正态分布. 建筑材料强度的保证率、建筑构件尺寸误差与施工网络计划的概率分析、梁的可靠度与支座沉陷的概率分析 (704); 五、随机变量的函数及其概率分布、对数正态分布 (711)	
第四节 二维随机变量及其概率分布	716
一、二维随机变量的分布列 (分布密度)、边缘分布与随机变量的独立性, 工程计划中的材料及劳力费用的概率分析 (716); 二、二维随机变量的函数及其概率分布、 $\chi^2$ 分布与 $t$ 分布、施工网络计划的概率分析 (723)	
第五节 随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理	730
一、数学期望, 建设方案的选择问题、生产计划的安排问题 (730); 二、方差或均方差, 延误工期罚款与多种荷载作用下柱子破坏的概率分析 (739); 三、矩与变异系数 (744); 四、大数定律与中心极限定理、卡车装运水泥袋数与加法运算误差的概率分析 (747)	
第六节 统计估值及质量控制	753
一、随机样本、统计量及其分布 (753); 二、参数的点估计, 混凝土强度的均值与均方差的估计值 (759); 三、参数的区间估计、钢板厚度的均值与均方差的真值范围 (764); 四、质量控制, 混凝土强度与墙面平整度的 $\bar{x}-R$ 控制图 (769)	
<b>习题参考答案</b>	777
<b>附表</b>	799
附表 I 三角函数表	799
一、正弦和余弦函数表 (799); 二、正切和余切函数表 (801)	
附表 II 对数表	804
一、常用对数尾数表 (804); 二、常用对数反对数表 (805); 三、自然对数表 (807)	
附表 III 不定积分表	809
附表 IV 概率分布表	817
一、泊松分布表 (817); 二、标准正态分布表 (818); 三、 $t$ 分布临界值表 (818); 四、 $\chi^2$ 分布临界值表 (819)	

# 第一章 基本的代数运算

数学，是从研究具体的数开始的。但具体的数或由具体的数组成的式子，只能表达实践中具体的个别的数量关系，适应不了实践的需要。例如，静定梁支座反力的一般计算，建筑材料的一般代换，混凝土、砂浆的配料误差的一般分析，风力作用下大模板稳定的一般验算等，就需要用字母代替数，通过解含有字母的等式或不等式来解决。用字母代替数，就是代数。它把对“数”的研究发展成为对含有字母的“式”的研究，从而在较为广泛的范围内讨论实践中的数量关系。

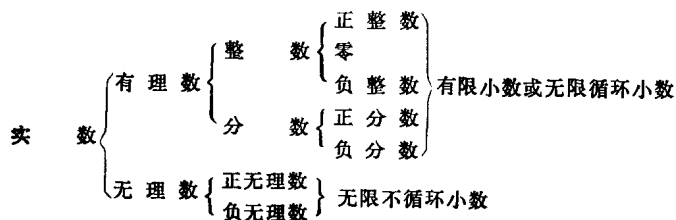
本章简要叙述含有字母的运算（即代数运算）的一些概念和方法。虽然很简单，但却很基本。既可解决一些简单的实际问题，又是进行分析、推理的基础。

## 第一节 代 数 式

在含有字母的式子中，有一类由数字及字母通过加、减、乘、除、乘方、开方运算符号连接起来的式子，最为简单、最为基本。它就是代数式。我们就从这里开始讨论。为叙述方便，先谈一点实数。

### 一、实 数

数是随着实践的需要而逐渐形成和发展的。早在人类社会发展的最初阶段，由于计数和测量的需要，就产生了正整数（即自然数）。随着人类实践活动的扩大和发展，因为要分割物品形成了正分数（正整数和正分数统称为正有理数）；为了刻划自然界存在着的相反意义的量，引入了负有理数（负整数和负分数）。零，既不是正数也不是负数，它是“作为一切正数和负数之间的界线”<sup>①</sup>，且有确切的涵义（如摄氏零度，就是在通常条件下水结成冰的一个确切的温度）。正有理数、零、负有理数统称为有理数。用十进制记数法，有理数可表示为有限小数（如 $\frac{34}{8} = 4.25$ ），或表示为无限循环小数（如 $\frac{20}{6} = 3.333 \dots$ ）。以后，人们在实践中又发现，对连续量进行度量（如用正方形一边长作单位去度量正方形对角线长）时，存在着不能用有理数来表示的量，从而产生了无理数。用十进制记数法，无理数可表示为无限不循环小数（如 $\sqrt{2} = 1.414213562 \dots$ ）。有理数和无理数统称为实数。实数系统如下所示。



<sup>①</sup> 引自恩格斯《自然辩证法》，人民出版社1971年版。

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为**数轴**。任意一个实数，可用数轴上唯一的点来表示；反之，数轴上的任意一点，都表示唯一的实数。实数与数轴上的点有一一对应关系。

数轴上在原点两旁、离开原点的长度相等的两个点所表示的两个数，互称为**相反数**。实数 $a$ 与 $-a$  ( $a \neq 0$ ) 是互为相反数。

在数轴上表示一个数的点离开原点的长度称为这个数的**绝对值**。一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。任何一个实数都可用该数的绝对值及其前面加一个正、负号来表示。

本书，基本上是在实数范围内讨论的。如无特别说明，凡遇到的数均指实数。

## 二、代数式概念

我们知道，具体的数或由具体的数组成的式子，只能表示实践中个别的数量关系。为了在较广泛的范围内讨论实践中的数量关系，就需要引入字母，用字母代替数。例如，在数的加法运算中，有 $5+3=3+5$ 、 $(-2)+4=4+(-2)$ 等式子，它表示“两数相加，交换其位置，和不变”，如用字母 $a$ 、 $b$ 代表两个数，那么上述加法交换律就可简明地表达为 $a+b=b+a$ 。又如，根据绝对值概念，有 $|3|=3$ 、 $|0|=0$ 、 $|-5|=5$ 等式子，它表示“正数和零的绝对值就是它本身，负数的绝对值等于它的相反数”，如用字母 $a$ 代替数，那么上述绝对值概念可简洁地表达为 $|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时,} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$ 由此可以看出，用字母代替数所列出的式子，不仅形式简明、书写方便；而且意义广泛，便于表达数量关系的一般规律；还将便于分析与运算。

用字母代替数，虽然是一种比较抽象的方法，但正如列宁所指出的：“一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然”<sup>①</sup>，所以在数学、其它自然科学以及工程实践中广泛地运用着这种方法。

例如，当建筑物某层楼面的标高<sup>②</sup>为 $h$ （米）时，那么在其上面 $0.82$ （m）的窗台标高就为 $h+0.82$ （m）；当配制砌筑的水泥砂浆抗压强度为 $M$ （千牛顿/平方毫米<sup>③</sup>）、使用的水泥强度为 $f_c$ （N/mm<sup>2</sup>）时，那么每立方米砂浆所用的水泥量就为 $\frac{1000M}{Kf_c}$ （kg），其中 $K$ 为调整系数；当混凝土的浇筑速度为 $v$ （m/h）、新浇混凝土初凝时间为 $t_0$ ，混凝土的重力密度为 $\gamma$ 时，那么采用内部振捣器时新浇筑的混凝土作用于模板上的侧压力强度为 $0.22 \gamma t_0 \beta_1 \beta_2 v^{\frac{1}{2}}$ （kN/m<sup>2</sup>），其中 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 分别为外加剂、坍落度影响的修正系数。

① 引自列宁《哲学笔记“黑格尔《逻辑学》一书摘要”》，人民出版社1956年第一版。

② 标高就是以标准水平面为基准来标明的高度。工业和民用建筑物，一般以底层室内地坪为标准面，把这个面的标高称为±00（读作“正负零”）。窗台在底层室内地坪以上 $0.8\text{m}$ ，就称它的标高为 $+0.8\text{m}$ ，基础底面在底层室内地坪以下 $1.8\text{m}$ ，就称它的标高为 $-1.8\text{m}$ 。

③ 本书基本采用法定计量单位。压强、应力的单位为Pa（帕斯卡），它是 $1\text{N}$ （牛顿）的力均匀而垂直地作用于 $1\text{m}^2$ （平方米）的面上所产生的压力，即 $1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$ ；它与非法定计量单位 $\text{kgf}/\text{m}^2$ （千克力/平方米）的转换关系是 $1\text{kgf}/\text{m}^2 = 9.80665\text{Pa} \approx 9.8\text{Pa}$ 。力的单位为N（牛顿），它是使质量为 $1\text{kg}$ （千克）的物体产生加速度 $1\text{m}/\text{s}^2$ （1米每二次方秒）的力，即 $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ ；它与非法定计量单位 $\text{kgf}$ （千克力）的转换关系是 $1\text{kgf} = 9.80665\text{N} \approx 9.8\text{N}$ 。但为了适应习惯用法，本书的压强、应力单位多用 $1\text{kN}/\text{m}^2$ （千牛顿每平方米）或 $1\text{N}/\text{mm}^2$ （1牛顿每平方毫米），它与非法定计量单位 $1\text{kgf}/\text{cm}^2$ 的转换关系是： $1\text{kgf}/\text{cm}^2 \approx 98\text{kN}/\text{m}^2$  或  $1\text{kgf}/\text{cm}^2 \approx 0.098\text{N}/\text{mm}^2$ 。

又如，当字母 $D$ 、 $G$ 分别表示钢筋的直径（mm）、1 m长该钢筋的重量（kg）时，那么就有 $G = 0.006165D^2$ ；当字母 $f$ 、 $[f]$ （kN/m<sup>2</sup>）分别表示荷载作用下建筑构件截面上的内力值、允许内力值时，那么就有 $f \leq [f]$ ；当字母 $D$ 、 $l$ （mm）分别表示绑扎的受拉的Ⅱ级钢筋的直径、搭接长度时，那么就有 $l \geq 35D$ 。

用字母代替数，可以把客观事物中的数量关系一般化。而分析、研究这种数量关系，就需要对字母进行各种运算。我们把含有字母的运算称为代数运算（或字母运算），而数的运算称为算术运算。

算术运算的规律大家已熟悉。由于字母是代替数的，所以象前面加法交换律那样加以抽象，就可得到代数运算的规律。它是进行字母运算的基础。

代数运算的规律

表 1-1

名 称	数 字 例 子	代 数 运 算	备 注
基 本 运 算 律	$(-2) + 3 = 3 + (-2)$ $(-1) + 2 + 3 = [(-1) + 2] + 3$ $(-2) \times 3 = 3 \times (-2)$ $(-1) \times 2 \times 3 = [(-1) \times 2] \times 3$ $2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$	$a + b = b + a$ $a + b + c = (a + b) + c$ $a \cdot b = b \cdot a$ $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a, b, c$ 均为实数， $m, n$ 均为 正整数
指 数 律	$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4}$ $(2^8)^4 = 2^{8 \times 4}$ $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	
四 则	$2 - 3 = 2 + (-3)$ $2 + (-3) = 2 - 3$	$a - b = a + (-b)$ $a + b = a - (-b)$	
转 化 规 则	$2 \times \frac{2}{5} = 2 \div \frac{5}{2}$ $2 \div 3 = 2 \times \frac{1}{3}$	$a \times b = a \div \frac{1}{b}$ $a \div b = a \times \frac{1}{b}$	
符 号 规 则	$(-3) \times (-4) = 3 \times 4$ $(-3) \times 4 = 3 \times (-4) = -3 \times 4$ $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$	$(-a) \cdot (-b) = ab$ $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$ $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	
去 括 号 规 则	$2 - [3 - (-4)] = 2 - 3 + (-4)$ $2 + [3 - (-4)] = 2 + 3 - (-4)$	$a - (b - c) = a - b + c$ $a + (b - c) = a + b - c$	

用字母代替数，最常用有拉丁字母和希腊字母，都有大写与小写之分。现列表如下。

拉丁字母表(按英文字母读音读出)

表 1-2

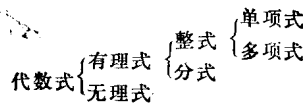
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

希腊字母表

表 1-3

字 母	读 音	字 母	读 音	字 母	读 音		
$A$	$\alpha$	阿尔法	$I$	$i$	约塔		
$B$	$\beta$	贝塔	$K$	$\kappa$	卡帕		
$\Gamma$	$\gamma$	伽马	$\Lambda$	$\lambda$	兰布达		
$\Delta$	$\delta$	德耳塔	$M$	$\mu$	米尤		
$E$	$\epsilon$	艾普西隆	$N$	$\nu$	纽		
$Z$	$\zeta$	截塔	$\Xi$	$\xi$	克西		
$H$	$\eta$	艾塔	$O$	$o$	奥密克戎		
$\Theta$	$\theta$	西塔	$\Pi$	$\pi$	派		
					$P$	$\rho$	洛
					$\Sigma$	$\sigma$	西格马
					$T$	$\tau$	陶
					$\Upsilon$	$\upsilon$	宇普西隆
					$\Phi$	$\phi$	斐
					$\chi$	$\chi$	喜
					$\Psi$	$\psi$	普西
					$\Omega$	$\omega$	奥墨伽

用字母代替数，经过加、减、乘、除、乘方、除方运算，就可得到各种各式的式子： $h + 0.82$ ， $0.006165D^2$ ， $\frac{1000M}{Kf_0}$ ， $0.22\gamma t_0 \beta_1 \beta_2 v^{\frac{1}{2}}$ ，等等。我们把用加、减、乘、除、乘方、开方运算符号将数或表示数的字母连接起来的式子称为代数式（简称式）。其中只含有加、减、乘（包括乘方）运算的代数式称为整式，例如  $h + 0.82$ ， $0.006165$ ；分母中含有字母的代数式称为分式，例如  $\frac{1000M}{KR_0}$ ；根号内含有字母的代数式称为根式或无理式，例如  $0.22\gamma t_0 \beta_1 \beta_2 v^{\frac{1}{2}}$ 。代数式分类如下所示。



因为代数式中的字母是代表数的，所以它可用具体的数值代替。我们把用具体的数值替代代数式中的字母，经计算得到的结果称代数式的值。

**【例 1】** 在施工准备工作中，建筑材料仓库的面积由代数式  $\frac{1.5T_n Q}{0.65RT}$  ( $m^2$ ) 确定，其中字母  $T_n$  为仓库贮备的时间（天）， $Q$  为建筑材料的年需要量（吨或立方米）， $T$  为仓库的年工作时间（天）， $R$  为仓库每平方米能存放的建筑材料量（吨或立方米）。如果某工程的钢筋年需要量  $Q = 1000t$ ，贮备时间  $T_n = 30d$ （即天），年工作时间  $T = 300d$ ，仓库每平方米贮存量  $R = 1.5t$ ，试计算钢筋仓库所需的面积？

**【解】** 把  $Q = 1000$ ， $T_n = 30$ ， $T = 300$ ， $R = 1.5$  代入代数式，就得仓库所需的面积

$$\frac{1.5T_n Q}{0.65RT} \Bigg|_{\substack{T_n=30, Q=1000 \\ T=300, R=1.5}} = \frac{1.5 \times 30 \times 1000}{0.65 \times 1.5 \times 300} = 153.9 (m^2).$$

需要注意，在计算代数式的值时，字母所取的数值，不应当使代数式或它所表示的实际的量失去意义。例如，在代数式  $\frac{a}{b}$  中， $b$  不能取零。

从研究具体的“数”到研究含有字母的“式”，是人们对数量关系的认识不断深化的表现。“数”与“式”既有联系，又有区别。在以后的讨论中，既要注意它们的联系，更要注意它们的区别。

### 三、整式及其运算

在代数式中，整式最为基本最为简单。形如 $0.006165D^2$ 的整式，仅含有数和字母的乘法（包括乘方）运算，不含加减运算，把它称为单项式。形如 $h+0.82$ 的整式是几个单项式的代数和<sup>①</sup>，把它称为多项式。在单项式中，字母前面的数（包括正负号在内）称为单项式的数字系数，所有字母的指数的和称为单项式的次数。例如， $0.006165D^2$ 的系数为 $0.006165$ ；次数为 $2$ 。在多项式中，各个单项式（包括它前面的符号）称为多项式的项，而次数最高的项的次数称为该多项式的次数。例如， $h+0.82$ 有二项，最高次是一次，称为一次二项式，其中 $h$ 称为一次项， $0.82$ 称为常数项；又如， $3a-7a^2+2$ 称为二次三项式，其中 $-7a^2$ 称为二次项， $3a$ 称为一次项， $2$ 称为常数项。在多项式中，字母部分完全相同（字母和字母的次数完全相同）的项称为同类项。例如， $3b^2$ 与 $(-5)b^2$ ， $\frac{1}{2}mx^2$ 与 $10mx^2$ 都是同类项；常数项与常数项也是同类项。单项式和多项式统称为整式。

为了便于分析，经常把多项式的各项按照某个字母的次数大小加以排列。例如， $3a-7a^2+2$ 可排成

$$-7a^2+3a+2 \quad (\text{次数从大到小})$$

或

$$2+3a-7a^2 \quad (\text{次数从小到大})$$

我们把各项次数从大到小的排列称为降幂排列，反之为升幂排列。习惯上多用降幂排列。

#### 1. 整式的加减法

整式的加减法与数的加减法不完全相同，它需要把式子中的括号去掉（该过程称为去括号，其规则见表1-1；如果括号有多层，常从里向外逐层去掉），还需要把几个同类项合并在一起（该过程称为合并同类项，其方法是：字母部分不变，系数相加减）。

**【例 2】** 计算  $(x^3-3x^2+2)-(3x^3-7x-3)$ ，并求  $x=1$  时的值。

**【解】** 原式  $= x^3 - 3x^2 + 2 - 3x^3 + 7x + 3$  [去括号]

$$= x^3 + (-3x^2) + 2 + (-3x^3) + 7x + 3$$

$$= [x^3 + (-3x^3)] + (-3x^2) + 7x + [2 + 3] \quad [\text{加减交换律、结合律}]$$

$$= [1 + (-3)]x^3 + (-3x^2) + 7x + [2 + 3]$$

$$= -2x^3 - 3x^2 + 7x + 5, \quad [\text{合并同类项}]$$

当  $x=1$  代入上式，有

$$\text{原式}|_{x=1} = -2x^3 - 3x^2 + 7x + 5 |_{x=1} = -2 - 3 + 7 + 5 = 7.$$

整式加减法的实质就是求一个多项式的代数和的运算，最后归结为对同类项的系数进行加减运算。

#### 2. 整式乘法、数乘的速算

我们知道，数的乘法口诀是乘法运算的基础。相类似，整式乘法的基础是正整数指数幂及其运算律（即指数律）：

<sup>①</sup> 两个单项式相减，可以在被减式上加上减式的相反式，因而若干单项式相加减的式子，都可化成全相加的式子，这种写法称为代数和。例如， $2a^2 - 3a - (-4) = 2a^2 + (-3a) + (+4)$ 。



$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_n = a^n;$$

及

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n,$$

其中  $m, n$  为正整数。

运用指数律和基本运算律就可作整式乘法运算。

**【例 3】** 计算:  $(a)(3ax^2) \cdot (4a^2bx)$ ;  $(b)(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ .

**【解】**  $(a)(3ax^2) \cdot (4a^2bx) = 3ax^2 \cdot 4a^2bx = (3 \times 4) \cdot (a \cdot a^2) \cdot b \cdot (x^2 \cdot x)$  [乘法交换律、结合律]  
 $= 12a^3bx^3$ , [指数律]

$(b)(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = (a+b) \cdot a^2 + (a+b) \cdot (-ab) + (a+b) \cdot b^2$  [乘法对加法分配律]

$= a \cdot a^2 + b \cdot a^2 + a \cdot (-ab) + b \cdot (-ab) + a \cdot b^2 + b \cdot b^2$  [乘法对加法分配律]

$= a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$ . [指数律]

由例3(b)可以看出,有些多项式乘多项式是有规律可循的。我们把它们算出来并收集在一起,统称为乘法公式。它们是

完全平方公式:

$$\text{和的平方公式 } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{差的平方公式 } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$\text{平方差公式 } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

完全立方公式:

$$\text{和的立方公式 } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$\text{差的立方公式 } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$\text{立方和公式 } (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$

$$\text{立方差公式 } (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

(1-1)

在代数式运算中,灵活地运用乘法公式,可以简化计算,提高效率。

**【例 4】** 计算:  $(3x+2y)^2$ ;  $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ ;  $(a+2b+3c-d)(a+2b-3c+d)$ .

**【解】**  $(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$ ;

$$(2x+3)(4x^2-6x+9) = (2x+3)[(2x)^2 - (2x) \cdot 3 + 3^2]$$

$$= (2x)^3 + 3^3 = 8x^3 + 27;$$

$$(a+2b+3c-d)(a+2b-3c+d) = [(a+2b) + (3c-d)][(a+2b) - (3c-d)]$$

$$= (a+2b)^2 - (3c-d)^2 = (a^2 + 4ab + 4b^2) - (9c^2 - 6cd + d^2)$$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 - 9c^2 + 6cd - d^2.$$

我们已经知道:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

同样,由整式乘法得到

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$