

前 言

本书是在密执安大学 (University of Michigan) 为研究生开设的轨迹最优化课程所用的讲稿基础上写成的。

虽然最优化的基本理论多年来维持不变, 但其应用的主要课题却已从轨道飞行真空中的轨迹, 转向采用推力和气动力联合进行机动的大气中的飞行轨迹。这种趋向是由几种因素造成的。在最优航天轨迹方面, 由劳登(Lawden)、孔唐苏 (Contensou)、马雷克(Marec)、马歇尔 (Marchal)、布雷克威尔(Breakwell) 和其他一些杰出的科学家们所完成的工作, 已使这一理论达到了完善的境地。因此, 轨迹最优化研究的方向, 目前正进一步转向探索新的领域, 这就要涉及到气动控制力。另一方面, 随着电子传感技术和导航技术的完善, 新一代的超音速战斗机已经研制出来。它们的飞行速度已远远超过音速, 但要完成某项飞行任务的时间, 和与之相应的机动的空间却都变成了苛刻的约束条件。通常, 最优化过程就是在某些动力学和物理学约束的条件下, 寻求在某种意义下的最佳解的过程。这就构成了大气中飞行的新颖而有趣的研究课题。最后, 航天飞机的出现, 以及未来数十年在低高度地球轨道上活动的前景, 使人们的注意力集中到大气上层中高超音速飞行时用气动力进行的最优机动方面。在这些新的领域中, 美国及其他国家的研究工作已积累了丰富的文献。因此, 对于那些想从事这一诱人研究领域工作的年轻科学家和工程师来说, 一本关于大气中飞行最优轨迹的综合性论著无疑是理想的基础学习材料。

正是以这样的观念, 我写成了这本书。现在它作为Elsevier航天研究丛书的第二卷出版, 该丛书的第一卷是 J. P. 马雷克博士的杰出著作《最优航天轨迹》(“Optimal Space Trajectories”)。我遵循了马雷克博士循序渐进的原则, 即由简单到复杂依次讨论各个课题。本书首先是作为参考教材而编写的。如果将它用于教学, 尽管各章彼此关联, 并频繁地互相引用, 但每一章还都是自成一体。因此, 材料可以由讲课者随意选取。对于以高性能飞机的最优机动为重点的一学期的课程, 前十一章已足够了, 第三、第四章可以省去, 并代之以直接最优化方法的题材。对于那些主要对火箭飞行轨迹感兴趣的读者, 我建议他们阅读第一至第七章和第十二至第十五章。

篇幅的限制使我不可能引用所有对大气中飞行的一般论题作出了贡献的作者的论著。然而, 我相信所选编的参考文选是有代表性的, 而且也是完整的, 只要读者查阅任一个参考文献目录, 就会找到有关的技术文献, 以扩充他在某一特殊题材方面的知识。

本人将十分感谢读者提出的任何关于改进本书内容的建议。

阮 春 荣 (N.X.Vinh) 1980.9.

符 号 表

拉丁字母:

a	音速; 半主轴
b	方程 (8.4) 之数值系数
c	燃料消耗率
$\vec{C}$	常向量
C_i	$i=0,1,\dots$, 积分常数
C_D	阻力系数
C_{D_0}	零升阻力系数
C_L	升力系数
$C_{L_{max}}$	最大升力系数
D	阻力
e	轨道偏心率; 方程 (10.11) 之特征系数; 方程 (11.47) 之能量高度
E_0	最大升阻比
g	重力加速度
h	高度
H	哈密顿函数
i	倾斜角
J	性能指标
k	比热比; 查普曼大气参数
k_i	$i=1,2,\dots$, 积分常数
K	诱导阻力因子
K_0	无量纲燃料消耗率
l	无量纲弧长
L	升力
m	飞行器质量
M	马赫数
n	过载
p	压强
$\vec{p}$	伴随向量
p_x	状态变量 x 的伴随变量

q	动压
r	离地球中心的径向距离; 转弯半径
r_a	远地点距离
r_p	近地点距离
R	大气层半径
Re	雷诺数
s	方程 (12.8) 之无量纲弧长
S	参考面积
t	时间
T	推力值
u	无量纲速度; 控制变量
$\vec{u}$	控制向量
v	方程 (12.8) 之无量纲动能
V	速度
w	无量纲翼载荷
W	重力
$\vec{x}$	状态向量
x, y, z	笛卡尔坐标
X, Y, Z	笛卡尔坐标
Z	方程 (12.8) 之查普曼高度变量

希腊字母:

α	攻角; 无量纲远地点距离
β	大气高度尺度的倒数; 无量纲近地点距离
γ	航迹角
δ	压强比
Δ	滚转角正切函数值
η	无量纲侧向距离
θ	经度; 无量纲时间

λ 范化控制量; 方程 (6.4) 之范化升力
系数
 μ 无量纲翼载荷; 重力常数
 ξ 无量纲纵向距离
 ρ 大气密度
 σ 滚转角
 τ 无量纲推力; 推力重力比
 ϕ 纬度
 Φ 切换函数
 X 角距

ψ 航向角
 ω 无量纲翼载荷; 近地点角距
 Ω 升交点经度

下标:

e 进入点状态
 f 末端状态
 0 初始状态
 $\bullet$ 对流层顶状态
 M, V 方程 (8.17) 之对数导数

绪 言

§ 0.1 概 述

科学和技术上的很多问题都要求在所有可能的解中选取最好的,即最优的解。在本世纪的后半叶,一个最有前途和最吸引人的最优化问题就是最优航天轨迹的研究。这种问题就是对于飞行器在三维空间的运动寻找在某种意义上是最佳的轨迹。在真空中飞行时,飞行器只受到来自一个或多个天体的引力的作用,以及飞行器本身产生的推力的作用。这方面的理论已十分完善。在最近出版的专著《最优航天轨迹》一书中,马雷克详细地阐述了这方面的问题^[1]。对这部优秀论著的自然的引伸,或许就是大气中飞行最优轨迹的研究。对任一种航天飞行,这个大气飞行段相当于飞行轨迹的初始段,有时候也是飞行轨迹的末端段。低高度飞行时,大气飞行轨迹就包括了全部轨迹。

本书的目的在于研究大气中飞行的最优轨迹。一般的最优化问题是一种最优转移问题。在引力场中,相对于惯性参考系而言,航天飞行器M被看作具有质量 m 的一个质点,它受到无时不在的引力 $m\vec{g}$,以及只要推进系统工作就存在的推力 $\vec{T}$,另外还有气动力 $\vec{A}$ 的作用(图0.1)。这个气动力随飞行器在空间中的位置而改变,而且受制导过程支配。这种最优化问题就是通过推力 $\vec{T}$ 和气动力 $\vec{A}$ 对飞行器进行控制,使它从时刻 t_0 的初始状态(位置向量 $\vec{r}_0$ 、速度向量 $\vec{v}_0$ 、质量 m_0)转移到末端时刻 t_f 的末端状态($\vec{r}_f$ 、 $\vec{v}_f$ 和 m_f),并使末端状态的某个函数为最大。在最优航天轨迹转移的问题中,这个函数称为性能指标,一般它就是末端质量。重要的是大气中飞行时这个性能指标可能会千变万化。除了末端质量之外,可以要求转移时间为最小,就像在战斗机爬升性能和转弯性能的问题中所研究的那样;也可以对远程超音速运输机,要求其航程为最大;还可以使航天飞机在重返地球时着陆区域为最优。

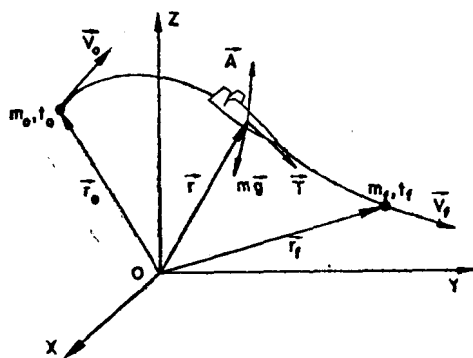


图 0.1 转移轨迹

关于这方面的题材,虽然已有大量丰富的文献,但要选取有关材料却不是一件简单的事情。这个事实反映在两本关于大气层最优轨迹的优秀著作之中,这两本书在苏联出版,美国国家航空和航天管理局也有它们的英文译本。第一本书,由克罗托夫(Krotov)、布克列耶夫(Bukreev)和古尔曼(Gurman)所著的《飞行动力学的新变分法》(New Variational

Methods in Flight Dynamics) [2] 几乎只局限于一种飞行控制方式,就是振荡控制方式。另外,什卡多夫 (Shkadov)、布哈诺娃 (Bukhanova)、伊拉里奥诺夫 (Illarionov) 和普洛希赫 (Plokhikh) 所著《大气中飞行器最优三维运动力学》(Mechanics of Optimum Three-Dimensional Motion of Aircraft in the Atmosphere) [3] 一书主要研究了大气层再入轨迹。完整的大气中飞行轨迹最优化研究工作的内容,应该既包括有翼式航天飞行器在接近轨道飞行中高超音速的范围,又应包括高性能飞机在低高度飞行的高亚音速和超音速的范围。后面这个课题已取得了重大的进展,并出版了英文文献。在这方面作出了主要贡献的有美国的米勒 (Miele)、布赖森 (Bryson)、斯派尔 (Speyer)、布雷克威尔、布塞曼 (Busemann)、雷特曼 (Leitmann)、凯莱 (Kelley) 和莫耶 (Moyer), 欧洲的孔唐苏、弗夫 (Fave) 和迪克曼斯 (Dickmanns) 以及以色列的希纳尔 (Shinar)。除了这些杰出的科学家的著作之外,他们的学生也写了大量有关这个课题的博士论文。同时,法国的孔唐苏、马雷克和马歇尔,美国的凯莱、布赖森、雅各布森 (Jacobson)、麦克唐纳 (McDaniel)、鲍尔斯 (Powers) 和吉尔伯特 (Gilbert) 对最优控制理论,特别是在大气中飞行时经常遇到的奇异控制、相空间及适用于处理控制的不等式约束的理论作出了贡献……对此还可以列举更多。限于本书的篇幅,要选取有关材料显然是一项困难的任务。

本书首先是一本研究性专著,但也可以做为刚开始攻读大气中飞行最优轨迹这一课题的科学家和工程师的教材。本书的素材已收集了多年,从1968年开始,作者在密执安大学的讲课中就几乎年年用到。但把它写成书时其困难在于内容上的一致性。作为教科书,甚至是一本研究性专著,都不应该是研究论文的简单选辑,它的各个部分应该是相互关联的。然而情况往往是,人们对新的课题试图撰写论文时,总是从手头已有的研究论著中的疑点出发,对一般理论的特殊领域进行开拓,每个作者或团体从各自的研究中作出他们的贡献。更具体地说,研究再入轨迹的论文是在球面坐标系中列写运动方程的;而对低速情况下飞机的性能分析,运动方程总是在直角笛卡尔坐标系中列写。考虑到所研究的速度,无论是极高高度上接近于轨道速度,还是低高度上接近于音速,要分析的问题都涉及同样的动力学过程,也就是有翼飞行器在行星大气内的飞行。因此,作者在编著本书中,以及本人研究中的主要工作,是对大气飞行轨迹最优化的研究提出统一的研究方法。不同问题中气动力和发动机控制量的一般特性是相同的,特殊问题求解,要根据所研究的物理空间中的状况来决定,而且根据端点条件和所加的物理约束求得特定的最优轨迹。

全书的论述侧重于理论分析。不过对很多问题也给出了数值解,使用它们是为了定量地,更重要的是定性地对最优轨迹的特性,以及在这个特定轨迹上飞行器制导所必需的最优控制量作出说明。作者力图避免用特定的飞行器来作数值计算。为此,只要有可能就采用无量纲变量。对任何特定问题进行一般性讨论必须如此。因为最优控制量的特性并不取决于任何特定的计量系统,而是取决于一定数目的重要的无量纲性能参数,它们需要用显式来表示。

§ 0.2 内 容 提 要

第一章首先简单论述函数最优化的方法。大气中飞行时最优控制的一个特点,就是气动力控制量和发动机控制量都能从一个状态切换为另一个状态。另外,在长时间的飞行中,以推力大小表示的发动机控制量经常处在中间状态。在线性推力控制的情况下,这就对应着所

谓的奇异控制。第二章阐述切换理论, 它也包括奇异控制理论。第三章是关于一般运动方程的推导。第四章为后面分析大气飞行轨迹提供气动力和推力方面必要的基础知识。从第五章开始研究最优轨迹, 这一章中给出了最优气动力控制量的一般特性, 以及适合于各种情况的运动积分式; 还介绍了问题的向量式表述法, 并利用坐标变换对采用球面坐标的再入轨迹以及采用笛卡尔坐标的低高度飞行这两种情况得到了结果。第六章和第七章研究的问题忽略了马赫数的影响。第六章研究水平面内的最优轨迹, 所选的问题都清楚地说明了气动力和发动机控制量的切换特性。三维空间的无动力飞行在第七章中进行研究。高亚音速和超音速飞行是第八章和第九章讨论的课题, 在这种飞行中马赫数的影响起着重要的作用, 这时, 三维空间中一般三维动力飞行问题的复杂性就变得明显了。因而需要提出新的降低问题阶次的近似方法, 以便快速地对最优轨迹进行计算。这些方法, 如凯莱的能量状态模拟法和吉尔伯特的周期控制法在第十章和第十一章中进行讨论。从第十二章开始分析最优再入轨迹。前面各章中的运动方程是在位于所谓平坦地面参考系内的笛卡尔坐标系中列写的, 此后, 运动方程要在球面坐标系中列写, 而它又是位于被视为惯性系的球状地面参考系内。在第十二章中, 为了把最优再入轨迹的运动方程写成完全无量纲的形式, 使之与飞行器的质量、尺寸和形状无关, 引进了无量纲变量方程组, 即修正的查普曼(Chapman)变量方程组。可以看到, 涉及到的唯一有关参数就是最大升阻比, 它是飞行器最重要的气动性能参数; 而且大气特性也能用一个无量纲常数来表示。利用与正则变换相结合的坐标变换, 并进行一般的简化, 就可回复到第七章中早已推得的无动力飞行方程。第十三章分析大圆平面内的最优再入轨迹。第十四章讨论某些三维飞行的情况, 特别是再入飞行器的最大着陆区, 也就是终迹的问题。最后, 第十五章研究利用气动升力使燃料消耗为最少的轨道机动问题。

参 考 文 献

1. J.P. Marec, *Optimal Space Trajectories*, Elsevier, Amsterdam, 1979.
2. V.F. Krotov, V.Z. Bukreev, and V.I. Gurman, *New Variational Methods in Flight Dynamics*, NASA TTF-657, 1971.
3. L.M. Shkadov, R.S. Bukhanova, V.F. Illarionov, and V.P. Plokhikh, *Mechanics of Optimum Three-Dimensional Motion of Aircraft in the Atmosphere*, NASA TTF-777, 1975.

最优化理论

本章中, 首先简要地回顾最简单的最优化理论——一般的极大值和极小值原理。它所研究的问题是: 找一个 n 维的向量 $\vec{x}=(x^1, x^2, \dots, x^n)$, 使某一个具有 n 个变量的函数 $J=f(\vec{x})$ 达到极大或极小。尽管在本书中很少用到这个理论本身, 但很自然地会把它推广到函数的最优化问题, 也就是找一个 m 维的向量函数 $\vec{u}=[u^1(t), u^2(t), \dots, u^m(t)]$, 满足微分约束 $\dot{\vec{x}}=f(\vec{x}, \vec{u}, t)$, 使函数 $J=t(\vec{u})$ 达到极大或极小。对于如何用变分理论来处理这一类问题, 本章也将给出简单的推导。

§ 1.1 极值的必要条件

研究一个具有 n 个独立变量 $x^1, x^2, \dots, x^n$, 定义在变量 x^i 的 R 域之中的标量函数

$$J=f(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (1.1)$$

使得该函数达到极值 (极大或极小) 的特定向量 $\vec{x}=(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 的位置, 可以看作 R 域中的一个点, 它可以根据下面的定理予以确定。

定理1 具有 n 个独立变量 $x^1, x^2, \dots, x^n$ 的连续函数 $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$, 只有当各个变量 x^i 的值, 使 n 个偏导数 $\partial f/\partial x^1, \partial f/\partial x^2, \dots, \partial f/\partial x^n$ 或者全部等于零, 或者其中一个或数个偏导数不连续时, 才能在 R 域内取得极大值或极小值。

从图 1.1 可以看到单变量情况下此定理的几何解释。在极值出现的点上, 我们称函数 J 是驻定的, 这些驻定值如果存在, 就必须把它们与在 R 域边界上 J 的值相比较, 以便找到真正的绝对最大值或最小值。对于域内各阶偏导数都连续的某一点, 取极值的必要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x^2}=0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x^n}=0 \quad (1.2)$$

因此, 对于任意一个位移 $\delta \vec{x}$, 我们可以写出其变分

$$\delta J = \frac{\partial f}{\partial x^1} \delta x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} \delta x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \delta x^n \quad (1.3)$$

并且断定在驻定点处 $\delta J=0$ 。

这种方法只提供了确定局部极值所有可能位置的一种手段。对于双变量函数

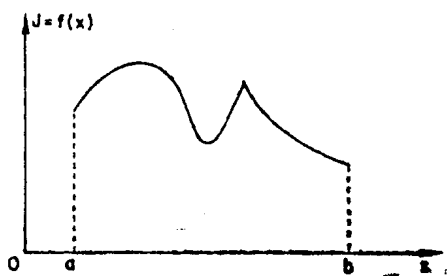


图 1.1 函数的极大值和极小值

$J=f(x^1, x^2)$, 可以指出, 如果

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} < 0 \quad \ominus$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \right)^2 > 0 \quad (1.4)$$

则该局部极值是一个相对极大值。如果上述第一式变为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} > 0 \quad \ominus$, 则该局部极值是一个相对极小值。关于多变量函数极大值和极小值的充分条件的详细论述, 可以在汉考克 (Hancock) [1] 的著作中找到。

§ 1.2 满足约束的解

n 个变量 $x^1, x^2, \dots, x^n$ 可能服从某种关系式, 这些关系式称为约束, 其形式为:

$$g^1(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$$

$$g^2(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$$

...

$$g^m(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0 \quad (1.5)$$

其中 $m < n$ 。因此, 只有 $n-m$ 个变量是独立的。引进一组称之为拉格朗日 (Lagrange) 乘子的 m 个常数: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 并且研究增广函数

$$I = J - \lambda \cdot g = J - (\lambda_1 g^1 + \lambda_2 g^2 + \dots + \lambda_m g^m) = F(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (1.6)$$

那末 n 个变量 $x^1, x^2, \dots, x^n$ 就都可以认为是独立的。只要变量 x^1 满足条件 (1.5), 那末 J 的一个驻定值就对应 I 的一个驻定值。这就归结为一个无约束的最优化问题。写出 $\delta I = 0$, 即

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x^2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x^n} = 0 \quad (1.7)$$

就可得到这种问题的解。方程组 (1.7) 和方程组 (1.5) 一起, 组成 $n+m$ 个方程的方程组, 它有 n 个未知数 x^i 和 m 个未知数 λ_j 。

§ 1.3 变分法

函数最优化所研究的问题, 是寻求使某一泛函 J 达到极大或极小的未知函数。这方面, 称为变分法的古典理论已得到充分的发展, 并很适合于处理飞行力学的最优化问题。

一般地, 我们来研究一个动态系统, 它在每个瞬时 t 由具有 n 个分量 $x^i (i=1, 2, \dots, n)$ 的列向量 $\bar{x}$ 来确定。该向量称为状态向量。系统由一组称为运动方程或状态方程的微分方程组所决定:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (1.8)$$

式中 $\bar{f}$ 是具有 n 个分量的列向量, 而 $\bar{u}$ 是有 m 个分量 $u^j (j=1, 2, \dots, m)$ 的列向量, 它称为控制向

⊖原文误写为 $\partial^2 f / \partial x^1 \partial x^2 < 0$ ——译者注

⊖原文此处有错。若按原文, 则应译成上述二个不等式中的不等号均取反号。——译者注

量。如果把航空、航天飞行器看作一个质点，那末向量 $\bar{x}$ 就可能代表三个位置分量、三个速度分量和质量的集合；而向量 $\bar{u}$ 就可能是三个推力分量、滚转角和攻角的集合。

古典变分法^[2]中的迈耶 (Mayer) 问题，就是寻求一个最优控制律 $\bar{u}^*(t)$ ，使包含初始状态、初始时间、末端状态和末端时间的某个函数 J ，即

$$J = J(\bar{x}_0, t_0, \bar{x}_f, t_f) \quad (1.9)$$

具有驻定值。这个 J 称为性能指标。利用某一个控制律 $\bar{u} = \bar{u}(t)$ ，把状态方程 (1.8) 积分，就可以得到从时刻 t_0 的初始状态 $\bar{x}_0$ 到时刻 t_f 的末端状态 $\bar{x}_f$ 的轨迹。因为 J 取决于所选的特定向量函数 $\bar{u}(t)$ ，所以 J 是一个泛函。

一般， $\bar{x}_0$ 、 t_0 和 $\bar{x}_f$ 、 t_f 可能服从于某一个约束关系式

$$\bar{\omega}(\bar{x}_0, t_0, \bar{x}_f, t_f) = 0 \quad (1.10)$$

式中 $\bar{\omega}$ 是有 p 个分量 ω^k ($k=1, 2, \dots, p$) 的列向量。我们可能预先规定好向量 $\bar{x}_0$ 、时间 t_0 和 t_f ，这就是一种约束的例子。

拉格朗日问题的性能指标是一个定积分，

$$G = \int_{t_0}^{t_f} f^{n+1}(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \quad (1.11)$$

在状态向量中再引进一个附加分量 x^{n+1} ，使

$$x^{n+1} = \int_{t_0}^t f^{n+1}(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \quad (1.12)$$

则拉格朗日问题就可以变成迈耶问题。于是就得到一个附加状态方程

$$\dot{x}^{n+1} = f^{n+1}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

它具有新的性能指标

$$J = x_f^{n+1} \quad (1.13)$$

很显然，它是 (1.9) 式的一种特殊情况。因此，只需要研究迈耶问题就可以了。

§ 1.3.1 最优性的必要条件

问题是要找函数 $\bar{u}(t)$ 以及 $\bar{x}(t)$ ，满足微分约束 (1.8) 和端点条件 (1.10)，使得 (1.9) 式定义的函数 J 是驻定的。把 (1.8) 式写成 $\dot{\bar{x}} - \bar{f} = 0$ ，引进拉格朗日乘子向量 $\bar{p}$ ，它是有 n 个分量 p_i 的行向量，称为状态向量 $\bar{x}$ 的伴随向量。于是，可以按照一般的极大值极小值原理处理这种微分约束问题，并寻找增广性能指标

$$I = J - \int_{t_0}^{t_f} \bar{p} \cdot (\dot{\bar{x}} - \bar{f}) dt = J - \int_{t_0}^{t_f} (\bar{p} \cdot d\bar{x} - H dt) \quad (1.14)$$

的驻定值，上式中的点积

$$H = \bar{p} \cdot \bar{f} \quad (1.15)$$

称为系统的哈密顿函数。

写出 I 的驻定值的条件 $\delta I = 0$ ，利用熟知的莱布尼兹 (Leibnitz) 法则，有

$$\begin{aligned} \delta I = & \frac{\partial J}{\partial \bar{x}_0} \delta \bar{x}_0 + \frac{\partial J}{\partial t_0} \delta t_0 + \frac{\partial J}{\partial \bar{x}_f} \delta \bar{x}_f + \frac{\partial J}{\partial t_f} \delta t_f - \int_{t_0}^{t_f} [\bar{p} \cdot \delta(d\bar{x}) - (\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \delta \bar{u})] dt \\ & - (\bar{p} \cdot \bar{x} - H)_f \delta t_f + (\bar{p} \cdot \bar{x} - H)_0 \delta t_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

于是，用分部积分法得到

$$\int_{t_0}^{t_f} \vec{p} \cdot \delta(d\vec{x}) = \int_{t_0}^{t_f} \vec{p} d(\delta\vec{x}) = [\vec{p} \cdot \delta\vec{x}]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\vec{p}} \cdot \delta\vec{x} dt = \vec{p}_f \cdot (\delta\vec{x})_f - \vec{p}_0 \cdot (\delta\vec{x})_0 - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\vec{p}} \cdot \delta\vec{x} dt$$

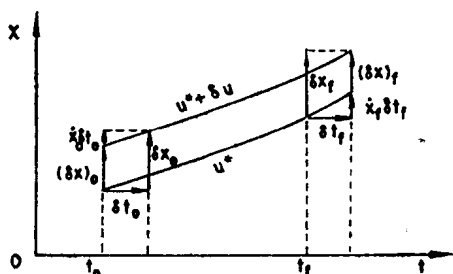


图 1.2 端点的变分

从图1.2可以看到：在端点有

$$\delta\vec{x}_0 = (\delta\vec{x})_0 + \dot{\vec{x}}_0 \delta t_0$$

$$\delta\vec{x}_f = (\delta\vec{x})_f + \dot{\vec{x}}_f \delta t_f$$

因此，

$$\int_{t_0}^{t_f} \vec{p} \cdot \delta(d\vec{x}) = \vec{p}_f \cdot (\delta\vec{x}_f - \dot{\vec{x}}_f \delta t_f) - \vec{p}_0 \cdot (\delta\vec{x}_0 - \dot{\vec{x}}_0 \delta t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\vec{p}} \cdot \delta\vec{x} dt \quad (1.17)$$

代入方程(1.16)，就得到变分 δI

$$\delta I = \delta J - [\vec{p} \cdot \delta\vec{x} - H \delta t]_0^f + \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}}) \cdot \delta\vec{x} + \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \cdot \delta \vec{u}] dt = 0 \quad (1.18)$$

由于引入了乘子 $\vec{p}$ ，方程(1.18)中的向量 $\delta\vec{x}$ 和 $\delta \vec{u}$ 就变成独立向量。这就得到了必要条件：

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} = 0 \quad (1.19)$$

和

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \quad (1.20)$$

于是，式(1.18)变为

$$\delta I = \delta J - [\vec{p} \cdot \delta\vec{x} - H \delta t]_0^f = 0 \quad (1.21)$$

$\delta\vec{x}_0$ 、 δt_0 、 $\delta\vec{x}_f$ 和 δt_f 应该满足此式，同时它们还应满足式(1.10)给出的端点条件 $\vec{\omega} = 0$ 。

§ 1.3.2 横截条件

同样，引进一个新的拉格朗日乘子 $\vec{\lambda}$ ——一个有 p 个分量 $\lambda_k (k=1, 2, \dots, p)$ 的行向量，就能对约束 $\vec{\omega} = 0$ 加以处理，并且寻找新的增广性能指标

$$K = I + \vec{\lambda} \cdot \vec{\omega} \quad (1.22)$$

的驻定值。由于引入了向量 $\vec{\lambda}$ ，变分 $\delta\vec{x}_0$ 、 δt_0 、 $\delta\vec{x}_f$ 、 δt_f 就成为任意的。然后，利用条件(1.21)把必要条件 $\delta K = 0$ 写成

$$\delta J - [\vec{p} \cdot \delta\vec{x} - H \delta t]_0^f + \vec{\lambda} \cdot \delta \vec{\omega} = 0 \quad (1.23)$$

或写成显式：

$$\vec{p}_0 = -\frac{\partial J}{\partial \vec{x}_0} - \vec{\lambda} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}_0} \quad (1.24)$$

$$\vec{p}_f = \frac{\partial J}{\partial \vec{x}_f} + \vec{\lambda} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}_f} \quad (1.25)$$

$$H_0 = \frac{\partial J}{\partial t_0} + \vec{\lambda} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t_0} \quad (1.26)$$

$$H_t = -\frac{\partial J}{\partial t_f} - \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t_f} \quad (1.27)$$

如果 $\dot{\lambda}$ 的 p 个分量从这最后一组方程中消去, 就得到 $[2(n+1)-p]$ 个方程, 它们称为横截条件。特别是, 如果任一个初始的或末端的参数不同时显含在性能指标 J 和约束函数 $\bar{\omega}$ 之中, 它就称为自由参数, 而且相应的初始或末端伴随分量为零。例如, 如果 x_1^f 是自由的, 则 $p_1^f=0$; 如果末端时间 t_f 是自由的, 则 $H_t=0$ 。

§ 1.3.3 正 则 方 程

方程(1.19)表明: 由(1.15)式定义的哈密顿函数, 对控制向量 $\bar{u}$ 来说是驻定的(极大或极小)。解这个方程, 可求出最优控制

$$\bar{u}^* = \bar{u}^*(\bar{p}, \bar{x}, t) \quad (1.28)$$

把它代回到哈密顿函数中, 就得到 H 的最优值

$$H^* = H(\bar{p}, \bar{x}, \bar{u}^*(\bar{p}, \bar{x}, t), t) = H^*(\bar{p}, \bar{x}, t) \quad (1.29)$$

于是, 把状态方程(1.8)和伴随方程(1.20)分别写成:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H^*}{\partial \bar{p}} \quad (1.30)$$

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H^*}{\partial \bar{x}} \quad (1.31)$$

方程(1.30)和(1.31)组成了 $2n$ 个正则方程的方程组, 它有 $2n$ 个变量 $\bar{x}$ 和 $\bar{p}$ 。利用端点条件(1.10)和横截条件(1.24)~(1.27), 把这个正则方程组积分, 就可解决这种最优化问题。

§ 1.3.4 初 积 分

对大多数问题, 没有计算设备, 最优轨迹的正则方程组是不能完全积分的。但极常见的情况是, 如果提供状态变量和伴随变量之间的一些关系式和一定数量的积分常数, 它就可以部分地积分。这种关系式称为初积分, 利用它们就能得到关于最优控制和最优轨迹特性的信息。

首先, 从正则方程(1.30)和(1.31)可以看到:

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{\partial H^*}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial H^*}{\partial t} = \frac{\partial H^*}{\partial t} \quad (1.32)$$

因此, 变量 $-H^*$ 就可看作时间 t 的伴随变量。如果 t 不是显含在哈密顿函数 H^* 中, 那末 $\partial H^*/\partial t=0$, 于是得到初积分

$$H^* = \text{常数} \quad (1.33)$$

一般地, 如果状态变量 x^i 不显含在哈密顿函数 H^* 之中, 就认为它在求解中是可忽略的。相应的伴随方程就是

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial x^i} = 0$$

将它积分就得到一个初积分

$$p_i = a_i \quad (1.34)$$

式中 a_i 是一个积分常数。对每一个可忽略的 x^i , $2n$ 阶的正则方程组就简化成 $2n-2$ 阶的方程组:

$$\begin{aligned}\dot{x}^j &= \frac{\partial H^*}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H^*}{\partial x^j}\end{aligned}\quad (1.35)$$

$$j=1, 2, \dots, n, \quad j \neq i$$

解这个简化方程组时, 最后求积分就可得到变量 x^i 。若时间 t 可以忽略, 系统就称为守恒系统。于是, 就得到积分(1.33)。另外, 若把状态变量 x^i , 乃至伴随变量 p_i 用作独立变量, 我们就得到 $2n-2$ 个方程的方程组, 此时, t 被认为是状态变量, 由最后求积分可以得到。

如果一个状态变量既是可忽略的, 又是端点自由的, 其相应的伴随分量在整个最优轨迹上就恒等于零。例如, 若 x^i 可忽略, 且 $x_{i_0}^i$ 或 $x_{i_f}^i$ 是自由的, 则

$$p_i = a_i, \quad p_{i_0} = 0 \text{ 或 } p_{i_f} = 0$$

因此。

$$p_i = 0, \quad t \in [t_0, t_f]$$

对于一个守恒系统, 如果 t_0 或 t_f 是自由的, 则有 $H^* = 0$ 。

§ 1.4 庞特里雅金(Pontryagin)极大值原理

在最优控制 $\bar{u}^*(t)$ 的方程(1.19)中, 假定控制集是无界的。但在大多数物理问题中, 特别是在飞行力学中, 用推力值、推力方向、滚转角和攻角形成的控制量却被限制在某个界限内。一般, 控制向量 $\bar{u}$ 属于一个控制集

$$\bar{u} \in U \quad (1.36)$$

在这方面, 古典变分法已被推广用来处理控制变量的约束问题^[2]。另一种办法是利用庞特里雅金极大值原理, 它是处理有界控制变分问题的极好方法。

庞特里雅金原理是迈耶问题的一个特例, 此原理可表述如下:

初始状态向量 $\bar{x}_0$, 初始时间 t_0 和末端状态向量的某些分量 x_α^p ($\alpha=1, 2, \dots, p$)是规定的。末端时间 t_f 或是规定的; 或是自由的; 或在某些问题中, 是一个有待最优化的量。

性能指标的形式是

$$J = C_\beta x_f^\beta \quad (1.37)$$

它是末端分量 x_f^β ($\beta=p+1, \dots, n$)的线性组合。

和往常一样, 状态方程是

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (1.38)$$

拟找满足约束(1.36)的最优控制 $\bar{u}^*(t)$, 以使泛函 J 为极大。对于极小值问题, 只要改变 J 的符号就成为极大值问题。

可以看到, 只要在前面的理论中用哈密顿函数绝对极大值条件

$$\begin{aligned}\bar{u}^* &= \arg \sup H^\ominus \\ \bar{u} &\in U\end{aligned}\quad (1.39)$$

⊖ 该式意为在 U 中取自变量 $\bar{u}$, 使 H 为绝对极大值。argument—自变量, supremum—上确界。——译者注

代替条件(1.19)就可以了。换句话说,在控制集U中选择的最优控制 $\bar{u}^*$,要使哈密顿函数在每一瞬时都是绝对极大值^[3]。这个条件是一个必要条件,但在微分方程组(1.38)是线性的情况下,它也是充分条件。

端点约束(1.10)就变成

$$\begin{aligned} \bar{x}_0^i - \bar{x}_0^i &= 0 \\ \bar{t}_0 - \bar{t}_0 &= 0 \\ \bar{x}_f^i - \bar{x}_f^i &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

式中 $(-)$ 量是规定的,在末端时间是规定的情况下,还有

$$\bar{t}_f - \bar{t}_f = 0 \quad (1.41)$$

由方程(1.24~1.27),我们很容易推导出横截条件

$$\begin{aligned} p_{i_0} &= -\lambda_{i_0} \\ p_{\alpha_f} &= \lambda_{\alpha_f} \\ p_{\beta_f} &= C_{\beta} \\ H_0^* &= \lambda_{(n+1)_0} \\ \begin{cases} H_f^* = 0 \\ H_f^* = -\lambda_{(n+1)_f} \end{cases} & \quad \begin{matrix} (t_f \text{自由}) \\ (t_f \text{固定}) \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.42)$$

§ 1.5 正则变换

正则变换理论在分析力学中得到了充分的发展^[4]。它首先由弗拉艾斯·德·弗贝克(Fraeijs de Veubeke)成功地应用于最优轨道转移问题^[5]。此后,它就成为轨迹最优化问题的一个十分有用的工具^[6]。

若适当地选取变量 $\bar{x}$,使它的一些分量可以忽略,则正则方程(1.30)和(1.31)形式的变分方程就更易于解析积分。因此,在保持正则方程形式的同时,需要进行坐标变换。这种变换被称作正则变换。

设 $\bar{x}$ 和 $\bar{p}$ 是具有哈密顿函数H的正则变量,即

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

现在研究微分式

$$d\theta = \bar{p} \cdot d\bar{x} - H dt \quad (1.44)$$

或

$$d(\bar{p} \cdot \bar{x} - \theta) = \bar{x} \cdot d\bar{p} + H dt \quad (1.45)$$

如果 $d\theta$ 是全微分,那末上述两个方程的右边也必然是全微分,这就要求满足正则方程(1.43)。

假设从变量 $(\bar{x}, \bar{p})$ 到新变量 $(\bar{X}, \bar{P})$ 的变换使

$$\bar{P} \cdot d\bar{X} - \bar{p} \cdot d\bar{x} = -dW \quad (1.46)$$

式中 dW 是一个全微分,并且W可以用 $(\bar{x}, \bar{p})$ 或 $(\bar{X}, \bar{P})$ 表示。这样一种变换称为相切变换。如果W另外还含有t,就可以写成

$$\vec{p} \cdot d\vec{X} - \vec{p} \cdot d\vec{x} - \frac{\partial W}{\partial t} dt = -dW - \frac{\partial W}{\partial t} dt \quad (1.47)$$

如果 $d\theta$ 是全微分, 这个方程的每一边就都是全微分。而且在这种情况下,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \vec{p}} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \vec{X}} \end{aligned} \quad (1.48)$$

式中

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (1.49)$$

由于这些方程是正则的, 并表示了所要求的条件, 故若 $d\theta$ 是全微分, 它们就等价于原始的正则方程 (1.43)。因此, 任一种满足条件 (1.46) 的从变量 $(\vec{x}, \vec{p})$ 到 $(\vec{X}, \vec{P})$ 的变换都是一种正则变换。

参 考 文 献

1. H.Hancock, Theory of Maxima and Minima, Dover, New York, 1960.
2. G.A.Bliss, Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, 1961.
3. C.Leitmann, An Introduction to Optimal Control, McGraw-Hill, New York, 1966.
4. H.C.Plummer, An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, Dover, New York, 1966.
5. B.Fraeijs de Veubeke, Canonical transformation and the thrust-coast-thrust optimal transfer problem, Astronautica Acta, 11, (1965), 271-282.
6. J.P.Marec, Optimal Space Trajectories, Elsevier, Amsterdam, 1979.

切换理论

§ 2.1 孔唐苏 (Contensou) 机动性区域

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (2.1)$$
$$\vec{n} \in U(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

仿照孔唐苏的方法, 我们把在时刻 t 具有状态向量 $\vec{x}$ 的自然机动性区域 $D(\vec{x}, t)$, 定义为速端空间中可达到的区域^[1~3]

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (2.3)$$

$$\bar{u}^* = \operatorname{argsup} H, \text{ 或 } H^* = \sup H \quad (2.4)$$

$$\vec{u} \in U \qquad \vec{u} \in U$$

$$H = \vec{p} \cdot \vec{f} = \vec{p} \cdot \vec{V} \quad (2.5)$$

— 15 —

§ 2.2 最优切换

研究机动域 D 的最小凸域 $\bar{D}$ 的直线部分,这部分线段可能是自然段 R ,也可能是人为的凸化段 $\bar{R}$ 。凸域 $\bar{D}$ 和伴随向量 $\bar{p}$ 随时间 t 而改变。可能存在一个时刻 t_0 ,它使最优工作点突然地从 M_{10} ,通过直线段 $\bar{R}$ 改变到 M_{20} ;同时,最优控制从 $\bar{u}_1^*$ 改变为 $\bar{u}_2^*$;这就是最优控制的切换。图2.2表示的是切换 $M_{10} \rightarrow M_{20}$ 的顺序。如果事件的顺序相反,那末就得到切换 $M_{20} \rightarrow M_{10}$ 。

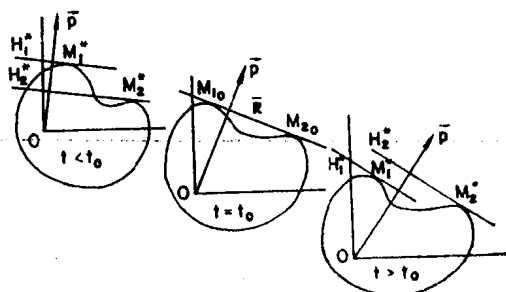


图 2.2 最优切换 $M_{10} \rightarrow M_{20}$

为了研究切换的方向,分别考察 D 域的边界 G 上 M_{10} 和 M_{20} 点附近的凸区 G_1 和 G_2 。在切换点附近,最优性条件用来选择工作点,它或者是在 G_1 上,具有速度 $\bar{v}_1$;或者是在 G_2 上,具有速度 $\bar{v}_2$ (图2.3)。

设

$$\bar{v} = (1-\lambda)\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 = (1-\lambda)\bar{f}(\bar{x}, \bar{u}_1, t) + \lambda\bar{f}(\bar{x}, \bar{u}_2, t) \quad (2.6)$$

式中 $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ 分别是对应于点 $M_1 \in G_1$ 和 $M_2 \in G_2$ 的 $\bar{u}$ 值。在 $[0, 1]$ 区间中改变 λ ,就得到线段 M_1M_2 上所有的点 M ,而这个线段显然是位于机动凸域 $\bar{D}$ 的内部。由(2.6)式确定的、人为地引进的参数 λ ,构成了一种范化的线性控制。我们注意到:在切换点附近, λ 的最优值或者是 $\lambda=0$ (点 M_1);或者是 $\lambda=1$ (点 M_2)。因此,为了得到最优速度 $\bar{v}^*$,只要先选择 $\bar{u}_1^*$ 和 $\bar{u}_2^*$,然后再选择最优值 λ^* 就可以了。这样就有:

$$\bar{u}_1^* = \bar{u}_1^*(\bar{p}, \bar{x}, t) = \arg \sup_{M_1 \in G_1} H_1$$

$$\bar{u}_2^* = \bar{u}_2^*(\bar{p}, \bar{x}, t) = \arg \sup_{M_2 \in G_2} H_2$$

相应的哈密顿函数极大值为:

$$H_1^* = H_1^*(\bar{p}, \bar{x}, t) = \sup_{M_1 \in G_1} H_1$$

$$H_2^* = H_2^*(\bar{p}, \bar{x}, t) = \sup_{M_2 \in G_2} H_2$$

因为 $H = \bar{p} \cdot \bar{v}$,利用(2.6)式就得到哈密顿函数

$$\tilde{H} = (1-\lambda)H_1^* + \lambda H_2^* \quad (2.7)$$

使 $\tilde{H}$ 对于 λ 为最大,可得到如下的最优解:

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{当 } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda} = H_2^* - H_1^* < 0 \text{ 时} \\ 1 & > 0 \end{cases}$$

在切换时刻有

$$H_2^* - H_1^* = 0 \quad (2.8)$$

而且,如果此时

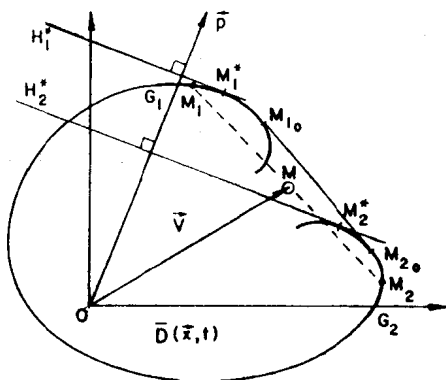


图 2.3 切换点附近的机动域